УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

М. О. Перестюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

С. І. Балога

Ужгород. нац. ун-т
Україна, 88014, Ужгород, вул. Підгірна, 46

We consider existence of asymptotically stable toroidal set for a system of linear differential equations defined on an m-dimensional tore. We establish also conditions for the linear differential system to have an invariant toroidal manifold.

Рассматривается вопрос существования асимптотически устойчивого тороидального множества для системы линейных дифференциальных уравнений, определенных на m-измеримом торе. Установлены также условия, при которых нелинейная система дифференциальных уравнений имеет инвариантное тороидальное многообразие.

Вступ. У теорії багаточастотних коливань виникає ряд питань, пов'язаних із дослідженням інваріантних торів автономних систем диференціальних рівнянь. Одним із них є питання існування і збереження інваріантних торів при малих збуреннях, а також вивчення поведінки розв'язків систем на торах та в їх околах. Поряд із глибокими дослідженнями в даному напрямку [1, 2] існують проблеми, які і сьогодні не вдається повністю вирішити. Цю статтю присвячено дослідженню умов, при яких лінійне розширення диференціальних рівнянь на торі має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину та нелінійна система є інваріантним тороїдальним многовидом.

Постановка задачі та формулювання одержаних результатів. Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, $\Lambda(\varphi)$ і $f(\varphi)$ — відповідно матрична і векторна 2π-періодичні по φ_j функції. Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, через Ω_φ ω-граничну множину цього розв'язку, $\Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi$.

Нас цікавитиме випадок, коли матрична функція $\Lambda(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею $\Lambda(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$. Це означає, що для всіх $\varphi \in T^m$

$$\lim_{t \to \infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A. \tag{2}$$

Лема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A є від'ємними, то для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, функції $f(\varphi)$ система (1) має інваріантну тороїдальну множину $x = u(\varphi)$ і ця множина є асимптотично стійкою.*

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему рівнянь, що залежить від $\varphi \in T^m$ як від параметра,

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)) \tag{3}$$

і позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ матрицант відповідної однорідної системи

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x.$$

Для кожного $\varphi \in T^m$ функція

$$x^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^t(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau \tag{4}$$

є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи (3), якщо тільки

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left\|\Omega_\tau^0(\varphi)\right\| d\tau < \infty. \tag{5}$$

Переконаємося, що в умовах леми нерівність (5) виконується.

Дійсно, матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ допускає інтегральне зображення

$$\Omega_\tau^t(\varphi) = e^{A(t-\tau)} + \int\limits_{\tau}^{t} e^{A(t-s)}(\Lambda(\varphi_s(\varphi)) - A)\Omega_s^t(\varphi)ds. \tag{6}$$

Оскільки при деяких $K \geq 1$ і $\gamma > 0$

$$\left\|e^{A(t-\tau)}\right\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)},\ t \geq \tau, \tag{7}$$

і при достатньо великому T і досить малому a

$$\|\Lambda(\varphi_s(\varphi)) - A\| \leq a, \tag{8}$$

то з (6) маємо

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)} + \int\limits_{\tau}^{t} Ke^{-\gamma(t-s)} \|\Lambda(\varphi_s(\varphi)) - A\| \|\Omega_\tau^s(\varphi)\| ds,$$

$$e^{\gamma(t-\tau)} \left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \leq K + \int\limits_{\tau}^{T} Ke^{\gamma(s-\tau)} \|\Lambda(\varphi_s(\varphi)) - A\| \|\Omega_\tau^s(\varphi)\| ds + \int\limits_{\tau}^{t} Kae^{\gamma(s-\tau)} \|\Omega_\tau^s(\varphi)\| ds$$

і, отже, за лемою Гронуолла – Беллмана знаходимо

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi)\right\| \le K_1 e^{-(\gamma-Ka)(t-\tau)}, \tag{9}$$

де

$$K_1 = K + \int\limits_\tau^T K e^{\gamma(s-\tau)} \left\|\Lambda(\varphi_s(\varphi)) - A\right\| \left\|\Omega_\tau^s(\varphi)\right\| ds.$$

