УДК 512.647.2+512.562

О СЛАБЫХ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ТИТСА

А. М. Полищук

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 01107, Киев 127, просп. Акад. Глушкова, 6
e-mail: apol@ukr.net

Let S be a finite P-critical partially ordered set, is a partially ordered set that is critical with respect to positive definiteness of a quadratic Tits form. A set S is called weakly P-critical if any infinite partially ordered set $X \supset S$ contains a P-critical subset that is not isomorphic to S. We give a direct proof of existence of weakly P-critical sets.

Нехай S — скінченна P-критична частково впорядкована множина (тобто частково впорядкована множина, критична відносно додатної визначеності квадратичної форми Тітса). Множину S назвемо слабкою P-критичною, якщо будь-яка нескінченна частково впорядкована множина $X \supset S$ містить P-критичну підмножину, яка не ізоморфна S. У статті доведено існування слабких P-критичних множин.

Квадратичные формы возникают и играют важную роль в различных областях математики (алгебре, геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории интегральных и функциональных уравнений, теории операторов и др., см., например, [1 – 21]). В этой статье рассматриваются соответствующие частично упорядоченным множествам квадратичные формы, которые называют квадратичными формами Титса.

1. Предварительные сведения. Приведем некоторые определения и результаты, связанные с квадратичной формой Титса для частично упорядоченных множеств.

1.1. Форма Титса частично упорядоченных множеств. Пусть S — (конечное или бесконечное) частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество и $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Рассмотрим в декартовом произведении $\mathbb{Z}^{S\cup 0}$ подмножество $\mathbb{Z}_0^{S\cup 0}$, состоящее из всех векторов $z = (z_i)$ с конечным числом ненулевых координат. Квадратичной формой Титса для S называется форма $q_S : \mathbb{Z}_0^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, задаваемая равенством

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i$$

(эта форма для конечных ч. у. множеств впервые рассматривалась в работе [22], а для бесконечных ч. у. множеств определена в работе [23]). Как и любая квадратичная форма, форма Титса $q_S(z)$ называется положительно определенной, если $q_S(z) > 0$ для всех ненулевых допустимых значениях $z = (z_i)$.

Напомним еще некоторые определения.

Говорят, что ч. у. множество S является суммой своих подмножеств A_1 и A_2, если $S = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Если при этом элементы $b \in A_1$ и $c \in A_2$ всегда несравнимы, то сумму называют прямой. Далее, согласно [24] сумма $S = A_1 + A_2$ называется левой (соответственно правой), если из $b < c$, где b и c принадлежат разным слагаемым, следует, что $b \in A_1$ и $c \in A_2$ (соответственно $b \in A_2$ и $c \in A_1$), и минимаксной, если для таких же b и c следует, что b является минимальным, а c — максимальным в S. Сумма называется односторонней, если она является левой или правой.

Любое линейное упорядоченное множество называется также цепью, а ч. у. множество с единственной парой несравнимых элементов — почти цепью.

В работе [24] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Бесконечное ч. у. множество S имеет положительно определенную форму Титса в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

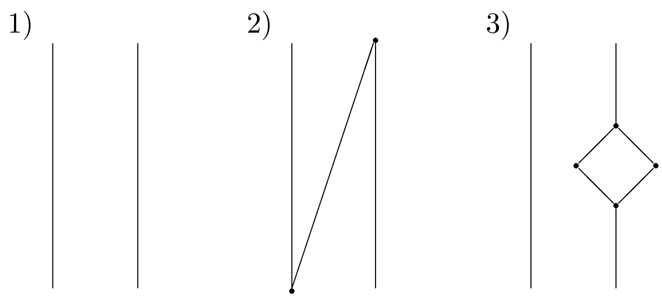
1) S — прямая сумма двух цепей;

2) S — односторонняя минимаксная сумма двух цепей;

3) S — прямая сумма цепи и почти цепи.

Заметим, что в условиях 1 и 3 цепи могут быть пустыми.

Графически ч. у. множества, указанные в условиях 1 – 3, имеют следующий вид:



