УДК 517.988.63

ОБОРОТНІСТЬ НЕЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА $(\mathcal{L}x)(t) = H\left(x(t), \dfrac{dx(t)}{dt}\right)$ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ НА ОСІ ФУНКЦІЙ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@USUWM.ru.ua

We obtain conditions for invertibility of the nonlinear differential operator

$$(\mathcal{L}x)(t) = H\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)$$

in the space of functions bounded on the axis.

Получены условия обратимости нелинейного дифференциального оператора

$$(\mathcal{L}x)(t) = H\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)$$

в пространстве ограниченных на оси функций.

1. Основний об'єкт дослідження. Позначимо через C^0 банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$, а через C^1 банахів простір функцій $x \in C^0$, похідна кожної з яких є елементом простору C^0, з нормою $\|x\|_{C^1} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \left\|\dfrac{dx}{dt}\right\|_{C^0}\right\}$.

Розглянемо неперервну на $\mathbb{R}^2$ функцію $H(x, y)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$. Визначимо оператор $\mathcal{L} : C^1 \longrightarrow C^0$ рівністю

$$(\mathcal{L}x)(t) = H\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

де x — елемент простору C^1.

З'ясуємо, при виконанні яких умов диференціальне рівняння

$$H\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = z(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

для кожної функції $z \in C^0$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1$, а відповідний оператор $\mathcal{L}$ має обернений неперервний оператор.

Зазначимо, що аналогічні задачі розв'язувалися багатьма авторами переважно у випадку лінійних або слабконелінійних операторів (див., наприклад, [1–10]). Випадок $H(x, y) = f(x) + y$ розглянуто в [11–13].

Умови оборотності оператора $\mathcal{L}$ встановимо за допомогою допоміжних тверджень.

2. Локально збіжні послідовності. Говоритимемо, що послідовність функцій $x_k \in C^0$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до функції $x \in C^0$ при $k \to +\infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} x \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

якщо ця послідовність є обмеженою і $\lim_{k\to+\infty} \max_{|t|\le p} |x_k(t) - x(t)| = 0$ для кожного $p \in \mathbb{N}$.

Аналогічно послідовність функцій $x_k \in C^1$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до функції $x \in C^1$ при $k \to +\infty$:

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^1} x \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

якщо $\sup_{k\ge1} \|x_k\|_{C^1} < +\infty$ і $\lim_{k\to+\infty} \max_{|t|\le p} \left(|x_k(t) - x(t)| + \left| \frac{dx_k(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right| \right) = 0$ для кожного $p \in \mathbb{N}$.

Розглянемо у просторах C^0 і C^1 кулі $S_r^i = \{x : \|x\|_{C^i} \le r\}$, $i = \overline{0,1}$, радіуса r.

Важливим є наступне твердження про обмежену послідовність елементів простору C^1.

Лема 1 [12]. *Для кожної послідовності функцій $x_n \in S_r^0 \cap S_R^1$, $n \in \mathbb{N}$, де r і R — довільні додатні числа, існують такі строго зростаюча послідовність натуральних чисел n_k, $k \in \mathbb{N}$, і функція $x \in S_r^0$, що $x_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} x$ при $k \to +\infty$.*

3. Умови розв'язності рівняння (1) у просторі C^0. Ці умови встановимо, використавши теорему про існування неявної функції, локальну апроксимацію правої частини рівняння (1), теорему Шаудера про нерухому точку та лему 1.

3.1. Умови A, B, C і D. Теорема про існування неявної функції. Будемо використовувати наступні умови.

Умова A. Функція $H(x, y)$ є неперервною на $\mathbb{R}^2$.

Умова B. Функція $H(x, y)$ строго монотонна по змінній y на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ і для всіх $x \in \mathbb{R}$ справджується співвідношення $\{H(x, y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Умова C. Функція $H(x, 0)$ є строго монотонною на $\mathbb{R}$ і

$$\{H(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}. \tag{2}$$

Важливою для подальших досліджень рівняння (1) є така теорема.

Теорема 1. *Якщо для функції $H(x, y)$ виконуються умови A і B, то рівність $H(x, y) = z$ визначає єдину неявну неперервну на $\mathbb{R}^2$ функцію $y = Y(x, z)$.*

Ця теорема встановлюється аналогічним чином, як і відома теорема про існування неявної функції (див., наприклад, [14, с. 449]).

З теореми випливає, що у випадку виконання умов A і B диференціальне рівняння (1) рівносильне диференціальному рівнянню

$$\frac{dx(t)}{dt} = Y(x(t), z(t)), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

(кожний обмежений розв'язок рівняння (1) є розв'язком рівняння (3) і навпаки). Це полегшує дослідження рівняння (1) і оператора $\mathcal{L}$.

У подальшому будемо використовувати наступну умову.

Умова D. Функція $Y(x, z)$ є строго монотонною по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.

3.2. Функція $y = Y_{a,b,k}(x, z)$. За допомогою функції $y = Y(x, z)$ побудуємо допоміжну функцію $y = Y_{a,b,k}(x, z)$, що спростить дослідження диференціальних рівнянь (1) і (3).

Вважатимемо, що виконуються умови A, B і C.

Спочатку розглянемо випадок, коли функція $H(x, 0)$ є зростаючою на $\mathbb{R}$.

