УДК 517.9

ПРО ДОДАТНІ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

О. І. Кочерга

Ніжин. ун-т
Україна, 16602, Ніжин Чернігівської обл., вул. Крапив'янського, 2

О. І. Неня

Київ. нац. економ. ун-т
Україна, 03680, Київ, просп. Перемоги, 54/1

В. І. Ткаченко*

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

By applying the Krasnosel'skii fixed point theorem to a mapping on a cone, we find conditions for existence of piecewise smooth periodic solutions of functional-differential equations with impulsive effects.

С помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке отображения в конусе получены условия существования положительных кусочно-гладких периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Вступ. Позначимо через $\mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$ банахів простір означених на інтервалі J кусково-неперервних неперервних зліва функцій зі значеннями в $\mathbb{R}^n$. Введемо стандартну норму в $\mathcal{PC}$ формулою

$$\|\varphi\|_0 = \sup_{\theta \in J} \|\varphi(\theta)\|,$$

де $\|.\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Якщо функція $x \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то $x_t \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ означається рівністю $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ для всіх $\theta \in \mathbb{R}$.

Розглянемо n-вимірну систему функціонально-диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x_t), \quad t \neq \tau_k, \tag{1}$$

$$x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) = \Delta x|_{t=\tau_k} = B_k x(\tau_k) + I_k(x(\tau_k)),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ — кусково-неперервна T-періодична матрична функція, послідовність моментів імпульсної дії $\{\tau_k\}$ задовольняє умову $\tau_{k+p} - \tau_k = T$, сталі матриці B_k та функції

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (грант 14.1/007).

$I_k(x)$ задовольняють умови періодичності $B_{k+p} = B_k,\ I_{k+p}(x) = I_k(x)$ з деяким натуральним p, $f(t+T, \varphi) = f(t, \varphi)$.

Під розв'язком системи рівнянь (1), (2) розуміємо абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$ функцію, яка задовольняє систему рівнянь (1) майже скрізь, а також умови імпульсів (2).

Клас імпульсних систем (1), (2) включає багато моделей математичної біології. До цього класу належать рівняння Маккі – Гласса та Ніколсона з імпульсною дією, система Лотки – Вольтерри з запізненням та імпульсною дією, а також більш загальні системи з запізненням та імпульсами, які описують конкуренцію кількох біологічних видів. Інший приклад — система хижак-жертва з запізненням та імпульсами.

Виходячи з біологічної інтерпретації, розглядаємо розв'язки, які набувають невід'ємних значень. Метою даної роботи є дослідження додатних періодичних розв'язків системи (1), (2) з допомогою теореми Красносельського про нерухому точку відображення в додатному конусі. Застосуванню теореми Красносельського до дослідження різних класів диференціальних рівнянь присвячено багато робіт (див., наприклад, [1 – 5]). У роботах [6 – 8] теорему застосовано до функціонально-диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

В даній роботі ми використаємо функцію Гріна задачі про періодичні розв'язки імпульсної системи [9, с. 153], що дозволить дослідити більш широкий клас систем і отримати нові умови існування періодичних розв'язків.

Основні результати. Спочатку сформулюємо теорему Красносельського про нерухому точку (див. [10, 11]).

Розглянемо банаховий простір E. Замкнена непорожня підмножина $\mathcal{P}$ простору E називається конусом, якщо:

1) $\alpha x + \beta y \in \mathcal{P}$ для всіх $x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{P}$ і для всіх $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$;

2) з того, що $x \in \mathcal{P}$ і $-x \in \mathcal{P}$, випливає $x = 0$.

Теорема 1 (Красносельського). *Нехай E — банахів простір із нормою $\|.\|_b$, а $\mathcal{P} \subset E$ — конус в E. Припустимо, що Ω_1 і Ω_2 — відкриті обмежені підмножини простору E такі, що $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.*

Розглянемо цілком неперервний оператор $\Psi: \mathcal{P} \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to \mathcal{P}$, який задовольняє умови:

1) $\|\Psi x\|_b \leq \|x\|_b$ для $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$;

2) існує ненульовий вектор $\psi \in \mathcal{P}$ такий, що $x \neq \Psi x + \lambda\psi$ для $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$ та $\lambda > 0$, або

3) $\|\Psi x\|_b \leq \|x\|_b$ для $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$;

4) існує ненульовий вектор $\psi \in \mathcal{P}$ такий, що $x \neq \Psi x + \lambda\psi$ для $x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ та $\lambda > 0$.