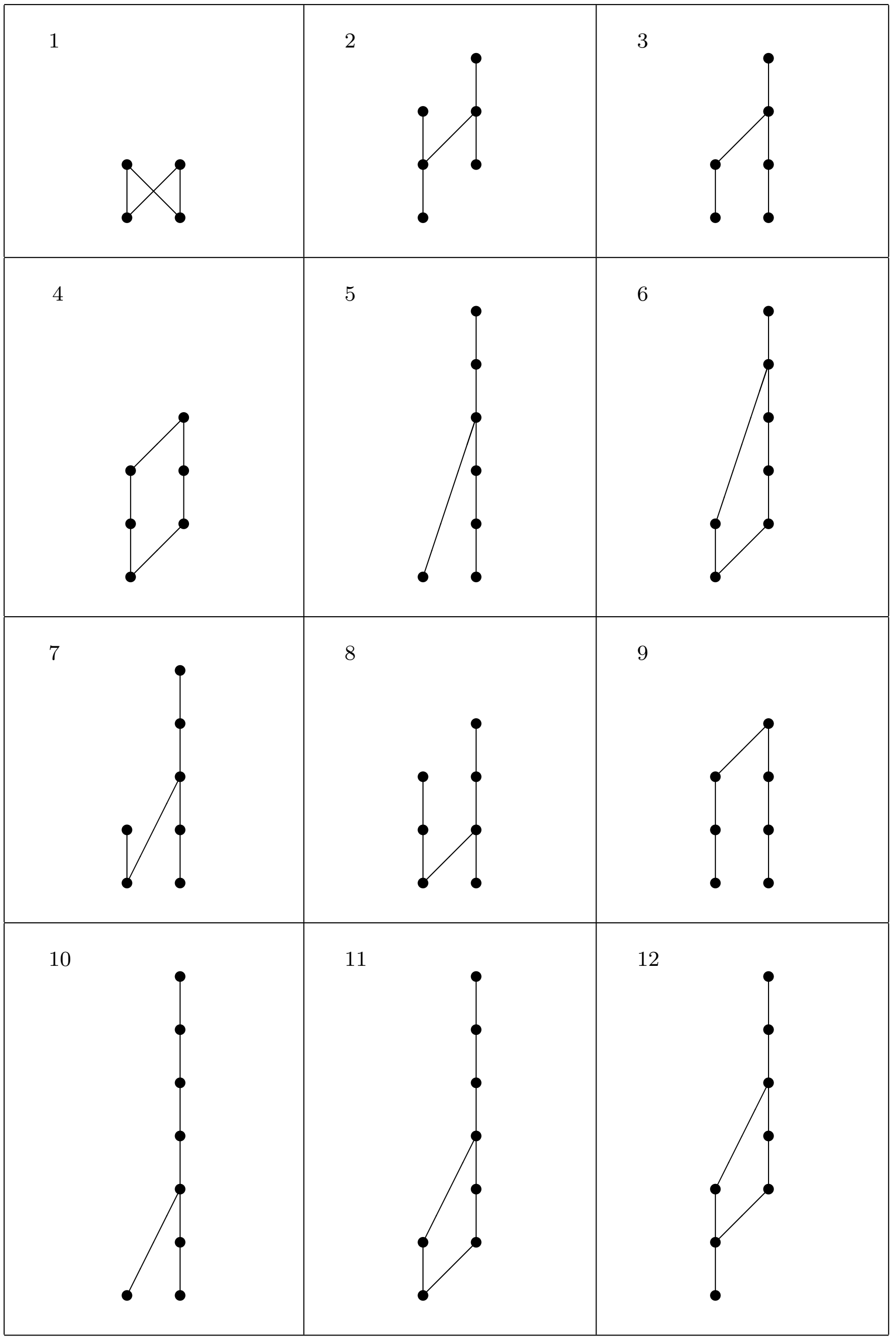
где вертикальные линии являются цепями, а наклонные отрезки не содержат промежуточных точек.