Виберемо довільний відрізок $[a, b]$. Цьому відрізку співставимо відрізок $[\alpha, \beta]$, для якого $H(\alpha, 0) = a$ і $H(\beta, 0) = b$. Розглянемо зростаючу і неперервну на $\mathbb{R}$ функцію

$$N_{a,b}(x) = \begin{cases} x - \alpha + a, & \text{якщо } x < \alpha, \\ H(x, 0), & \text{якщо } x \in [\alpha, \beta], \\ x - \beta + b, & \text{якщо } x > \beta, \end{cases}$$

і множини

$$G_0 = [\alpha, \beta] \times [a, b],$$

$$G_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > \beta, a \le z < b\},$$

$$G_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > \beta, b \le z < x - \beta + b\},$$

$$G_3 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z > b, z - b + \alpha < x \le z - b + \beta\},$$

$$G_4 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z > b, -\infty < x \le z - b + \alpha\},$$

$$G_5 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x < \alpha, a < z \le b\},$$

$$G_6 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x < \alpha, x - \alpha + a < z \le a\},$$

$$G_7 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z < a, z - a + \alpha \le x < z - a + \beta\},$$

$$G_8 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z < a, z - a + \beta \le x < +\infty\},$$

для яких $\bigcup\limits_{k=0}^{8} G_k = \mathbb{R}^2$ і $G_i \cap G_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$.

Функцію $y = Y_{a,b,k}(x,z)$ визначимо за допомогою рівності

$$Y_{a,b,k}(x,z) = \begin{cases} Y(x,z,k), & \text{якщо } (x,z) \in G_0, \\ Y(\beta,z) + k(x-\beta), & \text{якщо } (x,z) \in G_1, \\ k(x-z+b-\beta), & \text{якщо } (x,z) \in G_2, \\ Y(x-z+b,b), & \text{якщо } (x,z) \in G_3, \\ Y(\alpha,b) + k(x-z+b-\alpha), & \text{якщо } (x,z) \in G_4, \\ Y(\alpha,z) + k(x-\alpha), & \text{якщо } (x,z) \in G_5, \\ k(x-z+a-\alpha), & \text{якщо } (x,z) \in G_6, \\ Y(x-z+a,a), & \text{якщо } (x,z) \in G_7, \\ Y(a,\beta) + k(x-z+a-\beta), & \text{якщо } (x,z) \in G_8, \end{cases} \tag{4}$$

де k — таке число, що $kY(\beta,a) > 0$.

Далі розглянемо випадок, коли функція $H(x,0)$ є спадною на $\mathbb{R}$. Відрізку $[a,b]$ співставимо відрізок $[\alpha,\beta]$, для якого $H(\beta,0) = a$ і $H(\alpha,0) = b$. Розглянемо спадну і неперервну на $\mathbb{R}$ функцію

$$N_{a,b}(x) = \begin{cases} -x+\alpha+a, & \text{якщо } x < \alpha, \\ H(x,0), & \text{якщо } x \in [\alpha,\beta], \\ -x+\beta+b, & \text{якщо } x > \beta, \end{cases}$$

і множини

$$G_0^* = [\alpha,\beta] \times [a,b],$$

$$G_1^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x > \beta, a \le z < b\},$$

$$G_2^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z \ge b, -z+b+\beta < x < +\infty\},$$

$$G_3^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z > b, -z+b+\alpha < x \le -z+b+\beta\},$$

$$G_4^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z > b, -\infty < x \le -z+b+\alpha\},$$

$$G_5^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x < \alpha, a < z \le b\},$$

$$G_6^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z \le a, -\infty < x < -z+a+\alpha\},$$

$$G_7^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z < a, -z+a+\alpha \le x < -z+a+\beta\},$$

$$G_8^* = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z < a, -z+a+\beta \le x < +\infty\},$$

для яких $\bigcup\limits_{k=0}^{8} G_k^* = \mathbb{R}^2$ і $G_i^* \cap G_j^* = \varnothing$, якщо $i \neq j$.

У цьому випадку функцію $y = Y_{a,b,k}(x,z)$ визначимо за допомогою рівності

$$Y_{a,b,k}(x,z) = \begin{cases} Y(x,z), & \text{якщо } (x,z) \in G_0^*, \\ Y(\beta,z) + k(x-\beta), & \text{якщо } (x,z) \in G_1^*, \\ Y(\beta,b) + k(x+z-b-\beta), & \text{якщо } (x,z) \in G_2^*, \\ Y(x+z-b,b), & \text{якщо } (x,z) \in G_3^*, \\ k(x+z-b-\alpha), & \text{якщо } (x,z) \in G_4^*, \\ Y(\alpha,z) + k(x-\alpha), & \text{якщо } (x,z) \in G_5^*, \\ Y(\alpha,a) + k(x+z-a-\alpha), & \text{якщо } (x,z) \in G_6^*, \\ Y(x+z-a,a), & \text{якщо } (x,z) \in G_7^*, \\ k(x+z-a-\beta), & \text{якщо } (x,z) \in G_8^*, \end{cases} \tag{5}$$

де k — таке число, що $kY(\beta,b) > 0$.