Тоді оператор Ψ має нерухому точку в $\mathcal{P} \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Позначимо через E_p банахів простір T-періодичних кусково-неперервних неперервних зліва вектор-функцій

$$E_p = \{x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),\ x(t+T) = x(t)\}$$

з нормою $\|x\|_0 = \sup_{t \in [0,T]} \|x(t)\|$.

Позначимо $\mathcal{U}_R = \{u:\ u \in E_p,\ \|u\|_0 < R\}$, $\partial\mathcal{U}_R = \{u:\ \|u\|_0 = R\}$.

Нехай $X(t)$ — матрицант лінійної однорідної імпульсної системи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_k,$$

$$\Delta x|_{t=\tau_k} = B_k x, \ k \in \mathbb{Z},$$

$X(0) = I, \ I$ — одинична матриця.

Лема 1. *Припустимо, що* $\det(I - X(T)) \neq 0$. *Періодична вектор-функція* $x(t)$ *є* T-*періодичним розв'язком системи (1), (2) тоді і тільки тоді, коли* $x(t)$ *є* T-*періодичним розв'язком системи інтегральних рівнянь*

$$x(t) = \int\limits_t^{t+T} G(t,s) f(s, x_s) ds + \sum_{t \leq \tau_j < t+T} G(t, \tau_j) I_j(x(\tau_j)), \tag{3}$$

де функція Гріна $G(t,s)$ *має вигляд*

$$G(t,s) = X(t+T)(I - X(T))^{-1} X^{-1}(s).$$

Доведення. В монографії [9] побудовано функцію Гріна і знайдено періодичний розв'язок лінійної неоднорідної системи рівнянь з імпульсною дією. Застосовуючи ці формули до системи рівнянь (1), (2), отримуємо інтегральне рівняння (3).

Далі припускаємо, що виконуються наступні умови:

H_1) матриці $A(t)$ і B_k є діагональними:

$A(t) = \mathrm{diag}(a_1(t), ..., a_n(t))$, функції $a_j(t)$ кусково-неперервні та T-періодичні,

$B_k = \mathrm{diag}(b_{k1}, ..., b_{kn}), \ B_k = B_{k+p}$, а також

$$1 + b_{kj} > 0, \ \ k \in \mathbb{Z}, \ j = 1, ..., n; \tag{4}$$

H_2) $\det(I - X(T)) \neq 0$; для діагональних матриць ця умова набере вигляду

$$g_j = \int\limits_0^T a_j(s) ds + \sum_{0 \leq \tau_i < T} \ln(1 + b_{ij}) \neq 0, \ j = 1, ..., n; \tag{5}$$

H_3) функціонал $f(t, \varphi) : \ \mathbb{R} \times X_p \to \mathbb{R}^n$ є неперервним та T-періодичним по $t : \ f(t + +T, \varphi) = f(t, \varphi)$ та рівномірно неперервним по $\varphi :$ для всіх $L > 0$ і $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для $\varphi, \psi \in X_p, \ \|\varphi\|_0 \leq L, \ \|\psi\|_0 \leq L, \ \|\varphi - \psi\|_0 < \delta$, виконується

$$\sup_{s \in [0, \omega]} \|f(s, \varphi_s) - f(s, \psi_s)\| < \varepsilon;$$

H_4) $g_j f_j(t, \phi) \leq 0$ для всіх $t, \phi \in \mathbb{R} \times E_p, \ j = 1, ..., n.$

