УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСАМИ

Н. В. Скрипник

Одес. нац. ун-т
Украина, 27026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: talie@ukr.net

For fussy differential equations with impulsive effects occurring at fixed times, we substantiate algorithms for partial and complete averaging.

Для нечітких диференціальних рівнянь з імпульсами у фіксовані моменти часу обґрунтовано схеми часткового та повного усереднення.

С 1965 г. после работы L. A. Zadeh [1] началось развитие теории нечетких множеств. В 1983 г. M. L. Puri, D. A. Ralescu [2] ввели понятие H-производной и интеграла для нечетких многозначных отображений, при этом использовался подход M. Hukuhara для α-срезок нечетких многозначных отображений. В 1985 г. O. Kaleva [3] рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения и доказал теорему существования и единственности решения задачи Коши для случая, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица. В дальнейшем нечеткие дифференциальные уравнения рассматривались в работах [4–7].

Пусть $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Метрика в этом пространстве определяется с помощью расстояния по Хаусдорфу

$$h(F,G) = \max\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}||f-g||, \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}||f-g||\},$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, которые удовлетворяет следующим условиям:

1) u нормально, т. е. существует вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(x_0) = 1$;

2) u нечетко выпукло, т. е. для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$;

3) u полунепрерывно сверху;

4) замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}$ компактно.

α-Срезкой отображения $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ назовем множество $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}$ при $0 < \alpha \leq 1$, $[u]^0$ — замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}$.

Теорема 1 [8]. *Если $u \in E^n$, то:*

1) $[u]^\alpha \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ для всех $0 \leq \alpha \leq 1$;

2) $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ для всех $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

3) если $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ — неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[u]^\alpha = \bigcap_{k\geq 1} [u]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \le \alpha \le 1\}$ — *семейство подмножеств* $\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих условиям 1–3, то существует* $u \in E^n$ *такое, что* $[u]^\alpha = A^\alpha$ *для* $0 < \alpha \le 1$ *и*

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\le 1} A^\alpha} \subset A^0.$$

Определим в пространстве E^n метрику $D : E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, положив

$$D(u, v) = \sup_{0\le\alpha\le 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Лема 1. *Пусть* $x_j, y_j \in E^n$, $j = \overline{1,p}$. *Тогда* $D\left(\sum\limits_{j=1}^p x_j, \sum\limits_{j=1}^p y_j\right) \le \sum\limits_{j=1}^p D(x_j, y_j)$.

Доказательство непосредственно следует из определения метрики и свойств расстояния по Хаусдорфу.

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$.

Определение 1 [8]. *Отображение* $F : I \to E^n$ *называется сильноизмеримым на* I, *если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *многозначное отображение* $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ *измеримо.*

Определение 2 [8]. *Отображение* $F : I \to E^n$ *называется интегрально ограниченным на* I, *если существует интегрируемая по Лебегу функция* $k(t)$ *такая, что* $\|x\| \le k(t)$ *для всех* $x \in F_0(t)$.

Определение 3 [8]. *Интегралом от отображения* $F : I \to E^n$ *по множеству* I *называется элемент* $G \in E^n$ *такой, что* $[G]^\alpha = \int_I F_\alpha(t)dt$ *для всех* $0 < \alpha \le 1$, *где интеграл от многозначного отображения* $F_\alpha(t)$ *понимается в смысле Ауманна [9].*

Теорема 2 [8]. *Если отображение* $F : I \to E^n$ *сильноизмеримо и интегрально ограничено, то* F *интегрируемо на* I.

Теорема 3 [8]. *Пусть* $F, G : I \to E^n$ *интегрируемы на* I *и* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1) $\int_I (F(t) + G(t))\, dt = \int_I F(t)\, dt + \int_I G(t)\, dt$;

2) $\int_I \lambda F(t)\, dt = \lambda \int_I F(t)\, dt$;

3) функция $D(F(t), G(t))$ *интегрируема по Лебегу на* I;

4) $D\left(\int_I F(t)dt, \int_I G(t)dt\right) \le \int_I D(F(t), G(t))dt$.