З рівностей (4) і (5) випливає, що:

1) функція $Y_{a,b,k}(x,z)$ є неперервною на $\mathbb{R}^2$;

2) справджуються рівності

$$Y_{a,b,k}(x,z) = Y(x,z), \quad (x,z) \in [\alpha,\beta] \times [a,b],$$

і

$$\left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : Y_{a,b,k}(x,z) = 0\right\} = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z = N_{a,b}(x)\right\};$$

3) існує таке число $\omega > 0$, залежне від k, що

$$\max_{(x,z)\in[-\omega,\omega]\times[a,b]} |Y_{a,b,k}(x,z) - kx| \leq |k|\omega. \tag{6}$$

3.3. Існування періодичних розв'язків. Далі будемо використовувати множину $\mathcal{P}_T$ всіх T-періодичних елементів простору C^0 і замикання $\overline{R(F)}$ множини значень $R(F)$ відображення $F : X \longrightarrow Y$ (X і Y — топологічні простори).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови A, B і C.*

Тоді для кожних відрізка $[a,b]$ і функції $z \in \mathcal{P}_T$, $T > 0$, для яких

$$R(z) \subset [a,b], \tag{7}$$

диференціальне рівняння (3) має розв'язок $x \in \mathcal{P}_T$, для якого

$$R(x) \subset [\alpha,\beta], \tag{8}$$

де $[\alpha,\beta] = H^{-1}(\cdot,0)[a,b]$.

Зауважимо, що відображення $H(\cdot, 0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ має обернене неперервне відображення $H^{-1}(\cdot, 0)$.

Доведення. Зафіксуємо довільні число $T > 0$ і функцію $z \in \mathcal{P}_T$, для якої справджується співвідношення (7). Завдяки властивостям функції $Y_{a,b,k}(x, z)$ існують числа $k \neq 0$ і $\omega > 0$, для яких виконується співвідношення (6). Розглянемо цілком неперервне відображення $G : \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_T$, що визначається рівністю

$$(Gx)(t) = \begin{cases} -\int\limits_t^{+\infty} e^{k(t-s)}(Y_{a,b,k}(x(s), z(s)) - kx(s))ds, & \text{якщо } k > 0, \\ \int\limits_{-\infty}^t e^{k(t-s)}(Y_{a,b,k}(x(s), z(s)) - kx(s))ds, & \text{якщо } k < 0, \end{cases}$$

де $t \in \mathbb{R}$. Повна неперервність відображення G легко встановлюється за допомогою теореми Арцела – Асколі [15].

Неважко показати, що задача про існування T-періодичних розв'язків диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Y_{a,b,k}(x(t), z(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

рівносильна аналогічній задачі для рівняння

$$x(t) = (Gx)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

і на підставі (6) для множини $S_\omega = \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\|_{C^0} \leq \omega\}$ справджується співвідношення $GS_\omega \subset S_\omega$. За теоремою Шаудера про нерухому точку [15] множина T-періодичних розв'язків рівняння (10), а отже й рівняння (9), є непорожньою.

Нехай функція $y \in S_\omega$ є розв'язком рівняння (9), тобто $\dfrac{dy(t)}{dt} \equiv Y_{a,b,k}(y(t), z(t))$. Завдяки цій тотожності $y \in C^1 \cap S_\omega$. Тому існують точки $t_1, t_2 \in [0, T]$, для яких $y(t_1) = \min\limits_{t \in [0,T]} y(t)$, $y(t_2) = \max\limits_{t \in [0,T]} y(t)$ і $\left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_1} = \left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_2} = 0$.

Отже, $Y_{a,b,k}(y(t_1), z(t_1)) = Y_{a,b,k}(y(t_2), z(t_2)) = 0$. Оскільки $z(t_i) \in [a, b]$, $i = \overline{1, 2}$, то на підставі властивостей функції $Y_{a,b,k}(x, z)$ і строгої монотонності функції $N_{a,b}(x)$ для $y(t)$ справджується включення (8). Звідси та з включення (7) випливає $Y_{a,b,k}(y(t), z(t)) = Y(y(t), z(t))$, $t \in [0, T]$. Тому функція $y = y(t)$ є розв'язком диференціального рівняння (3).

Теорему 2 доведено.

3.4. Умови виконання рівності $R(\mathcal{L}) = C^0$. У теоремі 2 простір $\mathcal{P}_T$ можна замінити простором C^0.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови A, B і C.*
Тоді для кожної функції $z \in C^0$ рівняння

$$\mathcal{L}x = z$$

має розв'язок $x \in C^1$, *для якого*

$$R(x) \subset H^{-1}(\cdot, 0)\overline{R(z)}.$$

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $z \in C^0$. Розглянемо послідовність $(z_n)_{n\geq 1}$ періодичних елементів простору C^0, для яких

$$R(z_n) \subset \overline{R(z)}, \quad n \geq 1, \tag{11}$$

і

$$z_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} z \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{12}$$

За теоремою 2 існує послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$ періодичних елементів простору C^1, для якої

$$\mathcal{L}y_n = z_n, \quad n \geq 1, \tag{13}$$

і

$$R(y_n) \subset H^{-1}(\cdot, 0)\overline{R(z)}, \quad n \geq 1. \tag{14}$$

Оскільки співвідношення (13) рівносильні відповідно співвідношенням

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = Y(y_n(t), z_n(t)), \quad n \geq 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

і функція $Y(x, z)$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, то завдяки (11) і (14) $\sup\limits_{n\geq 1}\left\|\frac{dy_n}{dt}\right\|_{C^0} < +\infty$. Тому за лемою 1 існують елемент $y \in C^0$ і зростаюча послідовність $(n_k)_{k\geq 1}$ цілих чисел, для яких

$$y_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} y \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{16}$$

На підставі (15) для всіх $t, s \in \mathbb{R}$ і $k \geq 1$

$$y_{n_k}(t) - y_{n_k}(s) = \int\limits_s^t Y(y_{n_k}(\tau), z_{n_k}(\tau))d\tau.$$

Тому завдяки (12), (16) і неперервності функції $Y(x, z)$ на $\mathbb{R}^2$ для всіх $t, s \in \mathbb{R}$

$$y(t) - y(s) = \int\limits_s^t Y(y(\tau), z(\tau))d\tau.$$

Звідси отримуємо, що $y \in C^1$ і $\frac{dy(t)}{dt} = Y(y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, тобто $\mathcal{L}y = z$.