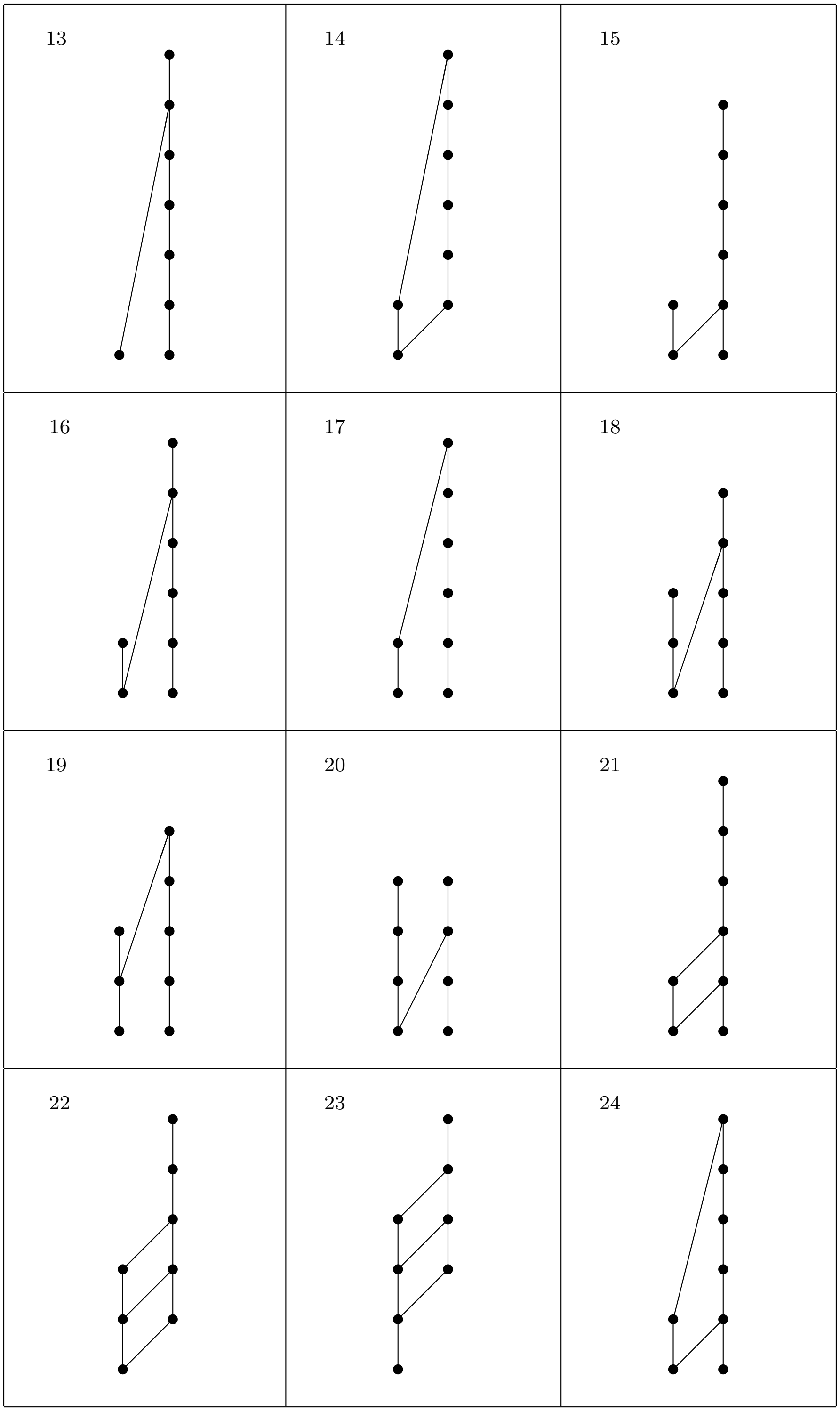
Напомним что ч. у. множество с неположительно определенной формой Титса называется P-критическим, если любое его собственное подмножество имеет положительно определенную форму Титса.

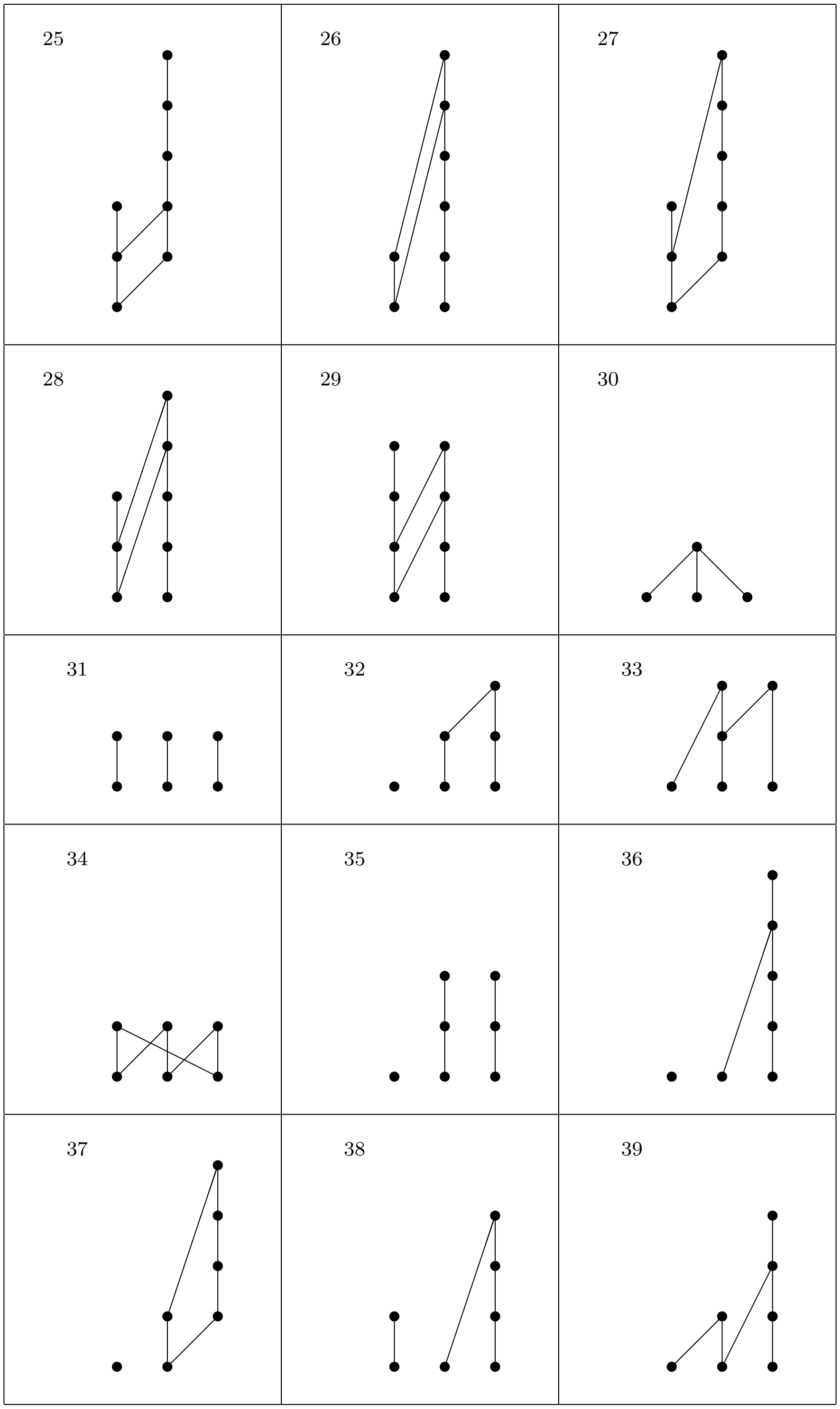
В [24] указана некоторая конечная совокупность $\mathcal{X}$ конечных P-критических ч. у. множеств, такая, что любое бесконечное ч. у. множество, форма Титса которого не является положительной, содержит в качестве подмножества хотя бы одно $X \in \mathcal{X}$. При этом $\mathcal{X}$ (состоящее из 17 ч. у. множеств) содержит не все P-критические множества; кроме того, оказалось, что $\mathcal{X}$ содержит собственное подмножество с теми же свойствами. Анализ этой ситуации привел к понятию слабо P-критических ч. у. множеств. Настоящая статья посвящена изучению таких множеств.