Вектор-функція $G(t,s) = \mathrm{diag}(G_1(t,s),...,G_n(t,s))$ має координати

$$G_j(t,s) = \left(1 - e^{\int_0^T a_j(\xi)d\xi} \prod_{0\le\tau_k<T}(1+b_{kj})\right)^{-1} e^{\int_s^{t+T} a_j(\xi)d\xi} \prod_{s\le\tau_k<t+T}(1+b_{kj}) =$$

$$= \left(e^{-\int_0^T a_j(\xi)d\xi} \prod_{0\le\tau_k<T}(1+b_{kj})^{-1} - 1\right)^{-1} e^{-\int_t^s a_j(\xi)d\xi} \prod_{t\le\tau_k<s}(1+b_{kj})^{-1}. \quad (6)$$

За умови (4) функції $G_j(t,s)$ є відмінними від нуля при всіх t,s і $\mathrm{sign}\, G_j(t,s) = -\mathrm{sign}\, g_j$. Позначимо

$$G_j^L \le |G_j(t,s)| \le G_j^M,\ \ s \in [t, t+T],\ j = 1,...,n,$$

$$G^M = \max_{1\le j\le n} G_j^M, \quad G^L = \min_{1\le j\le n} G_j^L.$$

У просторі E_p означимо конус

$$\mathcal{P}_\sigma = \{x(t) = (x_1(t),...,x_n(t)) \in E_p :\ \ x_j(t) \ge \sigma_j \|x_j\|_0,\ \sigma_j = \mathrm{const},\ j = 1,...,n\},$$

де $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n),\ \sigma_j = G_j^L (G_j^M)^{-1},\ j = 1,...,n,\ \sigma_0 = \min_i \sigma_i$.

Розглянемо інтегральний оператор $\Phi :\ E_p \to E_p$:

$$(\Phi x)(t) = \int_t^{t+T} G(t,s) f(s,x_s) ds + \sum_{t\le\tau_j<t+T} G(t,\tau_j) I_j(x(\tau_j)). \quad (7)$$

Лема 2. *При виконанні умов $H_1 - H_4$ відображення Φ є цілком неперервним і $\Phi\mathcal{P}_\sigma \subseteq$ $\subseteq \mathcal{P}_\sigma$.*

Доведення. Легко перевірити, що функція Гріна $G(t,s)$ задовольняє умову періодичності $G(t+T, s+T) = G(t,s)$. Звідси випливає, що $(\Phi x)(t+T) = (\Phi x)(t)$, тобто оператор Φ переводить простір E_p в себе.

Використовуючи умову H_4, перевіряємо, що оператор Φ є неперервним.

Для доведення компактності відображення Φ скористаємося теоремою Арцела. Розглянемо обмежену множину

$$S_M = \{x \in E_p :\ \|x\|_0 \le M\}$$

і доведемо, що її образ ΦS_M є рівномірно обмеженою і одностайно неперервною множиною функцій на кожному з інтервалів $[\tau_j, \tau_{j+1}]$.

Рівномірна обмеженість безпосередньо випливає з нерівності

$$\|(\Phi x)(t)\| \le \int_t^{t+T} \|G(t,s)\| \|f(s,x_s)\| ds + \sum_{t\le\tau_j<t+T} \|G(t,\tau_j)\| \|I_j(x(\tau_j))\| \le$$

$$\le G^M (T F_M + I_M),$$

де

$$F_M = \sup_{\|\phi\|_0 \le M, s\in\mathbb{R}} \|f(s,\phi)\|, \quad I_M = \sum_{j=1}^{p} \sup_{\|\phi\|_0 \le M,} \|I_j(\phi)\|.$$

Для доведення одностайної неперервності на інтервалі $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ досить довести рівномірну обмеженість похідних $d(\Phi x)(t)/dt$ для $x \in S_M,\ t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$:

$$\frac{(\Phi x)(t)}{dt} = G(t,t+T)f(t+T, x_{t+T}) - G(t,t)f(t,x_t) +$$

$$+ A(t)\int_t^{t+T} G(t,s)f(s,x_s)ds + A(t)\sum_{t\le\tau_j<t+T} G(t,\tau_j)I_j(x(\tau_j)) =$$

$$= A(t)(\Phi x)(t) + f(t,x_t).$$

З останньої формули отримуємо рівномірну оцінку для похідної

$$\left\|\frac{(\Phi x)(t)}{dt}\right\| \le \|A\|_0 G^M(TF_M + I_M) + F_M.$$

Зазначимо, що функція Гріна $G(t,s)$ при кожному фіксованому s є неперервно диференційовною по t при $t \ne \tau_j$.