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^0 \left\|\Omega_\tau^0(\varphi)\right\| d\tau \le K_1 \int\limits_{-\infty}^0 e^{(\gamma-Ka)\tau} d\tau = \frac{K_1}{\gamma - Ka} < \infty,\ \gamma > Ka.$$

Інваріантну тороїдальну множину шукатимемо у вигляді $x = u(\varphi)$, де $u(\varphi)$ — 2π-періодична по φ_j, $j = 1, 2, \dots, m$, функція. Запишемо (4) у вигляді

$$x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi)) = \int\limits_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau$$

і одержимо шукану інваріантну множину

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^0 \Omega_s^0(\varphi) f(\varphi_s(\varphi)) ds. \tag{10}$$

Переконаємося в асимптотичній стійкості одержаної інваріантної тороїдальної множини.

Нехай $x = x(t, \varphi)$ — довільний розв'язок рівняння (3), а $x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi))$ — розв'язок цього ж рівняння, що належить інваріантній множині. Різниця цих розв'язків допускає зображення

$$x(t, \varphi) - u(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi)(x(0, \varphi) - u(\varphi)),$$

і на підставі (9) робимо висновок, що

$$\lim_{t\to\infty} \left\|x(t, \varphi) - u(\varphi_t(\varphi))\right\| = 0.$$

Це означає, що інваріантна множина $x = u(\varphi)$ є асимптотично стійкою, що й завершує доведення леми.

Розглянемо тепер збурену систему рівнянь

$$\dot\varphi = a(\varphi),\ \dot x = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \tag{11}$$

Лема 2. *Нехай*

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$$

для всіх $\varphi \in T^m$ *і* $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Тоді існує таке* $b > 0$, *що для будь-якої неперервної* 2π*-періодичної по* φ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, *матриці* $B(\varphi)$ *такої, що*

$$\max_{\varphi\in T^m} \|B(\varphi)\| \leq b, \tag{12}$$

система (11) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину.

Доведення полягає в тому, щоб показати, що матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B)$ при досить великих t допускає оцінку типу $\exp\left(\dfrac{-a}{2}(t-\tau)\right)$, а многовид

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B) f(\varphi_s(\varphi)) ds. \tag{13}$$

Розглянемо лінійну неоднорідну систему рівнянь, що залежить від $\varphi \in T^m$ як від параметра,

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi)))x + f(\varphi_t(\varphi)) \tag{14}$$

і позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ матрицант відповідної однорідної системи

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x,$$

а через $\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B)$ матрицант системи

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi)))x. \tag{15}$$

Для кожного $\varphi \in T^m$ функція

$$x^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \tag{16}$$

є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи (14), якщо тільки

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left\|\Omega_\tau^0(\varphi, \Lambda + B)\right\| d\tau < \infty. \tag{17}$$

Переконаємося, що в умовах леми нерівність (17) виконується.

Згідно з методом варіації довільних сталих матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B)$ будемо шукати у вигляді $\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B) = \Omega_\tau^t(\varphi)C(t)$. Підставивши останню рівність у систему (15), одержимо

$$\Omega_\tau^t(\varphi)\frac{dC}{dt} + \dot{\Omega}_\tau^t(\varphi)C(t) = \Lambda(\varphi_t(\varphi))\Omega_\tau^t(\varphi)C(t) + B(\varphi_t(\varphi))\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B),$$

$$\frac{dC}{dt} = (\Omega_\tau^t(\varphi))^{-1} B(\varphi_t(\varphi))\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B).$$