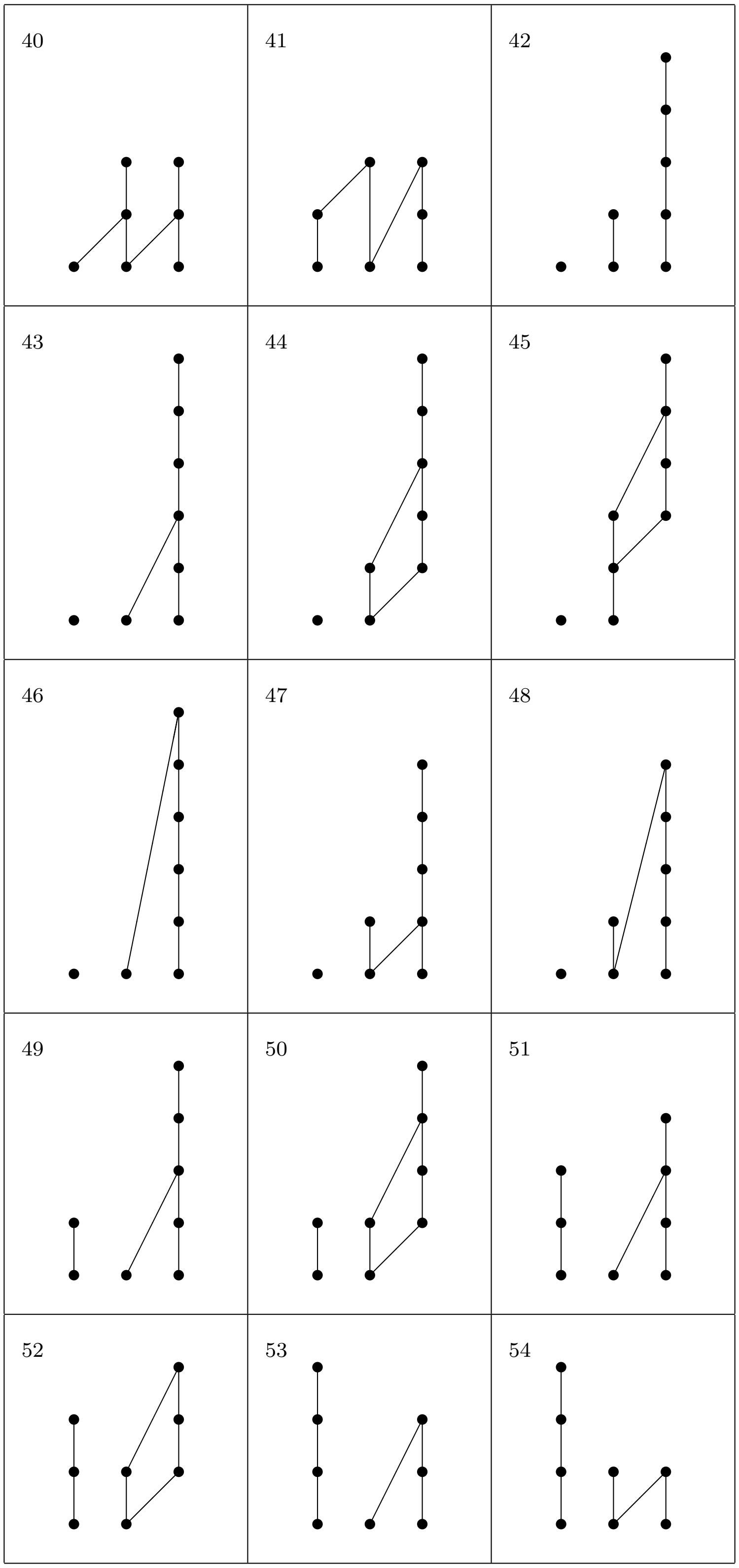
1.2. Описание P-критических ч. у. множеств. В работе [25] доказано, что произвольное P-критическое ч. у. множество является конечным. Все P-критические ч. у. множества описывает следующая теорема.