Використовуючи оцінки для функції Гріна $G_j(t,s)$, отримуємо

$$\|(\Phi y)_j\|_0 \le G_j^M \left(\int_0^T f_j(s,y_s)ds + \sum_{0\le\tau_m<T} I_{mj}(y(\tau_m))\right), \tag{8}$$

$$(\Phi y)_j(t) \ge G_j^L \left(\int_0^T f_j(s,y_s)ds + \sum_{0\le\tau_m<T} I_{mj}(y(\tau_m))\right). \tag{9}$$

З формул (8) і (9) маємо

$$(\Phi y)_j(t) \ \ge\ G_j^L (G_j^M)^{-1} \|(\Phi y)_j\|_0.$$

Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови $H_1 - H_4$ та існують додатні сталі R_1 та R_2 такі, що:*

D_1) *для* $u \in \partial\mathcal{U}_{R_1} \cap \mathcal{P}_\sigma$

$$\left\|\int_t^{t+T} G(t,s)f(s,u_s)ds + \sum_{t\le\tau_k<t+T} G(t,\tau_k)I_k(u(\tau_k))\right\| \le R_1; \tag{10}$$

D_2) *для* $u \in \partial\mathcal{U}_{R_2} \cap \mathcal{P}_\sigma$ *і деякого* $1 \le j \le n$

$$\int\limits_t^{t+T} G_j(t,s) f_j(s,u_s) ds + \sum_{t \le \tau_k < t+T} G_j(t,\tau_j) I_{kj}(u(\tau_k)) \ge \inf_{0 \le s \le T} u_j(s). \tag{11}$$

Тоді система (1), (2) має T-періодичний розв'язок $u(t)$, який задовольняє оцінки $\sigma_0 r \le \le \|u\|_0 \le R$, де $R = \max(R_1, R_2)$, $r = \min(R_1, R_2)$.

Доведення. Доведемо, що оператор Φ має нерухому точку в конусі $\mathcal{P}_\sigma$. Перевіримо виконання умов теореми Красносельського.

Виконання умови 1 теореми 1 випливає з умови D_1.

Припустимо, що друга умова теореми Красносельського не виконується. Тоді для кожного ненульового вектора ψ, зокрема для вектора $\psi = (1, ..., 1)$, існують $u^0 \in \partial\mathcal{U}_{R_2} \cap \mathcal{P}_\sigma$ та додатне число λ такі, що $u^0 = \Phi u^0 + \lambda\psi$. З нерівності (11) для деякого t_1 і $\varepsilon < \lambda$ отримуємо

$$\inf_{0 \le s \le T} u_j^0(s) + \varepsilon > u_j^0(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_1+T} G_j(t_1,s) f_j(s,u_s^0) ds +$$

$$+ \sum_{t_1 \le \tau_k < t_1+T} G_j(t_1,\tau_j) I_{kj}(u^0(\tau_k)) + \lambda \ge \inf_{0 \le s \le T} u_j^0(s) + \lambda.$$

Прийшли до суперечності.

Теорему доведено.

Розглянемо рівняння Маккі – Гласса з імпульсною дією

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \frac{p(t)x(t-h(t))}{1 + x^n(t-h(t))}, \quad t \ne \tau_k, \tag{12}$$

$$x(\tau_k + 0) = (1 + b_k)x(\tau_k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

де $x \in \mathbb{R}$, функції $\delta(t), p(t)$ і $h(t)$ є кусково-неперервними і T-періодичними, n — додатна стала, $\tau_{k+p} = \tau_k + T,\ b_{k+p} = b_k,\ 1 + b_k > 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

У відповідності з лемою 1 будемо шукати додатнозначні T-періодичні розв'язки інтегрального рівняння

$$x(t) = \int\limits_t^{t+T} G(t,s) \frac{p(s)x(s-h(s))}{1 + x^n(s-h(s))} ds, \tag{14}$$