Определение 4 [8]. *Отображение* $F : I \to E^n$ *называется дифференцируемым в точке* $t_0 \in I$, *если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *многозначное отображение* $F_\alpha(t)$ *дифференцируемо по Хукухаре [10] в точке* t_0, *его производная равна* $DF_\alpha(t_0)$ *и семейство множеств* $\{DF_\alpha(t_0),\ \alpha \in [0, 1]\}$ *определяет элемент* $F'(t_0) \in E^n$.

Если отображение $F : I \to E^n$ *дифференцируемо в точке* $t_0 \in I$, *то* $F'(t_0)$ *называют нечеткой производной* $F(t)$ *в точке* t_0.

Теорема 4 [8]. *Пусть отображение* $F : I \to E^n$ *дифференцируемо и его нечеткая производная* $F' : I \to E^n$ *интегрируема на* I. *Тогда для любого* $t \in I$ *имеем*

$$F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^{t} F'(s)\, ds.$$

Определение 5 [8]. *Отображение $F : I \to E^n$ называется слабонепрерывным в точке $t_0 \in I$, если для любого фиксированного $\alpha \in [0,1]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ такое, что $h(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)) < \varepsilon$ для всех $t \in I$ таких, что $|t - t_0| < \delta(\varepsilon,\alpha)$.*

Определение 6. *Отображение $F : I \times Q \to E^n$, $Q \subset E^n$, называется равномерно непрерывным по x равномерно относительно t, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $D(F(t,x_1), F(t,x_2)) < \varepsilon$ для всех $x_1, x_2 \in Q$ таких, что $D(x_1,x_2) < \delta$, и для всех $t \in I$.*

Определение 7. *Отображения $F_k : Q \to E^n$ называются равностепенно непрерывными, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $D(F_k(x_1), F_k(x_2)) < \varepsilon$ для всех $x_1, x_2 \in Q$ таких, что $D(x_1,x_2) < \delta$, и для всех k.*

Рассмотрим нечеткое импульсное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = F(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x), \tag{2}$$

где отображение $F : I \times E^n \to E^n$, импульсные функции $I_i : E^n \to E^n$, $i = \overline{1,m}$, начальное условие $t_0 \in I$, $x_0 \in E^n$, моменты импульсов $\tau_i \in I$, $i = \overline{1,m}$, занумерованы в возрастающем порядке.

Определение 8. *Отображение $x : I \to E^n$ называется решением задачи (1), (2), если на промежутках между импульсами оно слабонепрерывно и для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = x(\tau_i + 0) + \int\limits_{\tau_i}^{t} F(s, x(s))\, ds,$$

а в точках импульса $t = \tau_i$ — условию скачка (2).

Рассмотрим обоснование схемы частичного усреднения для нечетких дифференциальных уравнений с импульсами в фиксированные моменты времени:

$$x' = \varepsilon F(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = \varepsilon I_i(x), \tag{4}$$

где отображения $F : \mathbb{R}_+ \times E^n \to E^n$, $I_i : E^n \to E^n$, начальный вектор $x_0 \in E^n$, моменты импульсов $\tau_i \in \mathbb{R}_+$ занумерованы множеством натуральных чисел в возрастающем порядке, т. е. $\tau_i < \tau_{i+1}$ для любого натурального i.