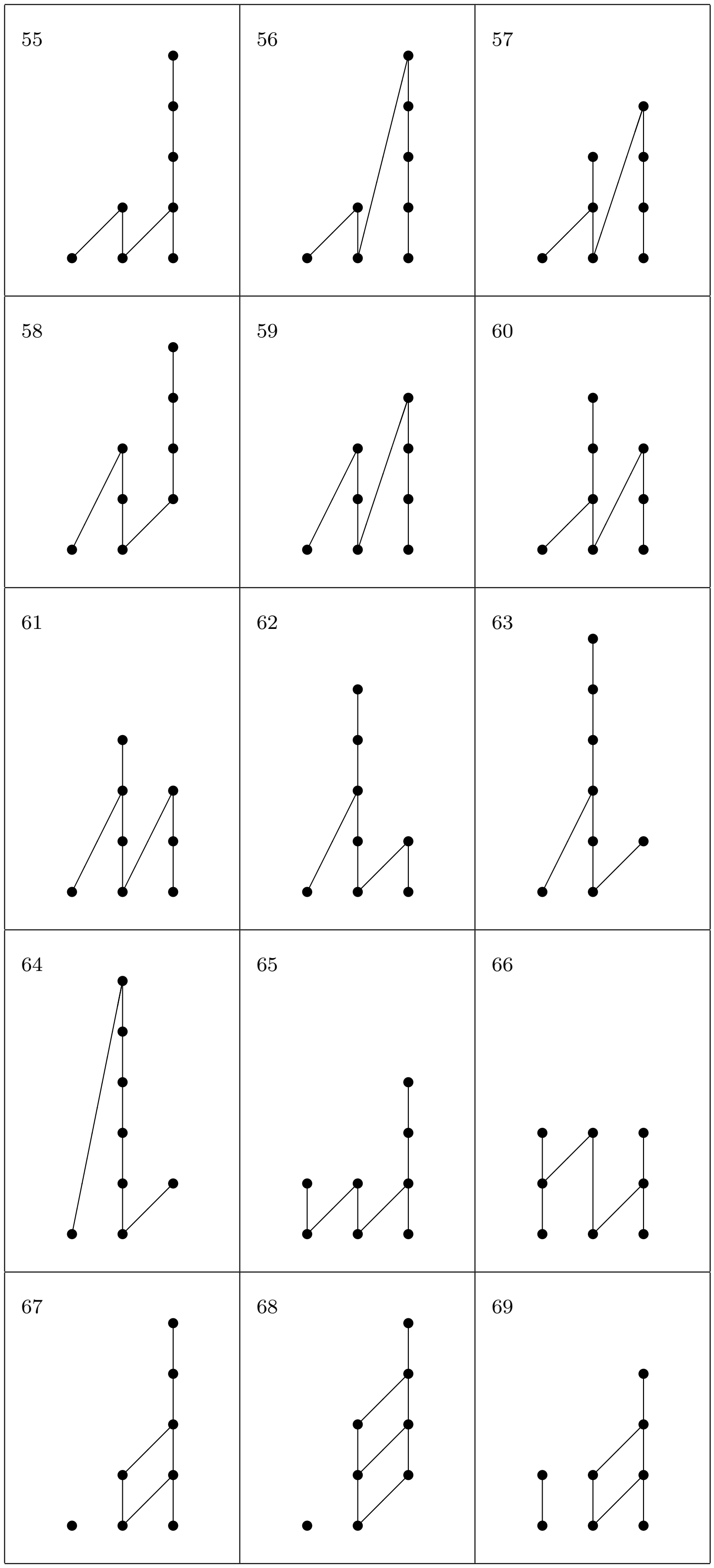
Теорема 2 [26]. *Все (с точностью до изоморфизма и двойственности) P-критические ч. у. множества исчерпываются ч. у. множествами, которые указаны в следущей таблице:*