Зазначимо що із (14) і (16) випливає, що $R(y) \subset H^{-1}(\cdot,0)\overline{R(z)}$.

Теорему 3 доведено.

4. Умови оборотності оператора $\mathcal{L}$. Результати попереднього пункту використаємо для встановлення необхідних і достатніх умов оборотності оператора $\mathcal{L}$.

4.1. Необхідні умови оборотності оператора $\mathcal{L}$.

Теорема 4. *Нехай виконується умова A і оператор $\mathcal{L}$ має обернений оператор. Тоді виконується умова C.*

Доведення. Покладемо в рівнянні (1) $z(t) = h$, де h — довільне дійсне число. Нехай $x(t)$ — єдиний розв'язок цього рівняння. Функція $x(t+\tau)$ при довільному $\tau \in \mathbb{R}$ також є розв'язком цього рівняння і завдяки єдиності розв'язку $x(t+\tau) = x(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, тобто $x(t) = x = \mathrm{const}$. Тому $H(x,0) = h$. З довільності вибору h випливає, що справджується рівність (2). Тому відображення $H(\cdot,0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ є бієктивним. Звідси та з неперервності функції $H(x,0)$ на $\mathbb{R}$ випливає строга монотонність цієї функції.

Теорему 4 доведено.

4.2. Оцінки приростів строго монотонних функцій. Достатні умови оборотності оператора $\mathcal{L}$ встановлюються за допомогою наступних тверджень.

Лема 2. *Нехай неперервна на $\mathbb{R}^2$ функція $G(x,z)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ є строго зростаючою по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.*

Тоді для кожного прямокутника $[a,b]\times[c,d]$ і кожного числа $\varepsilon \in (0, b-a)$ існує таке число $k > 0$, що $G(u,z) - G(v,z) \geq k(u-v)$ для всіх $(u,v,z) \in [a,b]\times[a,b]\times[c,d]$, для яких $u - v \geq \varepsilon$.

Доведення. Припустимо, що лема є хибною. Тоді існує послідовність точок $(u_n, v_n, z_n) \in [a,b]\times[a,b]\times[c,d]$, $n \in \mathbb{N}$, для яких $u_n - v_n \geq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, і $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{G(u_n,z_n) - G(v_n,z_n)}{u_n - v_n} = 0$. Тому згідно з неперервністю функції $G(x,z)$ на $[a,b]\times[c,d]$ існують такі числа $\alpha,\beta \in [a,b]$ і $\gamma \in [c,d]$, що $\beta - \alpha \geq \varepsilon$ і $G(\beta,\gamma) = G(\alpha,\gamma)$. Остання рівність суперечить умовам леми.

Отже, лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай неперервна на $\mathbb{R}^2$ функція $G(x,z)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ є строго спадною по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.*

Тоді для кожного прямокутника $[a,b]\times[c,d]$ і кожного числа $\varepsilon \in (0, b-a)$ існує таке число $k < 0$, що $G(u,z) - G(v,z) \leq k(u-v)$ для всіх $(u,v,z) \in [a,b]\times[a,b]\times[c,d]$, для яких $u - v \geq \varepsilon$.

Ця лема встановлюється аналогічним чином, як і лема 2.

Лема 4. *Нехай неперервна на $\mathbb{R}^2$ функція $G(x,z)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ є строго монотонною по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.*

Тоді ця функція є строго зростаючою по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$ або строго спадною по цій змінній на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.

Доведення. Позначимо через $\mathbb{R}_u$ множину всіх точок $z \in \mathbb{R}$, для кожної з яких функція $G(x,z)$ є строго зростаючою по змінній x на $\mathbb{R}$. Аналогічно, через $\mathbb{R}_s$ позначимо множину всіх точок $z \in \mathbb{R}$, для кожної з яких функція $G(x,z)$ є строго спадною по x на $\mathbb{R}$. Ці множини є відкритими. Справді, нехай z_0 — довільна точка множини $\mathbb{R}_u$. Виберемо довільні точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Нехай $x_1 < x_2$. Тоді $G(x_1,z_0) < G(x_2,z_0)$. Розглянемо довільне число $\varepsilon \in (0, (G(x_2, z_0) - G(x_1, z_0))/2)$. Внаслідок неперервності $G(x_1, z)$ і $G(x_2, z)$ у точці z_0 існує таке додатне число δ, що $|G(x_1, z) - G(x_1, z_0)| < \varepsilon$ і $|G(x_2, z) - G(x_2, z_0)| < \varepsilon$, якщо $|z - z_0| < \delta$. Отже, $G(x_1, z) < G(x_2, z)$, якщо $|z - z_0| < \delta$. Тому завдяки строгій монотонності функції $G(x, z)$ по x (для кожного $z \in \mathbb{R}$) $(z_0 - \delta, z_0 + \delta) \subset \mathbb{R}_u$, що доводить відкритість множини $\mathbb{R}_u$.

Аналогічно встановлюється відкритість множини $\mathbb{R}_s$.