Системе (3), (4) поставим в соответствие частично усредненную систему

$$y' = \varepsilon \overline{F}(t,y), \quad t \neq \sigma_j, \quad y(0) = x_0, \tag{5}$$

$$\Delta y|_{t=\sigma_j} = \varepsilon \overline{I}_j(y), \tag{6}$$

где отображения $\overline{F} : \mathbb{R}_+ \times E^n \to E^n, \overline{I}_j : E^n \to E^n$ таковы, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int_0^T F(t,x)dt + \sum_{0\le\tau_i<T} I_i(x), \int_0^T \overline{F}(t,x)dt + \sum_{0\le\sigma_j<T} \overline{I}_j(x)\right) = 0, \tag{7}$$

моменты импульсов $\sigma_j \in \mathbb{R}_+$ занумерованы множеством натуральных чисел в возрастающем порядке, т. е. $\sigma_j < \sigma_{j+1}$ для любого натурального j.

Справедлива следующая теорема, устанавливающая близость решений задач (3), (4) и (5), (6) на конечном промежутке.

Теорема 5. *Пусть в области $G = \{(t,x) : t \ge 0, x \in Q \subset E^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) отображение $F(t,x)$ измеримо по t при каждом фиксированном x и существуют функция $k(t) \ge 0$, постоянная $k_0 \ge 0$ и неубывающая функция $\psi(u) \ge 0$, $\lim_{u\downarrow 0}\psi(u) = 0$, такие, что

$$D(F(t,x_1), F(t,x_2)) \le k(t)\psi(D(x_1,x_2)),$$

и $\int_{t_1}^{t_2} k(t)dt \le k_0(t_2 - t_1)$ на любом конечном промежутке $[t_1, t_2]$;

2) отображения $I_i(x)$ таковы, что

$$D(I_i(x_1), I_i(x_2)) \le k_0\psi(D(x_1,x_2));$$

3) отображение $\overline{F}(t,x)$ измеримо по t при каждом фиксированном x и удовлетворяет по x условию Липшица с ограниченной суммируемой функцией $\lambda(t) \ge 0$, т. е.

$$D(\overline{F}(t,x_1), \overline{F}(t,x_2)) \le \lambda(t)D(x_1,x_2), \quad \lambda(t) \le \lambda;$$

4) отображения $\overline{I}_j(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ :

$$D(\overline{I}_j(x_1), \overline{I}_j(x_2)) \le \lambda D(x_1,x_2));$$

5) отображения $F(t,x)$ и $\overline{F}(t,x)$ интегрально ограничены, отображения $I_i(x)$ и $\overline{I}_j(x)$ равномерно ограничены, т. е. существуют суммируемая функция $M(t) \ge 0$ и постоянная $M_0 \ge 0$ такие, что

$$D(F(t,x),\hat{0}) \le M(t), \quad D(\overline{F}(t,x),\hat{0}) \le M(t), \quad D(I_i(x),\hat{0}) \le M_0,$$

$$D(\overline{I}_j(x),\hat{0}) \le M_0, \quad \hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n\backslash 0, \end{cases}$$

и $\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \le M_0(t_2 - t_1)$ на любом конечном промежутке $[t_1, t_2]$;

6) равномерно относительно x в области Q существует предел (7) и постоянная $0 \le d < \infty$ такая, что

$$\frac{1}{T} i(t, t+T) \le d, \quad \frac{1}{T} j(t, t+T) \le d,$$

где $i(t, t+T)$ и $j(t, t+T)$ — количество точек последовательностей $\{\tau_i\}$ и $\{\sigma_j\}$ соответственно на промежутке $[t, t+T]$;

7) решение $y(t)$, $y(0) = x_0 \in Q' \subset Q$ системы (5), (6) при $t \geq 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \theta]$ принадлежит области Q вместе с некоторой ρ-окрестностью.

Тогда для любых сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \theta]$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на отрезке $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D(x(t), y(t)) \leq \eta,$$

где $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ — решения систем (3), (4) и (5), (6) соответственно.