Звідси

$$C(t)=C(\tau)+\int\limits_{\tau}^{t}(\Omega_{\tau}^{s}(\varphi))^{-1}B(\varphi_s(\varphi))\Omega_{\tau}^{s}(\varphi,\Lambda+B)ds,$$

$$\Omega_{\tau}^{t}(\varphi,\Lambda+B)=\Omega_{\tau}^{t}(\varphi)C(\tau)+\Omega_{\tau}^{t}(\varphi)\int\limits_{\tau}^{t}(\Omega_{\tau}^{s}(\varphi))^{-1}B(\varphi_t(\varphi))\Omega_{\tau}^{s}(\varphi,\Lambda+B)ds.$$

Оскільки при деяких $K\geq 1$ і $\gamma>0$

$$\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\varphi)\right\|\leq Ke^{-\gamma(t-\tau)},\ t\geq\tau,$$

і при достатньо великому T і досить малому b

$$\|B(\varphi_t(\varphi))\|\leq b,$$

то

$$\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\varphi,\Lambda+B)\right\|\leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}C(\tau)+\int\limits_{\tau}^{t}Ke^{\gamma(t-s)}\left\|B(\varphi_s(\varphi))\right\|\left\|\Omega_{\tau}^{s}(\varphi,\Lambda+B)\right\|ds.$$

Домножаючи на $e^{\gamma(t-\tau)}$ останню нерівність і покладаючи $\|C(\tau)\|=1$, маємо

$$e^{\gamma(t-\tau)}\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\varphi,\Lambda+B)\right\|\leq K+\int\limits_{\tau}^{t}Ke^{\gamma(s-\tau)}\left\|B(\varphi_s(\varphi))\right\|\left\|\Omega_{\tau}^{s}(\varphi,\Lambda+B)\right\|ds,$$

$$e^{\gamma(t-\tau)}\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\varphi,\Lambda+B)\right\|\leq$$

$$\leq K+\int\limits_{\tau}^{T}Ke^{\gamma(s-\tau)}\left\|B(\varphi_s(\varphi))\right\|\left\|\Omega_{\tau}^{s}(\varphi,\Lambda+B)\right\|ds+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t}Kbe^{\gamma(s-\tau)}\left\|\Omega_{\tau}^{s}(\varphi,\Lambda+B)\right\|ds.$$

Згідно з лемою Гроноулла – Беллмана

$$\left\|\Omega_{\tau}^{t}(\varphi,\Lambda+B)\right\|\leq K_1e^{-(\gamma-Kb)(t-\tau)},\tag{18}$$

де

$$K_1=K+\int\limits_{\tau}^{T}Ke^{\gamma(s-\tau)}\left\|B(\varphi_s(\varphi))\right\|\left\|\Omega_{\tau}^{s}(\varphi,\Lambda+B)\right\|ds.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{0} \left\|\Omega_\tau^0(\varphi, \Lambda + B)\right\| d\tau \leq K_1 \int_{-\infty}^{0} e^{(\gamma - Kb)\tau} d\tau = \frac{K_1}{\gamma - Kb} < \infty, \; \gamma > Kb.$$

Інваріантну тороїдальну множину шукатимемо у вигляді $x = u(\varphi)$, де $u(\varphi)$ — 2π-періодична по φ_j, $j = 1, 2, ..., m$, функція. Запишемо (16) у вигляді

$$x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi)) = \int_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau$$

і одержимо шукану інваріантну множину

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B) f(\varphi_s(\varphi)) ds.$$

Переконаємося в асимптотичній стійкості одержаної інваріантної тороїдальної множини.

Нехай $x = x(t, \varphi)$ — довільний розв'язок рівняння (14), а $x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi))$ — розв'язок цього ж рівняння, що належить інваріантній множині. Різниця цих розв'язків допускає зображення

$$x(t, \varphi) - u(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi, \Lambda + B)(x(0, \varphi) - u(\varphi)),$$

і на підставі (18) робимо висновок, що

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t, \varphi) - u(\varphi_t(\varphi))\| = 0.$$

Це означає, що інваріантна множина $x = u(\varphi)$ є асимптотично стійкою, що й завершує доведення леми.