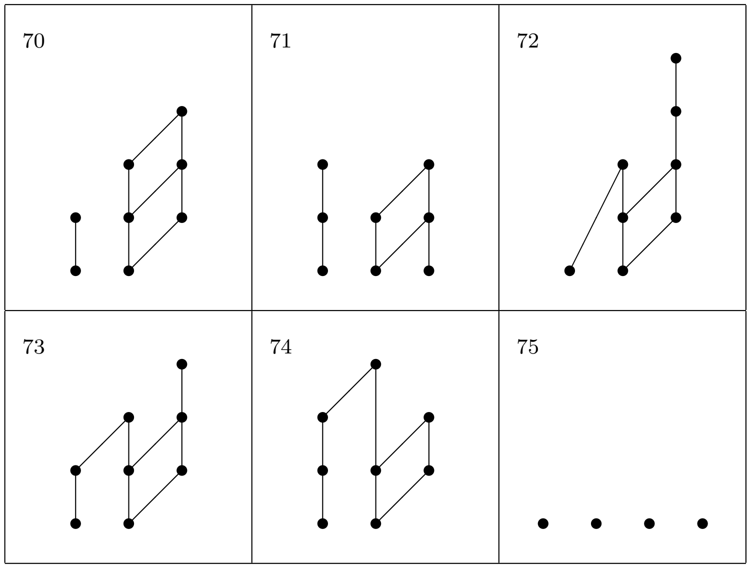

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24


25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39


40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54


55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69



Ч. у. множество, которое указано в таблице под номером i, будем обозначать через K_i, а двойственное к нему — через K_i^{op}.

2. Основной результат. P-критическое ч. у. множество S будем называть слабо P-критическим, если любое бесконечное ч. у. множество $X \supset S$ содержит P-критическое подмножество, которое не изоморфно S (это определение предложил В. М. Бондаренко).

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

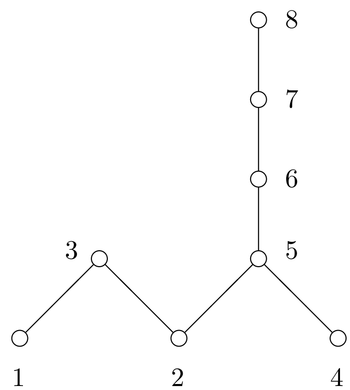
Теорема 3. *Слабые P-критические ч. у. множества существуют.*

Заметим, что в силу теоремы 2 существование P-критических ч. у. множеств, которые не являются слабыми P-критическими, очевидно. Например, таким является P-критическое ч. у. множество $T_{30} = \{1, 2, 3, 4 \,|\, 1 \prec 4, 2 \prec 4, 3 \prec 4\}$, поскольку (содержащее его) бесконечное ч. у. множество T, которое получается из T_{30} заменой элемента 4 на бесконечное линейно упорядоченное множество $4 \prec 5 \prec 6 \prec \ldots$, не содержит, очевидно, P-критических подмножеств, не изоморфных T_{30}.

Перейдем к доказательству теоремы.

Шириной ч. у. множества S называется максимальное число его попарно несравнимых элементов. Подмножество X ч. у. множества S будем называть нижним (соответственно верхним), если $x \in X$ всякий раз, когда $x < y$ (соответственно $x > y$) и $y \in X$. Само множество S является, очевидно, как нижним подмножеством, так и верхним. Будем счититать, что пустое подмножество также является нижним и верхним.

Рассмотрим следущее ч. у. множество R :



Покажем, что это ч. у. множество является слабым P-критическим.

Для этого нам понадобятся следующие леммы, которые легко доказываются простым перебором всех возможных случаев.

Лемма 1. *Нижние подмножества ширины $w < 3$ ч. у. множества R исчерпываются следующими множествами:*

$U_1 = \varnothing,\ U_2 = \{1\},\ U_3 = \{2\},\ \ U_4 = \{4\},\ U_5 = \{1,2\},$

$U_6 = \{1,4\},\ U_7 = \{2,4\},\ U_8 = \{1,2,3\},\ U_9 = \{2,4,5\},$

$U_{10} = \{2,4,5,6\},\ U_{11} = \{2,4,5,6,7\},\ U_{12} = \{2,4,5,6,7,8\}.$

Лемма 2. *Верхние подмножества ширины $w < 3$ ч. у. множества R исчерпываются следующими множествами:*

$L_1 = \varnothing,\ L_2 = \{3\},\ L_3 = \{8\},\ L_4 = \{3,8\},\ L_5 = \{1,3\},\ L_6 = \{7,8\},$

$L_7 = \{3,7,8\},\ L_8 = \{6,7,8\},\ L_9 = \{3,6,7,8\},\ L_{10} = \{5,6,7,8\},$

$L_{11} = \{3,5,6,7,8\},\ L_{12} = \{2,3,5,6,7,8\},\ L_{13} = \{4,5,6,7,8\},$

$L_{14} = \{1,2,3,5,6,7,8\}, L_{15} = \{1,3,4,5,6,7,8\},\ L_{16} = \{2,3,4,5,6,7,8\}.$

Идея доказательства теоремы 3 состоит в следующем.

