УДК 517.929.7

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ТА УСЕРЕДНЕННЯ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Я. Й. Бігун

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. Університетська, 28
e-mail: yaroslav.bihun@gmail.com

For an m-frequency system of differential equations with linearly transformed argument, we prove existence of a solution that satisfies the initial or multipoint boundary-value conditions. We find an estimate, which explicitly depends on the small parameter, for the error of the method of averaging in the fast variables.

Для m-частотной системы дифференциальных уравнений с линейно преобразованным аргументом доказано существование решения, которое удовлетворяет начальным или многоточечным краевым условиям. Получена оценка погрешности метода усреднения по быстрым переменным, явно зависимая от малого параметра.

Питання обґрунтування методу усереднення та існування розв'язку багаточастотних систем із багатоточковими й інтегральними крайовими умовами досліджувалися в монографії [1]. Для систем із малим параметром стандартного вигляду [2] крайові задачі методом усереднення вивчались, наприклад, у працях [3 – 5]. Системи з повільними і швидкими змінними та із запізненням у резонансному випадку розглядалися в [6 – 8]. Зокрема, багатоточкова задача для системи із лінійно перетвореним аргументом у повільних і швидких змінних вивчалася в [6], а з постійним запізненням — у [7].

У даній роботі обґрунтовується метод усереднення для системи із лінійно перетвореним аргументом у випадку, коли вектор частот залежить від повільних змінних. Як відомо [1, 9], у загальному випадку для таких систем без запізнення ефективну оцінку похибки методу усереднення, залежної від малого параметра, можна одержати тільки для повільних змінних і за досить жорстких обмежень на систему, що пов'язані з резонансними явищами.

1. Нехай $x \in D$, D — обмежена область в R^n, $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, $\varphi \in R^m$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $L > 0$, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$, $\lambda, \theta \in (0, 1)$, $x_\lambda(\tau) = x(\lambda\tau)$, $\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau)$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(\tau, x, x_\lambda) + \varepsilon A(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, x, x_\lambda)}{\varepsilon} + B(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

де вектор-функції a, ω, A і B, що є 2π-періодичними за компонентами φ, φ_θ, визначено відповідно в областях $G_1 = [0, L] \times D^2$ і $G_2 = [0, L] \times D^2 \times R^{2m} \times [0, \varepsilon_0]$. Змінні x і φ

називають повільними і швидкими відповідно, ω — вектор частот. Систему (1) можна класифікувати як систему першого наближення [1, 9].

Задамо для системи (1) спочатку початкові умови

$$x(0,\varepsilon) = y, \quad \psi(0,\varepsilon) = \psi, \tag{2}$$

де $y \in D_1 \subset D$, $\psi \in R^m$.

У системі (1) досягається резонанс у точці $\tau \in [0, L]$, якщо точно або наближено виконується рівність

$$\gamma_{kl}(\tau,\varepsilon) := (k, \omega(\tau, x(\tau,\varepsilon), x_\lambda(\tau,\varepsilon))) + \theta(l, \omega(\theta\tau, x_\theta(\tau,\varepsilon), x_{\theta\lambda}(\tau,\varepsilon))) = 0, \tag{3}$$

де $[k,l] \in Z^{2m} \setminus \{0\}$, $[k,l] := \operatorname{col}(k,l)$.

Відповідна (1) усереднена за змінними φ, φ_θ система набирає вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{d\tau} &= a(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda) + \varepsilon A_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon), \\ \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda)}{\varepsilon} + B_0(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\lambda, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4}$$

де $F_0 := [A_0, B_0] = \dfrac{1}{(2\pi)^{2m}} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(s, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)\, d\varphi\, d\varphi_\theta$, $F := [A, B]$.

Розглянемо породжуючу систему рівнянь

$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau, x, x_\lambda), \quad \tau \in [0, L]. \tag{5}$$

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0) існує єдиний розв'язок $x = \xi(\tau)$ системи (5), $\xi(0) = y \in D_1$, який належить D з деяким ρ-околом;

2^0) $a \in C_{\tau,x,x_\lambda}(G_1, \sigma_1)$, $\omega \in C_z^l(G_1, \sigma_1)$, $l \geq 2p-1$, $z := \operatorname{col}(\tau, x, x_\lambda)$; $F \in C_{\tau,x,x_\lambda}(G_2, \sigma_1)$, де сталою $\sigma_1 > 0$ обмежено вектор-функцію та її похідні;

3^0) нехай $W_p(\tau)$ — $(p \times 2m)$-матриця, $p \geq 2m$, перші m стовпців якої утворені функціями $\omega_\nu^{(j)}(\tau, \xi(\tau), \xi_\lambda(\tau))$, $\nu = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, 2p-1$, елементи решти m стовпців — $(\omega_\nu(\theta\tau, \xi_\theta(\tau), \xi_{\lambda\theta}(\tau)))^{(j)}\theta$, крім того,

$$\left\| (W_p^T(\tau) W_p(\tau))^{-1} W_p^T(\tau) \right\| \leq \sigma_2, \quad \tau \in [0, L];$$