Таким чином, $\mathbb{R}_u \cup \mathbb{R}_s = \mathbb{R}$ і $\mathbb{R}_u \cap \mathbb{R}_s = \varnothing$. Завдяки зв'язності $\mathbb{R}$ тільки одна з множин $\mathbb{R}_u$ і $\mathbb{R}_s$ може бути непорожньою [16, с. 496 – 497].

Лему 4 доведено.

4.3. Достатні умови оборотності оператора $\mathcal{L}$. У подальшому дослідженні оператора $\mathcal{L}$ крім умов A, B і C будемо використовувати також умову D.

Справджується таке твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови A, B, C і D.*
Тоді оператор $\mathcal{L} : C^1 \longrightarrow C^0$ має обернений оператор $\mathcal{L}^{-1}$.

Доведення. Завдяки умовам A, B, C та теоремі 3 виконується співвідношення

$$R(\mathcal{L}) = C^0. \tag{17}$$

Покажемо, що рівняння

$$(\mathcal{L}x)(t) = z(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

маємо єдиний розв'язок $x \in C^1$ для кожної функції $z \in C^0$. Звідси та з (17) випливатиме оборотність оператора $\mathcal{L}$.

Зафіксуємо довільний елемент $z \in C^0$. Припустимо, що рівняння (18) має більше ніж один розв'язок. Нехай $x_1, x_2 \in C^1$ — розв'язки цього рівняння, тобто

$$(\mathcal{L}x_i)(t) \equiv z(t), \quad i = \overline{1, 2}, \tag{19}$$

і

$$x_1 \neq x_2. \tag{20}$$

Тоді завдяки (19) та умовам теореми

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \equiv Y(x_i(t), z(t)), \quad i = \overline{1, 2}. \tag{21}$$

Використаємо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$, для яких

$$[a, b] \supset \overline{R(x_1)} \cup \overline{R(x_2)} \tag{22}$$

і $[c, d] \supset \overline{R(z)}$, і точку $t_0 \in \mathbb{R}$, для якої $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$ (така точка існує завдяки (20)). Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $x_1(t_0) < x_2(t_0)$.

Розглянемо випадок, коли функція $Y(x, z)$ є строго зростаючою по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$ (такий випадок можливий завдяки умові D та лемі 4).

Не існує точки $t_1 > t_0$, для якої $x_2(t_1) = x_1(t_1)$ і $x_2(t) > x_1(t)$ для всіх $t \in [t_0, t_1)$, оскільки на підставі (21) $\dfrac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} = Y(x_2(t), z(t)) - Y(x_1(t), z(t)) > 0$ для всіх $t \in$ $\in [t_0, t_1)$ і тому функція $x_2(t) - x_1(t)$ є строго зростаючою на $[t_0, t_1)$. Таким чином,

$$x_2(t) - x_1(t) \geq x_2(t_0) - x_1(t_0), \quad \text{якщо} \quad t \geq t_0. \tag{23}$$

За лемою 2 існує таке додатне число $k > 0$, що $Y(u, z) - Y(v, z) \geq k(u - v)$ для всіх $(u, v, z) \in [a, b] \times [a, b] \times [c, d]$, для яких $u - v \geq x_2(t_0) - x_1(t_0)$.

Отже, завдяки (23) $\dfrac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} \geq k(x_2(t) - x_1(t))$ для всіх $t \geq t_0$. Звідси отримуємо, що $x_2(T) - x_1(T) > b - a$ для деякого числа $T > t_0$. Це співвідношення суперечить (22).

Отже, припущення, що рівняння (18) має більше ніж один розв'язок (у випадку, коли функція $Y(x, z)$ є строго зростаючою по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$), є хибним.

Тепер розглянемо випадок, коли функція $Y(x, z)$ є строго спадною по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.

Не існує точки $t_2 < t_0$, для якої $x_2(t_2) = x_1(t_2)$ і $x_2(t) > x_1(t)$ для всіх $t \in (t_2, t_0]$, оскільки на підставі (21) $\dfrac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} = Y(x_2(t), z(t)) - Y(x_1(t), z(t)) < 0$ для всіх $t \in$ $\in (t_2, t_0]$ і тому функція $x_2(t) - x_1(t)$ є строго спадною на $(t_2, t_0]$. Таким чином,

$$x_2(t) - x_1(t) \geq x_2(t_0) - x_1(t_0) \quad \text{для всіх} \quad t \leq t_0. \tag{24}$$

За лемою 3 існує таке додатне число $k < 0$, що $Y(u, z) - Y(v, z) \leq k(u - v)$ для всіх $(u, v, z) \in [a, b] \times [a, b] \times [c, d]$, для яких $u - v \geq x_2(t_0) - x_1(t_0)$.

Отже, завдяки (24) $\dfrac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} \leq k(x_2(t) - x_1(t))$ для всіх $t \leq t_0$. Звідси отримуємо, що $x_2(T) - x_1(T) > b - a$ для деякого числа $T < t_0$. Це співвідношення суперечить (22).

Отже, припущення, що рівняння (18) має більше ніж один розв'язок (у випадку, коли функція $Y(x, z)$ є строго спадною по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$), є хибним.

Таким чином, оператор $\mathcal{L} : C^1 \longrightarrow C^0$ має обернений оператор $\mathcal{L}^{-1}$.

Теорему 5 доведено.