Доказательство. Нечеткие дифференциальные уравнения (3), (4) и (5), (6) эквивалентны соответственно интегральным уравнениям

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t F(s, x(s))ds + \varepsilon \sum_{0 \leq \tau_i < t} I_i(x(\tau_i)), \tag{8}$$

$$y(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \overline{F}(s, y(s))\, ds + \varepsilon \sum_{0 \leq \sigma_j < t} \overline{I}_j(y(\sigma_j)). \tag{9}$$

Оценим $D(x(t), y(t))$. В силу соотношений (8) и (9) имеем

$$D(x(t), y(t)) =$$

$$= D\left(x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t F(s, x(s))ds + \varepsilon \sum_{0 \leq \tau_i < t} I_i(x(\tau_i)), x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \overline{F}(s, y(s))ds + \varepsilon \sum_{0 \leq \sigma_j < t} \overline{I}_j(y(\sigma_j))\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon D\left(\int\limits_0^t F(s, x(s))ds + \sum_{0 \leq \tau_i < t} I_i(x(\tau_i)), \int\limits_0^t \overline{F}(s, x(s))ds + \sum_{0 \leq \sigma_j < t} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right) +$$

$$+\varepsilon D\left(\int\limits_0^t \overline{F}(s, x(s))ds + \sum_{0 \leq \sigma_j < t} \overline{I}_j(x(\sigma_j)), \int\limits_0^t \overline{F}(s, y(s))ds + \sum_{0 \leq \sigma_j < t} \overline{I}_j(y(\sigma_j))\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon D\left(\int\limits_0^t F(s, x(s))ds + \sum_{0 \leq \tau_i < t} I_i(x(\tau_i)), \int\limits_0^t \overline{F}(s, x(s))ds + \sum_{0 \leq \sigma_j < t} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right) +$$

$$+\varepsilon\lambda \int\limits_0^t D(x(s), y(s))ds + \varepsilon\lambda \sum_{0 \leq \sigma_j < t} D(x(\sigma_j), y(\sigma_j)). \tag{10}$$

Отдельно рассмотрим первое слагаемое. Выполним разбиение отрезка $[0, L\varepsilon^{-1}]$ с шагом $\dfrac{L}{\varepsilon m}$, где m — целое число и обозначим $t_i = \dfrac{iL}{\varepsilon m}$, $i = \overline{0, m}$.

Пусть $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Тогда

$$D\left(\int\limits_0^t F(s,x(s))ds + \sum_{0\le\tau_i<t} I_i(x(\tau_i)), \int\limits_0^t \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{0\le\sigma_j<t} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right) =$$

$$= D\left(\sum_{p=0}^{k-1}\left[\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,x(s))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(\tau_i))\right] + \int\limits_{t_k}^{t} F(s,x(s))ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(x(\tau_i)),\right.$$

$$\left.\sum_{p=0}^{k-1}\left[\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right] + \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right) =$$

$$= D\left(\sum_{p=0}^{k-1} F^p + F^k, \sum_{p=0}^{k-1} \overline{F}^p + \overline{F}^k\right) \le \sum_{p=0}^{k-1} D(F^p, \overline{F}^p) + D(F^k, \overline{F}^k), \tag{11}$$

где

$$F^p = \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,x(s))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(\tau_i)), \overline{F}^p = \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(\sigma_j)),$$

$$p = \overline{0, k-1},$$

$$F^k = \int\limits_{t_k}^{t} F(s,x(s))ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(x(\tau_i)), \quad \overline{F}^k = \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \overline{I}_j(x(\sigma_j)).$$

Оценим $D(F^p, \overline{F}^p)$:

$$D(F^p, \overline{F}^p) \le D\left(\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,x(s))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(\tau_i)), \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(t_p))\right) +$$

$$+D\left(\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(t_p)), \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(t_p))\right) +$$

$$+D\left(\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(t_p)), \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right) \le$$

$$\le \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} k(s)\psi(D(x(s),x(t_p)))ds + k_0 \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} \psi(D(x(\tau_i),x(t_p)))+$$

$$+D\left(\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(t_p)), \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(t_p))\right) +$$

$$+\lambda \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} D(x(s),x(t_p))ds + \lambda \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} D(x(\sigma_j),x(t_p)). \qquad (12)$$