де функція Гріна $G(t,s)$ має вигляд

$$G(t,s) = g(t+T,s)(1 - g(T,0))^{-1}, \tag{15}$$

$$g(t,s) = \exp\left(-\int\limits_s^t \delta(\xi) d\xi\right) \prod_{s \le \tau_k < t} (1 + b_k). \tag{16}$$

Позначимо через G^L і G^M її нижню і верхню оцінки, тобто $G^L \leq |G(t+T,s)| \leq \leq G^M, \ s \in [t, t+T]$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $g(T,0) \neq 1, \ (g(T,0)-1)p(t) \leq 0$ *і*

$$\frac{1}{1-g(T,0)} \int\limits_t^{t+T} g(t+T,s)p(s)ds > 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Тоді рівняння (12), (13) має додатнозначний кусково-неперервний T*-періодичний розв'язок, який задовольняє оцінки* $r_0 \leq x_0(t) \leq R$ *з деякими* $r_0 > 0, R > 0$.

Доведення. У банаховому просторі E_p кусково-неперервних неперервних зліва T-періодичних функцій розглянемо оператор Φx, означений правою частиною рівняння (14). При виконанні умов теореми конус

$$\mathcal{P}_\sigma = \{x(t) \in E_p : \ x(t) \geq \sigma \|x\|_0, \ \sigma = G^L/G^M\}$$

інваріантний відносно оператора Φ.

Перевіримо, що за припущення (17) виконуються умови теореми Красносельського. Припустимо, що $(g(T,0) < 1$ і $p(t) \geq 0$ (випадок $(g(T,0) > 1, p(t) \leq 0$ розглядається аналогічно).

Легко бачити, що при $x \in \partial\mathcal{U}_R \cap \mathcal{P}_\sigma$ з R, яке задовольняє нерівність

$$\frac{G^M p^M T}{1+R^n} < 1, \quad p^M = \max_{t\in[0,T]} p(t),$$

виконується оцінка $\|\Phi x\|_0 \leq R = \|x\|_0$.

За умови (17) існує досить мале r таке, що

$$\int\limits_t^{t+T} g(t+T,s)p(s)ds \geq (1-g(T,0))(1+r^n),$$

а тому при $x \in \partial\mathcal{U}_r \cap \mathcal{P}_\sigma$ справджується оцінка

$$(\Phi x)(t) \geq \int\limits_t^{t+T} \frac{g(t+T,s)p(s)ds}{(1-g(T,0))(1+r^n)} \min_{s\in[t,t+T]} x(s) \geq \min_{s\in[t,t+T]} x(s).$$

Отже, всі умови теореми 2 виконано, що завершує доведення теореми.

Наслідок 1. *Для виконання нерівності (17) достатніми умовами є*

$$g^L p^L > 1 - g(T,0) > 0, \quad g^L = \inf_{t,s} g(t,s), \ p^L = \inf_t p(t) > 0$$

або

$$-g^L p^M > g(T,0) - 1 > 0, \quad p^M = \sup_t p(t) < 0.$$

Наслідок 2. *Припустимо, що* $p(t) > 0,\ \delta(t) > 0$ *і всі імпульси є додатними, тобто* $b_k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$. *Тоді для існування додатного періодичного розв'язку рівняння (12), (13) достатньо виконання нерівності*

$$\min_{t\in[0,T]} \frac{p(t)}{\delta(t)} + \frac{\prod\limits_{0\leq\tau_k<T} (1+b_k) - 1}{\exp\left\{\int\limits_0^T \delta(s)ds\right\} - 1} > 1. \tag{18}$$

Доведення. Оскільки $b_k \geq 0$, то $\prod_k (1+b_k) \geq 1$. Тоді

$$\frac{1}{1-g(T,0)} \int\limits_t^{t+T} g(t+T,s)p(s)ds \geq$$

$$\geq \frac{\min_t(p(t)/\delta(t)}{1-g(T,0)} \int\limits_t^{t+T} e^{-\int\limits_s^{t+T}\delta(\xi)d\xi}\delta(s) \prod_{s\leq t_k<t+T} (1+b_k)ds \geq$$

$$\geq \frac{\min_t(p(t)/\delta(t))}{1-g(T,0)} \int\limits_t^{t+T} e^{-\int\limits_s^{t+T}\delta(\xi)d\xi}\delta(s)ds =$$

$$= \frac{\min(p(t)/\delta(t)}{1-g(T,0)} \left(1 - e^{-\int\limits_0^T \delta(\xi)d\xi}\right).$$