4.4. Обмеженість, неперервність і с-неперервність оператора $\mathcal{L}^{-1}$. Наведемо деякі властивості оператора $\mathcal{L}^{-1}$.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови A, B, C і D.*

Тоді обернений оператор $\mathcal{L}^{-1}$ для оператора $\mathcal{L} : C^1 \longrightarrow C^0$ є обмеженим, неперервним і с-неперервним.

Доведення. Спочатку покажемо, що оператор $\mathcal{L}^{-1}$ є обмеженим. Розглянемо довільну обмежену множину $M \subset C^0$. За теоремою 3 $R\left(\mathcal{L}^{-1}z\right) \subset H^{-1}(\cdot, 0)\overline{R(z)}$ для всіх $z \in M$. Тому внаслідок неперервності $H^{-1}(\cdot, 0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ множина $\mathcal{L}^{-1}M$ є обмеженою в C^0. Покажемо, що ця множина обмежена в C^1. Використаємо співвідношення $\dfrac{d\left(\mathcal{L}^{-1}z\right)(t)}{dt} \equiv$ $\equiv Y\left(\left(\mathcal{L}^{-1}z\right)(t), z(t)\right)$, що справджується для всіх $z \in M$ на підставі умов теореми. Оскільки функція $Y(x, z)$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, а множини $M \subset C^0$ і $\mathcal{L}^{-1}M \subset C^0$ обмежені, то $\sup\limits_{z\in M}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|Y\left(\left(\mathcal{L}^{-1}z\right)(t), z(t)\right)\right| < +\infty$. Тому $\sup\limits_{z\in M}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{d\left(\mathcal{L}^{-1}z\right)(t)}{dt}\right| < +\infty$. Звідси випливає обмеженість множини $\mathcal{L}^{-1}M$ у C^1.

Отже, оператор $\mathcal{L}^{-1} : C^0 \longrightarrow C^1$ кожну обмежену множину відображає в обмежену множину, тобто є обмеженим.

Покажемо неперервність оператора $\mathcal{L}^{-1}$.

Припустимо, що цей оператор не є неперервним. Існують точки $z_n \in C^0$, $x_n \in C^1$, $n \geq 0$, для яких

$$\mathcal{L}x_n = z_n, \quad n \geq 0, \tag{25}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\|z_n - z_0\|_{C^0} = 0 \tag{26}$$

і

$$\inf_{n\geq 1}\|x_n - x_0\|_{C^1} > 0. \tag{27}$$

З останнього співвідношення випливає, що

$$\inf_{n\geq 1}\|x_n - x_0\|_{C^0} > 0. \tag{28}$$

Справді, якщо для деякої зростаючої послідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ цілих чисел

$$\lim_{k\to+\infty}\|x_{n_k} - x_0\|_{C^0} = 0, \tag{29}$$

то завдяки рівностям

$$\frac{dx_{n_k}(t)}{dt} = Y(x_{n_k}(t), z_{n_k}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1, \tag{30}$$

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = Y(x_0(t), z_0(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

та рівномірній неперервності функції $Y(x, z)$ на кожній обмеженій і замкненій множині справджується співвідношення

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}|Y(x_{n_k}(t), z_{n_k}(t)) - Y(x_0(t), z_0(t))| = 0.$$

Тоді $\lim\limits_{k\to+\infty}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{dx_{n_k}(t)}{dt} - \dfrac{dx_0(t)}{dt}\right| = 0$, що разом із (29) суперечить (27).

Послідовність $(z_n)_{n\geq 1}$ є обмеженою (на підставі (26)). Тому завдяки (25) та обмеженості оператора $\mathcal{L}^{-1}$ $\sup\limits_{n\geq 0}\|x_n\|_{C^1} < +\infty$. Це дає змогу розглянути відрізки $[a,b]$ і $[c,d]$, для яких

$$\bigcup_{n\geq 0}\overline{R\,(x_n)} \subset [a,b] \tag{32}$$

і

$$\bigcup_{n\geq 0}\overline{R\,(z_n)} \subset [c,d]. \tag{33}$$

Позначимо через μ ліву частину нерівності (28).

Розглянемо випадок, коли функція $Y(x,z)$ є строго зростаючою по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$ (такий випадок можливий завдяки умові D та лемі 4). За лемою 2 існує таке число $k > 0$, що

$$Y(u,z) - Y(v,z) \geq k(u-v) \tag{34}$$

для всіх $(u,v,z) \in [a,b]\times[a,b]\times[c,d]$, для яких $u - v \geq \dfrac{\mu}{2}$. Виберемо таке число $\delta > 0$, щоб

$$k\mu - 2\delta > 0. \tag{35}$$

На підставі (26), (32), (33), рівності $\inf\limits_{n\geq 1}\|x_n - x_0\|_{C^0} = \mu$ і неперервності функції $Y(x,z)$ на $[a,b]\times[c,d]$ існують числа $n_1 \in \mathbb{N}$ і $t_1 \in \mathbb{R}$, для яких

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|Y(x_{n_1}(t), z_0(t)) - Y(x_{n_1}(t), z_{n_1}(t))| \leq \delta \tag{36}$$

і $|x_0(t_1) - x_{n_1}(t_1)| \geq \dfrac{\mu}{2}$. Без обмеження загальності можна вважати, що

$$x_0(t_1) - x_{n_1}(t_1) \geq \frac{\mu}{2}. \tag{37}$$

Використаємо співвідношення

$$\begin{aligned}\frac{d(x_0(t) - x_{n_1}(t))}{dt} = {} & (Y(x_0(t), z_0(t)) - Y(x_{n_1}(t), z_0(t))) + \\ & + (Y(x_{n_1}(t), z_0(t)) - Y(x_{n_1}(t), z_{n_1}(t))), \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{38}$$