Пусть T — бесконечное ч. у. множество, содержащее множество S. Поскольку для каждого элемента $x \in T$ ч. у. множество $\{x\}^< = \{y \in T \,|\, y < x\}$ является нижним, а ч. у. множество $\{x\}^> = \{y \in T \,|\, y > x\}$ — верхним, в S существуют нижнее P и верхнее Q подмножества такие, что для некоторого бесконечного подмножества X в $\overline{S} = T \setminus S$ выполняется условие $\{x\}^< = P$ и $\{x\}^> = Q$ для любого $x \in X$. Так как можно считать, что ширина ч. у. множества T меньше 4 (иначе, X содержит P-критическое подмножество, изоморфное K_{75}), T содержит бесконечную цепь (линейно упорядоченное множество). Будем считать, что само T является цепью.

Итак, достаточно показать, что для каждой тройки P, Q, C, состоящей из нижнего подмножества $P \subseteq R$, верхнего $Q \subseteq R$ и бесконечной цепи C, ч. у. множество $\overline{R} = \overline{R}(P,Q,C) = R \cup C$ $(R \cap C = \varnothing)$, где $\{c\}^< = P$ и $\{c\}^> = Q$ для любого $c \in C$, содержит P-критическое ч. у. множество, не изоморфное R. При этом если $w(P) = 3$ или $w(Q) = 3$, то $\overline{R}$ содержит P-критическое подмножество, изоморфное K_{30} или K_{30}^{op}. А если $w(P) < 3$ и $w(Q) < 3$, то нужно рассмотреть все случаи, когда $P = U_i$ и $Q = L_j$ (см. леммы 1 и 2); для фиксированных i и j этот случай будем обозначать через $(i.j)$.

Отметим, что случаи, когда $U_i \cap L_j \neq \varnothing$, не рассматриваются, так как они невозможны (в противном случае для $x \in U_i \cap L_j$ и $c \in C$ имеем $x < c < x$). По этой же причине невозможны случаи $(i.j)$, когда U_i и L_j содержат пару несравнимых элементов x и y ($x \in \in U_i, y \in L_j$).

Рассмотрим остальные случаи $(i.j)$.

В случаях (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) подмножество, состоящее из элементов $1, 2, 4$ и фиксированного элемента $c \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{75}.

В случае (1.5) подмножество, состоящее из элементов $1, 2, 3, 4, 5$ и фиксированных элементов $c_1, c_2 \in C (c_1 \neq c_2)$, изоморфно P-критическому множеству K_{57}.

В случае (1.12) подмножество, состоящее из элементов $1, 2, 3, 5$ и фиксированных (попарно различных) элементов $c_1, c_2, c_3, c_4 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{15}^{op}.

В случае (1.13) подмножество, состоящее из элементов $1, 2, 3, 4, 5$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{56}.

В случае (2.1) подмножество, состоящее из элементов $1, 2, 3, 4$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{42}.

В случае (2.2) подмножество, состоящее из элементов $2, 3, 4, 5$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{56}.

В случаях (3.1), (3.3), (3.6), (3.8) подмножество, состоящее из элементов $2, 3, 5$ и фиксированного элемента $c \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{30}^{op}.

В случаях (3.2), (3.4), (3.7) подмножество, состоящее из элементов $2, 5, 6$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{17}^{op}.

В случаях (3.9), (3.10), (3.11) подмножество, состоящее из элементов $4, 6, 7$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{13}.

В случае (4.1) подмножество, состоящее из элементов $4, 5, 6, 7$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_9^{op}.

В случае (4.3) подмножество, состоящее из элементов $4, 5, 8$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{14}.

В случае (4.6) подмножество, состоящее из элементов $4, 5, 7$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{14}.

В случае (4.8) подмножество, состоящее из элементов $4, 5, 6$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{14}.

В случае (4.10) подмножество, состоящее из элементов $4, 5, 6$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{13}.

В случае (5.1) подмножество, состоящее из элементов $1, 2, 3$ и фиксированного элемента $c \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_1.

В случае (5.2) подмножество, состоящее из элементов $2, 3, 5, 6, 7$ и фиксированных элементов $c_1, c_2 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_9^{op}.