Для виконання (17) достатньо, щоб останній вираз був більшим за одиницю, а саме

$$\min_t \frac{p(t)}{\delta(t)} \left(1 - e^{-\int_0^T \delta(\xi)d\xi}\right) > 1 - e^{-\int_0^T \delta(\xi)d\xi} \prod_{0\leq\tau_k<T} (1+b_k). \tag{19}$$

Легко перевірити, що нерівність (19) еквівалентна (18).

Наслідок доведено.

Розглянемо тепер рівняння Маккі – Гласса з нелінійними імпульсами

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + \frac{p(t)x(t-h(t))}{1+x^n(t-h(t))}, \quad t \neq \tau_k, \tag{20}$$

$$x(\tau_k+0) = (1+b_k)x(\tau_k) + I_k(x(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

де функції $\delta(t), p(t)$ і $h(t)$ є кусково-неперервними і T-періодичними, n — додатна стала. Послідовності у правій частині (21) задовольняють умови $\tau_{k+p} = \tau_k + T,\ b_{k+p} = b_k,\ 1 + +b_k > 0,\ I_{k+p}(x) = I_k(x),\ k \in \mathbb{Z}$.

У відповідності з лемою 1 будемо шукати додатнозначні T-періодичні розв'язки інтегрального рівняння

$$x(t) = \int\limits_{t}^{t+T} G(t,s)\frac{p(s)x(s-h(s))}{1+x^n(s-h(s))}ds + \sum_{t\le\tau_k\le t+T} G(t,\tau_k)I_k(x(\tau_k)). \tag{22}$$

Теорема 4. *Припустимо, що* $g(T,0) < 1,\ p(t) \ge 0, t \in \mathbb{R}$ *і* $I_k(x) \ge 0$ *для* $x \ge 0, k \in \mathbb{Z}$.
Тоді рівняння (20), (21) має додатнозначний кусково-неперервний T*-періодичний розв'язок, якщо виконуються умови:*

a) $I_k(0) > 0$, *і* $I_k(R)/R \to 0,\ R \to \infty$, *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$

або

b) $G^M p^M < 1,\ I_k(r)/r \to 0,\ r \to 0$ *і* $I_k(R)/R \to \infty,\ R \to \infty$, *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Нехай виконуються умови a). При виконанні умов $I_k(\xi)/\xi \to 0, \xi \to \infty$, для деякого досить великого R_1 має місце нерівність

$$\frac{G^M p^M T}{1+R_1^n} + \frac{G^M}{\sigma R_1}\sum_{k=1}^{p}\max_{u\in[\sigma R_1, R_1]} I_k(u) < 1.$$

Тому для $x \in \partial\mathcal{U}_{R_1} \cap \mathcal{P}_\sigma$ виконується умова $\|\Phi x\|_0 \le \|x\|_0$, де Φ — оператор, який означається правою частиною (22).

Оскільки $I_k(0) > 0$, то при досить малому r_1 для $x \in \partial\mathcal{U}_{r_1} \cap \mathcal{P}_\sigma$ виконується

$$(\Phi x)(t) \ge \left(\int\limits_{t}^{t+T}\frac{g(t+T,s)p(s)ds}{(1-g(T,0))(1+r_1^n)} + \sum_{k=1}^{p} G^L\frac{I_k(0)}{2\sigma r_1}\right)\inf_{0\le s\le T} x(s) \ge \inf_{0\le s\le T} x(s).$$

Отже, за теоремою 2 рівняння (20), (21) має T-періодичний розв'язок, який задовольняє оцінки $\sigma r_1 \le x(t) \le R_1, t \in \mathbb{R}$.

Випадок b) доводиться аналогічно.

Теорему доведено.