Розглянемо тепер нелінійну систему

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = F(\varphi, x) + \Lambda(\varphi) x, \tag{19}$$

в якій, як і в (1), $\varphi \in T^m$, $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T^m)$, $F(\varphi, x) \in C_{\varphi, x}^{(0,2)}$, $\varphi \in T^m, x \in R^n$, $\|x\| \leq h$. Запишемо цю систему у вигляді

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{x} = \Lambda(\varphi) x + B(\varphi, x) x + f(\varphi), \tag{20}$$

де $f(\varphi) = F(\varphi, 0), B(\varphi, x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial F(\varphi, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$. Як і раніше, вважатимемо, що існує границя

$$\lim_{t \to \infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$$

для всіх $\varphi \in T^m$ і $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$, $j = 1, 2, ..., n$.

Покажемо, що при певних умовах система (19) має інваріантний тороїдальний многовид.

Цей многовид шукатимемо методом послідовних наближень. За початковий многовид M_0 візьмемо многовид $x \equiv 0$, за M_1 — інваріантний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, 0)x + f(\varphi). \tag{21}$$

Встановимо умови існування такого многовиду і його вигляд. Як і при доведенні леми 1, встановлюємо, що матрицант системи рівнянь

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x \tag{22}$$

допускає оцінку

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda)\right\| \le K_0 e^{-\gamma_0(t-\tau)}, \ t \ge \tau, \tag{23}$$

а тому легко встановити (як і при доведенні леми 2), що матрицант системи рівнянь

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), 0))x \tag{24}$$

допускає оцінку

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda + B_0)\right\| \le K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)}, \ t \ge \tau, \ \varphi \in T^m, \tag{25}$$

де

$$K_1 = K_0 + \int\limits_\tau^T K_0 e^{\gamma_0(s-\tau)} \left\|B(\varphi_s(\varphi), 0))\right\| \left\|\Omega_\tau^s(\varphi)\right\| ds, \ \gamma_1 = \gamma_0 - K_0 b_0, \ \gamma_0 > K_0 b_0,$$

якщо тільки

$$\max_{\varphi \in T^m} \left\|B(\varphi, 0))\right\| \le b_0,$$

b_0 — достатньо мале.

Тоді на основі леми 2 робимо висновок, що тороїдальний многовид $x = u^{(1)}(\varphi)$ системи (21) існує і має вигляд

$$x = u^{(1)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^0 \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B_0) f(\varphi_s(\varphi)) ds. \tag{26}$$

За многовид M_2 візьмемо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(1)}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{27}$$

а саме

$$x = u^{(2)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^0 \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B_1) f(\varphi_s(\varphi)) ds. \tag{28}$$

Якщо таким чином ми побудували многовиди $M_1, M_2, ..., M_k$, то за многовид M_{k+1} беремо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{29}$$

тобто многовид

$$x = u^{(k+1)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B_k) f(\varphi_s(\varphi))ds. \tag{30}$$

Покажемо, що таким методом можна побудувати інваріантний многовид системи (19). Для цього необхідно переконатися в тому, що можна побудувати функцію $u^{(k)}(\varphi)$ для будь-якого $k = 1, 2, ...$, довести рівномірну збіжність

$$u^{(k)}(\varphi) \rightrightarrows u(\varphi),\ \varphi \in T^m,$$

і показати, що $x = u(\varphi)$ задає інваріантний тороїдальний многовид системи (19).

Нехай

$$\max_{\varphi \in\ T^m} \|f(\varphi))\| = m, \tag{31}$$

а

$$\max_{\varphi \in\ T^m,\ \|x\| \le h} \|B(\varphi, x))\| = b_0.$$

Із зображення (26) маємо

$$\left\| u^{(1)}(\varphi) \right\| \le \int\limits_{-\infty}^{0} \left\| \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B_0) \right\| \|f(\varphi_s(\varphi))\|\, ds$$

або, враховуючи оцінку (25),

$$\max_{\varphi \in\ T^m} \left\| u^{(1)}(\varphi)) \right\| \le \frac{K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in\ T^m} \|f(\varphi))\|. \tag{32}$$