В силу условия 6 теоремы существует монотонно убывающая функция $\vartheta(t)$, стремящаяся к 0 при $t\to\infty$, такая, что во всей области Q выполняется неравенство

$$D\left(\int\limits_0^t F(s,x)ds + \sum_{0\le\tau_i<t} I_i(x), \int\limits_0^t \overline{F}(s,x)ds + \sum_{0\le\sigma_j<t} \overline{I}_j(x)\right) \le t\vartheta(t).$$

Таким образом,

$$D\left(\int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} F(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(t_p)), \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(t_p))ds + \sum_{t_p\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(t_p))\right) \le$$

$$\le D\left(\int\limits_0^{t_{p+1}} F(s,x(t_p))ds + \sum_{0\le\tau_i<t_{p+1}} I_i(x(t_p)), \int\limits_0^{t_{p+1}} \overline{F}(s,x(t_p))ds + \sum_{0\le\sigma_j<t_{p+1}} \overline{I}_j(x(t_p))\right) +$$

$$+D\left(\int\limits_0^{t_p} F(s,x(t_p))ds + \sum_{0\le\tau_i<t_p} I_i(x(t_p)), \int\limits_0^{t_p} \overline{F}(s,x(t_p))ds + \sum_{0\le\sigma_j<t_p} \overline{I}_j(x(t_p))\right) \le$$

$$\le t_{p+1}\vartheta(t_{p+1}) + t_p\vartheta(t_p) \le 2\frac{L}{\varepsilon}\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right).$$

Кроме того, в силу условия 5 теоремы и равенства (8) имеем

$$D(x(s),x(t_p)) \le D\left(x(t_p) + \varepsilon\int\limits_{t_p}^{s} F(\tau,x(\tau))d\tau + \varepsilon\sum_{t_p\le\tau_i<s} I_i(x(\tau_i)), x(t_p)\right) \le$$

$$\le \varepsilon\left[M_0(s-t_p) + d\frac{L}{\varepsilon m}M_0\right] \le \frac{LM_0(1+d)}{m}. \qquad (13)$$

Тогда, учитывая (12), получаем

$$D(F^p,\overline{F}^p) \le \frac{k_0L(1+d)}{\varepsilon m}\psi\left(\frac{LM_0(1+d)}{m}\right) + 2\frac{L}{\varepsilon}\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \frac{\lambda L^2M_0(1+d)^2}{\varepsilon m^2}. \qquad (14)$$

Оценим

$$D(F^k,\overline{F}^k) = D\left(\int\limits_{t_k}^{t} F(s,x(s))ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} I_i(x(\tau_i)), \int\limits_{t_k}^{t} \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{t_k\le\sigma_j<t} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right) \le$$

$$\le \int\limits_{t_k}^{t} D(F(s,x(s)),\hat{0})ds + \sum_{t_k\le\tau_i<t} D(I_i(x(\tau_i)),\hat{0}) + \int\limits_{t_k}^{t} D(\overline{F}(s,x(s)),\hat{0})ds+$$

$$+ \sum_{t_k\le\sigma_j<t} D(\overline{I}_j(x(\sigma_j)),\hat{0}) \le \frac{2LM_0(1+d)}{\varepsilon m}. \tag{15}$$

Из (11), (14) и (15) находим

$$\varepsilon D\left(\int\limits_{0}^{t} F(s,x(s))ds + \sum_{0\le\tau_i<t} I_i(x(\tau_i)), \int\limits_{0}^{t} \overline{F}(s,x(s))ds + \sum_{0\le\sigma_j<t} \overline{I}_j(x(\sigma_j))\right) \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{p=0}^{k-1}\left[\frac{k_0L(1+d)}{\varepsilon m}\,\psi\left(\frac{LM_0(1+d)}{m}\right) + 2\frac{L}{\varepsilon}\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \frac{\lambda L^2M_0(1+d)^2}{\varepsilon m^2}\right] + \frac{2LM_0(1+d)}{m} \le$$

$$\le k_0L(1+d)\psi\left(\frac{LM_0(1+d)}{m}\right) + 2Lm\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m} \equiv \gamma(m,\varepsilon).$$