Розглянемо рівняння Ніколсона з імпульсною дією

$$\dot{y}(t) = -\delta(t)y(t) + p(t)y(t-h(t))e^{-\beta(t)y(t-h(t))}, \quad t \ne \tau_k, \tag{23}$$

$$y(\tau_k+0) = (1+b_k)y(\tau_k) + I_k(y(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{24}$$

де функції $\delta(t), p(t) > 0, \beta(t) > 0$ і $h(t)$ є кусково-неперервними і T-періодичними. Послідовності у правій частині (24) задовольняють умови $\tau_{k+p} = \tau_k + T,\ b_{k+p} = b_k,\ 1 + b_k > 0,\ I_{k+p}(x) = I_k(x),\ k \in \mathbb{Z}$.

Відповідне інтегральне рівняння має вигляд

$$y(t) = \int\limits_{t}^{t+T} G(t,s)\alpha(s)y(s-h(s))e^{-\beta(s)y(s-h(s))}ds + \sum_{t\le\tau_k\le t+T} G(t,\tau_k)I_k(x(\tau_k)),$$

де функція Гріна $G(t,s)$ визначається формулами (15), (16).

Аналогічно теоремам 3 і 4 доводимо наступне твердження.

Теорема 5. *Припустимо, що* $g(T,0) < 1$, *і* $p(t) \geq 0, t \in [0,T]$. *Тоді рівняння (23), (24) має строго додатний кусково-неперервний* T*-періодичний розв'язок, якщо виконується одна з умов:*

1) $I_k(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, *і* $\int_t^{t+T} g(t,s)p(s)ds > 1 - g(T,0)$;

2) $I_k(x) \geq 0,\ I_k(0) > 0$, *і* $I_k(R)/R \to 0,\ R \to \infty$, *для* $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$;

3) $I_k(x) \geq 0,\ G^M p^M < 1,\ I_k(r)/r \to 0,\ r \to 0$, *і* $I_k(R)/R \to \infty,\ R \to \infty$, *для* $x \in \mathbb{R}, k \in \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо інтегро-диференціальні рівняння Вольтерри з імпульсною дією

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = a_j(t)y_j(t) + \int\limits_{-\infty}^{0} K_j(s)F_j(t, y(t+s))ds,\ t \neq \tau_k, \tag{25}$$

$$y_j(\tau_k + 0) = y_j(\tau_k) + b_{kj}y(\tau_k) + I_{kj}(y(\tau_k)),\ k \in \mathbb{Z},\ j = 1, ..., n, \tag{26}$$

де $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$, функції $a_j(t)$ та $F_j(t,y)$ є кусково-неперервними і T-періодичними по t, неперервні додатнозначні функції $K_j(s)$ інтегровні на $(-\infty, 0)$ і $\int_{-\infty}^0 K_j(r)dr = 1$. Як і раніше, $\tau_{k+p} = \tau_k + T,\ I_{k+p,j}(y) = I_{k,j}(y),\ b_{k+p,j} = b_{k,j},\ b_{k,j} + 1 > 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

Періодичні розв'язки системи рівнянь (25), (26) шукаємо як періодичні розв'язки системи інтегральних рівнянь

$$y(t) = \int\limits_t^{t+T} G(t,s) \int\limits_{-\infty}^{0} K(\xi)F(s, y(s+\xi))d\xi ds + \sum_{t \leq \tau_j < t+T} G(t,\tau_j)I_j(y(\tau_j)) \tag{27}$$

з формулою Гріна $G(t,s) = (G_1(t,s), ..., G_n(t,s))$, яка задається формулами (6).