В случае (6.1) подмножество, состоящее из элементов $1, 2, 3, 4, 5$ и фиксированного элемента $c \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{34}.

В случаях (7.1), (7.3), (7.6), (7.8) подмножество, состоящее из элементов $2, 4, 5$ и фиксированного элемента $c \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_1.

В случае (7.10) подмножество, состоящее из элементов $2, 3, 4, 5$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{15}.

В случае (8.1) подмножество, состоящее из элементов $2, 3, 5, 6, 7$ и фиксированных элементов $c_1, c_2 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_9^{op}.

В случаях (9.1), (9.3), (9.6), (9.8), (10.1), (10.3), (10.6), (11.1), (11.3), (12.1) подмножество, состоящее из элементов $2, 3, 4, 5$ и фиксированных элементов $c_1, c_2, c_3, c_4 \in C$, изоморфно P-критическому множеству K_{15}.

Теорема 3 доказана.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1985. — **21**, № 5. — С. 776 – 788.
2. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 104 – 114.
3. *Кочубей А. Н.* Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p-адическими квадратичными формами // Изв. РАН. — 1998. — **62**, № 6. — С. 103 – 124.
4. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Represent. Algebras. — Ottawa, Ontario: Carleton Univ., 1974. — Paper № 5.
5. *Bongartz K.* Algebras and quadratic forms // J. London Math. Soc. — 1983. — **28**, № 3. — P. 461 – 469.
6. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic forms // Lect. Notes Math. — 1984. — **1099**. — 376 p.
7. *Corovei I.* Some functional equations connected with quadratic forms // An. Numér. Théor. Approxim. — 1990. — **19**, № 2. — P. 123 – 127.
8. *Crandall M. G.* Semidifferentials, quadratic forms and fully nonlinear elliptic equations of second order // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéare. — 1989. — **6**, № 6. — P. 419 – 435.
9. *Gregory J.* Generalized Fredholm quadratic forms and integral differential equations of the second kind // J. Math. Anal. and Appl. — 1970. — **70**, № 1. — P. 120 – 130.
10. *Al-Naggar I., Pearson D. B.* Quadratic forms and solutions of the Schrödinger equation // J. Phys. A. — 1996. — **29**, № 20. — P. 6581 – 6584.
11. *Kohnen W.* Special Siegel modular forms and singular series polynomials of quadratic forms // Contemp. Math. — 2004. — **344**. — P. 229 – 236.
12. *Bevelacqua A. J.* Four dimensional quadratic forms over $F(X)$ where $I_t^3 F(X) = 0$ and a failure of the strong Hasse principle // Communs Algebra. — 2004. — **32**, № 3. — P. 855 – 877.
13. *Teksan A.* Representations of positive integers by a direct sum of quadratic forms // Results Math. — 2004. — **46**. — P. 146 – 163.
14. *Jaschke S., Keúppelberg C., Lindner A.* Asymptotic behavior of tails and quantiles of quadratic forms of Gaussian vectors // J. Multivar. Anal. — 2004. — **88**, № 2. — P. 252 – 273.
15. *Li M., Dezhong C.* Systems of Hermitian quadratic forms // Can. Math. Bull. — 2004. — **47**, № 1. — P. 73 – 81.
16. *Chan W. K., Peters M.* Quaternary quadratic forms and Hilbert modular surfaces // Contemp. Math. — 2004. — **344**. — P. 85 – 97.
17. *Fang F., Pan J.* Secondary Brown — Kervaire quadratic forms and π-manifolds // Forum Math. — 2004. — **16**, № 4. — P. 459 – 481.
18. *Alsina M., Bayer P.* Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves // CRN Monogr. Ser. — 2004. — **22.** — 196 p.
19. *Ateiwi A. M.* A study of dichotomy of linear systems of difference equations using the quadratic forms // J. Fract. Calc. — 2004. — **25**. — P. 93 – 100.
20. *Shimura G.* Arithmetic and analytic theories of quadratic forms and Clifford groups // Math. Surv. and Monogr. — 2004. — **109**. — 275 p.
21. *Hoffmann D. W., Lanhribi A.* Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2 // Trans. Amer. Math. Soc. — 2004. — № 10. — P. 4019 – 4052.

22. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. — 1974. — **8**. — С. 34 – 42.

23. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О квадратичной форме Титса для бесконечных частично упорядоченных множеств // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. — 2002. — Вип. 7. — С. 3 – 8.

24. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 1. — С. 3 – 14.

25. *Bondarenko V. M., Polishchuk A. M.* On finiteness of critical Tits forms of posets // Proc. Fifth Int. Conf. „Symmetry in Nonlinear Math. Phys." — Kiev: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2004. — Pt 2. — P. 1061 – 1963.

26. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 3. — С. 18 – 58.

Получено 29.10.07