що випливає із (30) і (31). Звідси з урахуванням (34) – (37) отримуємо

$$\frac{d(x_0(t_1) - x_{n_1}(t_1))}{dt} > 0. \tag{39}$$

Розглянемо довільний проміжок $[t_1, T)$, для якого

$$\frac{d(x_0(t) - x_{n_1}(t))}{dt} > 0, \quad t \in [t_1, T) \tag{40}$$

(множина таких проміжків непорожня, оскільки $Y(x_0(t), z_0(t))$, $Y(x_{n_1}(t), z_0(t))$, $Y(x_{n_1}(t), z_{n_1}(t))$ — неперервні на $\mathbb{R}$ функції і справджуються співвідношення (38) і (39)). Тоді на підставі (40) функція $x_0(t) - x_{n_1}(t)$ є строго зростаючою на проміжку $[t_1, T)$. Тому внаслідок неперервності $x_0(t) - x_{n_1}(t)$ в точці T виконується нерівність $x_0(T) - x_{n_1}(T) > \frac{\mu}{2}$. А оскільки на підставі (32) $\{x_0(T), x_{n_1}(T)\} \subset [a, b]$, то завдяки (34)–(36)

$$(Y(x_0(t), z_0(t)) - Y(x_{n_1}(t), z_0(t))) + (Y(x_{n_1}(t), z_0(t)) - Y(x_{n_1}(t), z_{n_1}(t))) > \frac{k\mu}{2} - \delta > 0.$$

Тому $\frac{d(x_0(t) - x_{n_1}(t))}{dt} > 0$, $t \geq t_1$. Отже, $x_0(t) - x_{n_1}(t) \geq \frac{\mu}{2}$, $t \geq t_1$. Тоді на підставі (34)–(36) і (38) $\frac{d(x_0(t) - x_{n_1}(t))}{dt} \geq \frac{k\mu}{2} - \delta > 0$, $t \geq t_1$. Це співвідношення, очевидно, суперечить (32).

Таким чином, припущення про те, що оператор $\mathcal{L}^{-1}$ не є неперервним, хибне у випадку, коли функція $Y(x, z)$ є строго зростаючою по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.

Тепер розглянемо випадок, коли функція $Y(x, z)$ є строго спадною по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$. За лемою 3 існує таке число $k < 0$, що

$$Y(u, z) - Y(v, z) \leq k(u - v) \tag{41}$$

для всіх $(u, v, z) \in [a, b] \times [a, b] \times [c, d]$, для яких $u - v \geq \frac{\mu}{2}$. Виберемо таке число $\gamma > 0$, щоб

$$k\mu + 2\gamma > 0. \tag{42}$$

Завдяки (26), (32), (33), рівності $\inf\limits_{n \geq 1} \|x_n - x_0\|_{C^0} = \mu$ і неперервності функції $Y(x, z)$ на $[a, b] \times [c, d]$ існують числа $n_2 \in \mathbb{N}$ і $t_2 \in \mathbb{R}$, для яких

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |Y(x_{n_2}(t), z_0(t)) - Y(x_{n_2}(t), z_{n_2}(t))| \leq \delta \tag{43}$$

і $|x_0(t_2) - x_{n_2}(t_2)| \geq \frac{\mu}{2}$. Без обмеження загальності можна вважати, що

$$x_0(t_2) - x_{n_2}(t_2) \geq \frac{\mu}{2}. \tag{44}$$

Використаємо співвідношення

$$\frac{d(x_0(t) - x_{n_2}(t))}{dt} = (Y(x_0(t), z_0(t)) - Y(x_{n_2}(t), z_0(t))) +$$
$$+ (Y(x_{n_2}(t), z_0(t)) - Y(x_{n_2}(t), z_{n_2}(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

що випливає із (30) і (31). Звідси з урахуванням (41) – (44) отримуємо

$$\frac{d(x_0(t_2) - x_{n_2}(t_2))}{dt} < 0. \tag{46}$$

Розглянемо довільний проміжок $(T, t_2]$, для якого

$$\frac{d(x_0(t) - x_{n_2}(t))}{dt} < 0, \quad t \in (T, t_2] \tag{47}$$

(множина таких проміжків непорожня, оскільки $Y(x_0(t), z_0(t))$, $Y(x_{n_2}(t), z_0(t))$, $Y(x_{n_2}(t), z_{n_2}(t))$ — неперервні на $\mathbb{R}$ функції і справджуються співвідношення (45) і (46)). Тоді на підставі (47) функція $x_0(t) - x_{n_2}(t)$ є строго спадною на проміжку $(T, t_2]$. Тому внаслідок неперервності $x_0(t) - x_{n_2}(t)$ в точці T виконується нерівність $x_0(T) - x_{n_2}(T) > \frac{\mu}{2}$. А оскільки на підставі (32) $\{x_0(T), x_{n_2}(T)\} \subset [a, b]$, то завдяки (41) – (43)

$$(Y(x_0(t), z_0(t)) - Y(x_{n_2}(t), z_0(t))) + (Y(x_{n_2}(t), z_0(t)) - Y(x_{n_2}(t), z_{n_2}(t))) < \frac{k\mu}{2} + \gamma < 0.$$

Тому $\frac{d(x_0(t) - x_{n_2}(t))}{dt} < 0$, $t \leq t_2$. Отже, $x_0(t) - x_{n_2}(t) \geq \frac{\mu}{2}$, $t \leq t_2$. Тоді на підставі (41) – (43) і (45) $\frac{d(x_0(t) - x_{n_2}(t))}{dt} \leq \frac{k\mu}{2} + \gamma < 0$, $t \leq t_2$. Це співвідношення, очевидно, суперечить (32).