Будемо вважати, що $\gamma_1 h > K_1 m$, тому

$$\max_{\varphi \in\ T^m} \left\| u^{(1)}(\varphi) \right\| < h. \tag{33}$$

Припустимо, що для $j = 1, 2, ..., k-1$ нерівність (33) виконується. Тоді для $j = k$ маємо

$$\left\| u^{(k)}(\varphi) \right\| = \int\limits_{-\infty}^{0} \left\| \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B_{k-1}) \right\| \|f(\varphi_s(\varphi))\|\, ds \le \frac{K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in\ T^m} \|f(\varphi)\|. \tag{34}$$

За індукцією робимо висновок: якщо $\gamma_1 h > K_1 m$, то для кожного $k = 1, 2, ...$ функцію $u^{(k+1)}(\varphi)$ можна побудувати, а отже, можна побудувати і множину M_{k+1}, що є інваріантною тороїдальною множиною системи (29).

Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(\varphi)$. Для цього оцінимо різницю $u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$. Зауважимо, що для будь-якого $\varphi \in T^m$ $u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ є обмеженим на всій осі розв'язком рівняння (29), тобто задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt}u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi))))u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а $u^{(k+1)}(\varphi)$ — рівність

$$\frac{d}{dt}u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))))u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

отже, різниця $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt}\Big(u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))\Big) = \Big(\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))\Big)\Big(u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) -$$

$$- u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))\Big) + \Big(B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) - B(\varphi_t(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi))))u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)\Big).$$

Тому $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ визначає інваріантну тороїдальну множину системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)))x + (B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi),$$

а отже, задовольняє нерівність

$$\max_{\varphi \in T^m} \left\| u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi) \right\| \le \frac{K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in T^m} \left\| B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)) \right\| \left\| u^{(k)}(\varphi) \right\| \le$$

$$\le \frac{K_1}{\gamma_1}\frac{K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in T^m} \|f(\varphi)\| \, L \left\| u^{(k)}(\varphi) - u^{(k-1)}(\varphi) \right\|.$$

Таким чином, вважаючи, що константа Ліпшиця L настільки мала, що

$$L\frac{K_1}{\gamma_1}h < 1, \tag{35}$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(\varphi)\}$.

Покладемо

$$\lim_{k \to \infty} u^{(k)}(\varphi) = u(\varphi). \tag{36}$$

Переконаємося, що многовид $u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи.

Переходячи до границі при $k \to \infty$ в рівності (30), бачимо, що функція $u(\varphi)$ допускає зображення

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B) f(\varphi_s(\varphi)) ds, \tag{37}$$

в якому $\Omega_s^0(\varphi, \Lambda + B)$ — матрицант системи

$$\dot{x} = [\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)))]x.$$

Отже, $u(\varphi_t(\varphi))$ для будь-якого $\varphi \in T^m$ задовольняє рівність

$$\dot{u}(\varphi_t(\varphi)) = [\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)))]u(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а тому многовид $u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи.

Таким чином, має місце така теорема.

Теорема. *Нехай*

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$$

для всіх $\varphi \in T^m$ *і* $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Тоді існують такі сталі* $b_0 > 0$, $m > 0$ *і як завгодно мала стала Ліпшиця* L, *що для будь-якої неперервної по* φ *і* x *в області* $\varphi \in T^m$, $\|x\| \leq h$, 2π-*періодичної по* φ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *матриці* $F(\varphi, x)$ *такої, що*

$$\max_{\varphi\in T^m} \|F(\varphi, 0))\| = m,$$

$$\max_{\varphi\in\, T^m,\ \|x\|\leq h} \|B(\varphi, x))\| = b_0$$

і

$$\left\|B(\varphi, x^{'}) - B(\varphi, x^{''})\right\| \leq L \left\|x^{'} - x^{''}\right\|,$$

де $B(\varphi, x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial F(\varphi,\ \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$, *система (19) має інваріантний тороїдальний многовид.*

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

Одержано 10.06.08