В силу (10) имеем

$$D(x(t),y(t)) \le \varepsilon\lambda\int\limits_{0}^{t} D(x(s),y(s))ds + \varepsilon\lambda\sum_{0\le\sigma_j<t} D(x(\sigma_j,y(\sigma_j)) + \gamma(m,\varepsilon),$$

откуда, используя неравенство Гронуолла – Беллмана, получаем

$$D(x(t),y(t)) \le \gamma(m,\varepsilon)(1+\varepsilon\lambda)^{dt}e^{\varepsilon\lambda t} \le \gamma(t,\varepsilon)e^{\varepsilon\lambda dt}e^{\varepsilon\lambda t} \le \gamma(m,\varepsilon)e^{(1+d)L}. \tag{16}$$

Число m_0 выберем из условия

$$k_0L(1+d)\psi\left(\frac{M_0(1+d)}{m}\right) + \frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m} < \frac{\eta}{2}e^{-(1+d)L},$$

затем при фиксированном m_0 выберем ε_0 из условия

$$2Lm_0\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) < \frac{\eta}{2}\,e^{-(1+d)L}.$$

Таким образом, $D(x(t),y(t)) < \eta$ при условии, что $x(\cdot)$ на отрезке $[0,L\varepsilon^{-1}]$ не выходит за пределы области Q.

Покажем, что $x(\cdot)$ принадлежит области Q на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$. Действительно, поскольку начальное значение x_0 принадлежит int_Q, на некотором отрезке $[0, t^0]$ решение $x(\cdot)$ принадлежит области Q. Выберем ε_0 и m_0 так, чтобы

$$\gamma(m,\varepsilon) < e^{-(1+d)L} \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\eta}{2}\right\}.$$

Тогда на отрезке $[0, t^0]$, где $x(\cdot) \in Q$, имеем

$$D(x(t), y(t)) < \frac{\rho}{2}.$$

Если предположить, что $t^0 < L\varepsilon^{-1}$, то на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ в силу слабой непрерывности решений $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ найдется точка t', в которой будет выполняться неравенство

$$\frac{\rho}{2} < D(x(t'), y(t')) < \rho.$$

Отсюда следует, что при $t = t'$ решение $x(\cdot)$ не выходит из области Q. Поэтому $t' \in \in [0, t^0]$ и тогда $D(x(t'), y(t')) < \dfrac{\rho}{2}$, т. е. пришли к противоречию. Таким образом, $t^0 \geq \geq L\varepsilon^{-1}$.

Теорема доказана.

Из данной теоремы непосредственно следует такая теорема

Теорема 6. *Пусть в области $G = \{(t,x) : t \geq 0, x \in Q \subset E^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) отображения $F(t,x)$, $\overline{F}(t,x)$ измеримы по t при каждом фиксированном x, ограничены постоянной M и удовлетворяют по x условию Липшица с постоянной λ;

2) отображения $I_i(x)$, $\overline{I}_j(x)$ равномерно ограничены постоянной M и удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ;

3) равномерно относительно x в области Q существует предел (7) и существует постоянная $0 \leq d < \infty$ такая, что

$$\frac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq d, \quad \frac{1}{T}\, j(t, t+T) \leq d,$$

где $i(t, t+T)$ и $j(t, t+T)$ — количество точек последовательностей $\{\tau_i\}$ и $\{\sigma_j\}$ соответственно на промежутке $[t, t+T]$;

4) решение $y(t)$, $y(0) = x_0 \in Q' \subset Q$ системы (5), (6) при $t \geq 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \theta]$ принадлежит области Q вместе с некоторой ρ-окрестностью.