Таким чином, припущення про те, що оператор $\mathcal{L}^{-1}$ не є неперервним, хибне у випадку, коли функція $Y(x, z)$ є строго спадною по змінній x на $\mathbb{R}$ для кожного $z \in \mathbb{R}$.

Нарешті покажемо, що оператор $\mathcal{L}^{-1}$ є c-неперервним.

Нагадаємо, що оператор $F : C^0 \longrightarrow C^1$ називається c-неперервним, якщо для довільних $a \in C^0$ і $a_n \in C^0$, $n \geq 1$, для яких

$$a_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} a \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

випливає, що

$$Fa_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^1} Fa \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Припустимо, що властивість c-неперервності для $\mathcal{L}^{-1}$ не виконується. Існують функції $h \in C^0$, $h_n \in C^0$, $n \in \mathbb{N}$, і числа $\delta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, для яких

$$h_n \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} h \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{48}$$

і

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| \left(\mathcal{L}^{-1}h\right)(t) - \left(\mathcal{L}^{-1}h_n\right)(t) \right| + \max_{a \leq t \leq b} \left| \frac{\left(\mathcal{L}^{-1}h\right)(t)}{dt} - \frac{\left(\mathcal{L}^{-1}h_n\right)(t)}{dt} \right| > \delta, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{49}$$

Згідно з обмеженістю множини $\{h_n \in C^0 : n \in \mathbb{N}\}$ (на підставі (48)) і обмеженістю оператора $\mathcal{L}^{-1} : C^0 \longrightarrow C^1$ множина $\{L^{-1}h_n : n \in \mathbb{N}\}$ також є обмеженою (у просторі C^1). Тому на підставі леми 1 можна вважати, не обмежуючи загальності, що

$$\mathcal{L}^{-1}h_n \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0} y \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \tag{50}$$

де $y = y(t)$ — деякий елемент простору C^0. Оскільки

$$\frac{d\left(L^{-1}h_n\right)(t)}{dt} \equiv Y\left(\left(L^{-1}h_n\right)(t), h_n(t)\right), \quad n \geq 1,$$

то

$$\left(L^{-1}h_n\right)(t) - \left(L^{-1}h_n\right)(0) = \int\limits_0^t Y\left(\left(L^{-1}h_n\right)(\tau), h_n(\tau)\right) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Звідси, із співвідношень (48), (50) та неперервності функції $Y(x,z)$ на $\mathbb{R}^2$ отримуємо

$$y(t) - y(0) = \int\limits_0^t Y(y(\tau), h(\tau))\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$\mathcal{L}^{-1}h_n \xrightarrow{\text{лок.},\, C^1} y \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{51}$$

Отже, рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Y(x(t), h(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

має розв'язки $x = \left(\mathcal{L}^{-1}h\right)(t)$ і $y = y(t)$, для яких $\|x - y\|_{C^1} \geq \delta > 0$ (згідно з (49) і (51)). Останнє співвідношення суперечить тому, що оператор $\mathcal{L} : C^1 \longrightarrow C^0$ має обернений оператор.

Отже, припущення про те, що оператор $\mathcal{L}^{-1} : C^0 \longrightarrow C^1$ не є c-неперервним, хибне.

Теорему 6 доведено.

З теорем 4 – 6 випливає, що у випадку, коли

$$H(x,y) = f(x) + y$$

або

$$H(x,y) = x + g(y),$$

справджуються наступні твердження.

Теорема 7 [12]. *Якщо функція $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ є неперервною, то оператор $L_1 : C^1 \longrightarrow \longrightarrow C^0$, що визначається рівністю*

$$(L_1x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

має обернений неперервний оператор L_1^{-1} тоді і тільки тоді, коли функція f строго монотонна на $\mathbb{R}$ і $R(f) = \mathbb{R}$.

Теорема 8. *Якщо функція $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ є неперервною, строго монотонною і $R(g) = \mathbb{R}$, то оператор $L_2 : C^1 \longrightarrow C^0$, що визначається рівністю*

$$(L_2 x)(t) = g\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) + x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

має обернений обмежений неперервний і c-неперервний оператор L_2^{-1}.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 535 с.
2. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
4. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.
5. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. — Минск: Наука и техника, 1986. — 200 с.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 271 с.
7. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269–274.
8. *Слюсарчук В. Е.* Нелокальные теоремы об ограниченных решениях функционально-дифференциальных уравнений с нелипшицевыми нелинейностями // Исследование дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1980. — С. 121–130.
9. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116**, № 4. — С. 483–501.
10. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения функциональных и функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Ровно, 1983. — 300 с.
11. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1999. — **54**, вып. 4. — С. 181–182.
12. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 4. — С. 523–539.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні диференціальні рівняння з обмеженими на $\mathbb{R}$ розв'язками // Там же. — 2008. — **11**, № 1. — С. 96–111.
14. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1966. — Т. 1. — 608 с.
15. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с.
16. *Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия. — М.: Наука, 1990. — 672 с.

Одержано 28.05.08