Теорема 6. *Нехай існують додатні* R_1 *і* R_2 *такі, що:*

1) $g_j F(t,\phi) \leq 0,\ g_j I_{kj}(\phi(\tau_k)) \leq 0$ *для всіх* $t \in \mathbb{R},\ \phi \in \mathcal{P}_\sigma,\ j = 1, ..., p$, *де величини* g_j *визначаються формулами*

$$g_j = \int\limits_0^T a_j(s)ds + \sum_{0 \leq \tau_i < T} \ln(1 + b_{ij}) \neq 0,\ j = 1, ..., n;$$

2) для $u \in \mathcal{P}_\sigma,\ \|u\|_0 = R_1$

$$|f_j(s,u)| \leq f_j^M(R_1)R_1, \quad |I_{kj}(u)| \leq I_{kj}^M(R_1)R_1,$$

$$G_j^M \left(f_j^M(R_1) + \sum_{k=1}^{p} I_{kj}^M(R_1) \right) \leq 1, \quad j = 1, ..., n;$$

3) для вектор-функцій $u \in \mathcal{P}_\sigma, \|u\|_0 = R_2$ *та деякого* $j, 1 \le j \le n$,

$$|f_j(s, u(\xi))| \ge f_j^L(R_2) \min_\xi u_j(\xi), \quad |I_{kj}(u(\tau_k))| \ge I_{kj}^L(R_2) \min_\xi u_j(\xi),$$

$$G_j^L \left(f_j^L(R_2) + \sum_{k=1}^{p} I_{kj}^L(R_2) \right) \ge 1.$$

Тоді система рівнянь (25), (26) має T*-періодичний додатнозначний кусково-неперервний розв'язок* $u(t)$, $\sigma r \le \|u\|_0 \le R$, *де* $R = \max\{R_1, R_2\}$, $r = \min\{R_1, R_2\}$.

Прикладом системи (25), (26) є система Лотки – Вольтерри

$$\dot{y}_i(t) = a_i(t)y_i(t) - y_i(t)\sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(s)y_j(t+s)ds, \quad t \ne \tau_k, \tag{28}$$

$$y_i(\tau_k + 0) = (1 + b_{kj})y_i(\tau_k) + I_{kj}(y(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{29}$$

де $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$, неперервні додатнозначні функції $K_j(s)$ інтегровні на $(-\infty, 0)$ і $\int_{-\infty}^{0} K_j(r)dr > 0$.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови:*

1) $g_j > 0,\ j = 1, ..., n$;

2) $I_{kj}(y) \le 0,\ I_{kj}(y)/\|y\| \to 0, \|y\| \to 0,\ k = 1, ..., p,\ j = 1, ..., n$.

Тоді система рівнянь (28), (29) має T*-періодичний додатнозначний кусково-неперервний розв'язок.*

1. *Franco D., Liz E., Torres P.J.* Existence of periodic solutions for functional equations with periodic delay // Indian J. Pure and Appl. Math. — 2007. — **38**. — P. 143 – 152.
2. *Jiang D., Wei J., Zhang B.* Positive periodic solutions of functional differential equations and population models // Electron. J. Different. Equat. — 2002. — № 71. — P. 1 – 13.
3. *Li Y., Zhu L.* Positive periodic solutions of nonlinear functional differential equations // Appl. Math. and Comput. — 2004. — **156**. — P. 329 – 339.
4. *Wang H.* Positive periodic solutions of functional differential equations // J. Different. Equat. — 2004. — **202**. — P. 354 – 366.
5. *Zhang W., Zhu D., Bi P.* Existence of periodic solutions of a scalar functional differential equation via fixed point theorem // Math. and Comput. Modelling. — 2007. — **46**. — P. 718 – 729.
6. *Zhang N., Dai B., Qian X.* Periodic solutions for a class of higher-dimension functional differential equations with impulses // Nonlinear Anal. — 2008. — **68**. — P. 629 – 638.
7. *Zhang X., Jiang D., Li X., Wang K.* A new existence theory for single and multiple positive periodic solutions to Volterra integro-differential equations with impulsive effects // Comput. and Math. with Appl. — 2006. — **51**. — P. 17 – 32.
8. *Zhang X., Yan J., Zhao A.* Existence of positive periodic solutions for an impulsive differential equation // Nonlinear Anal. — 2008. — **68**. — P. 3209 – 3216.
9. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.
10. *Deimling K.* Nonlinear functional analysis. — Berlin: Springer, 1985. — 450 p.
11. *Krasnoselskii M.A.* Positive solutions of operator equations. — Groningen: Noordhoff, 1964.

Одержано 28.08.08