Тогда для любых сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \theta]$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на отрезке $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D(x(t), y(t)) \leq \eta,$$

где $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ — решения систем (3), (4) и (5), (6) соответственно.

В теореме 5 можно ослабить условия на правые части неусредненного уравнения, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть в области* $G = \{(t,x) : t \geq 0, x \in Q \subset E^n\}$ *выполнены условия 3–7 теоремы 2 и:*

1′) отображение $F(t,x)$ *измеримо по* t *при каждом фиксированном* x *и равномерно непрерывно по* x *равномерно относительно* t;

2′) отображения $I_i(x)$ *равностепенно непрерывны.*

Тогда для любых сколь угодно малого $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \theta]$, *что при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *на отрезке* $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D(x(t), y(t)) \leq \eta,$$

где $x(\cdot)$ *и* $y(\cdot)$ — *решения систем (3), (4) и (5), (6) соответственно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5, за исключением того, что при оценивании $D(F^s, \overline{F}^s)$ первое слагаемое оцениваем, используя условия $1'$ и $2'$.

Для произвольного $\eta_1 > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, что при $D(x_1, x_2) < \delta$

$$D(F(t,x_1), F(t,x_2)) < \eta_1 \quad \text{и} \quad D(I_i(x_1), I_i(x_2)) < \eta_1.$$

Выберем $m_0^1 \in \mathbb{N}$ так, что при $m > m_0^1$ выполняется неравенство

$$\frac{LM_0(1+d)}{m} < \delta.$$

Тогда, используя оценку (13), имеем

$$D\left(\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} F(s,x(s))ds + \sum_{t_s \leq \tau_i < t_{s+1}} I_i(x(\tau_i)), \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} F(s,x(t_s))ds + \sum_{t_s \leq \tau_i < t_{s+1}} I_i(x(t_s))\right) <$$

$$< \frac{L}{\varepsilon m}\eta_1 + d\frac{L}{\varepsilon m}\eta_1 = \frac{(1+d)L\eta_1}{\varepsilon m}.$$

В этом случае

$$\gamma(m,\varepsilon) \equiv (1+d)L\eta_1 + 2Lm\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) + \frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m}.$$

Числа η_1 и $m_0 \geq m_0^1$ выберем из условий

$$(1+d)L\eta_1 < \frac{\eta}{3}e^{-(1+d)L}, \qquad \frac{LM_0(1+d)(\lambda L(1+d)+2)}{m} < \frac{\eta}{3}e^{-(1+d)L},$$

затем при фиксированном m_0 выберем ε_0 из условия

$$2Lm_0\vartheta\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) < \frac{\eta}{3}e^{-(1+d)L}.$$

Таким образом, из (16) следует, что $D(x(t), y(t)) < \eta$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть*

$$\overline{F}(t,x) \equiv F_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\int\limits_0^T F(t,x)dt + \sum_{0\le\tau_i<T} I_i(x) \right), \ \overline{I}_i(x) \equiv \{\hat{0}\}.$$

Тогда соотношение (7) выполнено и теоремы 5 – 7 обосновывают схему полного усреднения.

1. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. and Control. — 1965. — № 8. — P. 338 – 353.
2. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1983. — **91**. — P. 552 – 558.
3. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 301 – 317.
4. *Laksmikantham V., Leela S., Vatsala A. S.* Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. — 2003. — **54**. — P. 351 – 360.
5. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. and Appl. — 1986. — **114**, № 2. — P. 409 – 422.
6. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 319 – 330.
7. *Song S. J., Wu C. X.* Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Ibid. — 2000. — **110**. — P. 55 – 67.
8. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — **22**, № 2. — P. 271 – 279.
9. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — № 12. — P. 1 – 12.
10. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205 – 223.

Получено 22.05.07