4^0) для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції $F(\tau, x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\theta, \varepsilon)$ і $\gamma = 0$ справджується нерівність

$$\sup_{G_1}\|F_{00}\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{00}}{\partial x}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{00}}{\partial x_\lambda}\right\| +$$

$$+\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}\Bigg[(\|k\|+\theta\|l\|)^\gamma \sup_{G_1}\|F_{kl}\| + (\|k\|+\theta\|l\|)^{\gamma-1}\times$$

$$\times\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial \tau}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x}\right\| + \lambda\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_\lambda}\right\|\right)\Bigg] \leq \sigma_3. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1^0-4^0. Тоді для всіх $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_0]$, $0 < \overline{\varepsilon}_0 \leq \varepsilon_0$, $\tau \in [0,L]$, $y \in D_1$ і $\psi \in R^m$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) і виконується нерівність*

$$\eta(\tau,\varepsilon) := \|x(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{x}(\tau,y,\varepsilon)\| + \varepsilon\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \leq c_1\varepsilon^{1+\frac{1}{p}}, \qquad (7)$$

де $x(0,y,\psi,\varepsilon) = y$, $\varphi(0,y,\psi,\varepsilon) = \psi$, $c_1 > 0$ і не залежить від ε.

Доведення. Із систем (4) і (5) одержимо

$$\|\,\overline{x}(\tau,y,\varepsilon) - \xi(\tau,y)\| \leq 2\sigma_1\int_0^\tau \|\,\overline{x}(s,y,\varepsilon) - \xi(s,y)\|\,ds + \varepsilon\sigma_1\tau.$$

На підставі нерівності Гронуолла – Беллмана на максимальному півінтервалі $[0,\tau)$, $\tau \leq L$, існування розв'язку $\overline{x}(\tau,y,\varepsilon)$ маємо

$$\|\overline{x}(\tau,y,\varepsilon) - \xi(\tau,y)\| \leq \varepsilon\sigma_1\tau\varepsilon^{2\sigma_1\tau}. \qquad (8)$$

Якщо $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 = (4\sigma_1\rho^{-1}Le^{2\sigma_1 L})^{-1}$, то розв'язок $\overline{x} = \overline{x}(\tau,y,\varepsilon)$ визначено для $\tau \in [0,L)$ і оцінка (8) виконується для всіх $\tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$.

Тепер із (1) і (4) маємо

$$\eta(\tau,\varepsilon) \leq 4\sigma_1\int_0^\tau \|x(s,y,\psi,\varepsilon) - \overline{x}(s,y,\varepsilon)\|\,ds +$$

$$+\,\varepsilon\int_0^\tau [\|F(s,x,x_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon) - F(x,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon)\| +$$

$$+\,\|F(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\varphi,\varphi_\theta,\varepsilon) - F(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\theta,\varepsilon) +$$

$$+\,\|F(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\theta,\varepsilon) - F(s,\xi,\xi_\lambda,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\theta,\varepsilon)\|]\,ds \leq$$

$$\leq 8\sigma_1\int_0^\tau \eta(s,\varepsilon)\,ds + 2\varepsilon\sigma_1\int_0^\tau (\|\overline{x}(s,y,\varepsilon) - \xi(s,y)\| +$$

$$+\,\|\overline{x}_\lambda(s,y,\varepsilon) - \xi_\lambda(s,y)\|)ds + \varepsilon\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|,$$

де

$$I_{kl}(\tau,\varepsilon) = \int\limits_0^\tau g_{kl}(s,\xi(s,y),\xi_\lambda(s,y)) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^s \overline{\gamma}_{kl}(s_1)ds_1\right\} ds,$$

$$g_{kl}(s,\varepsilon) = F_{kl}(s,\xi(s,y),\xi_\lambda(s,y),\varepsilon)\exp\left\{i(k,\overline{\varphi}) + i(l,\varphi_\theta) - \frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^s \overline{\gamma}_{kl}(s_1)\,ds_1\right\},$$

$$\overline{\gamma}_{kl}(s_1) = \gamma_{kl}|_{x=\xi(s_1,y)}.$$

Скористаємося оцінкою [10]

$$\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{G_0}\|g_{kl}(s,\varepsilon)\| + \frac{1}{\|k\|+\theta\|l\|}\sup_{G_0}\left\|\frac{dg_{kl}(s,\varepsilon)}{ds}\right\|\right), \tag{9}$$

$$G_0 = [0,L]\times(0,\varepsilon_2], \quad \varepsilon_2 \le \varepsilon_1,$$

правильною при виконанні умов $1^0 - 3^0$.

Маємо

$$\sup_{G_0}\|g_{kl}(s,\varepsilon)\| \le \sup_{G_1}\|F_{kl}(\tau,x,x_\lambda)\|,$$

$$\sup_{G_0}\left\|\frac{dg_{kl}(s,\varepsilon)}{ds}\right\| \le \sup_{G_1}\left\|\frac{dF_{kl}}{d\tau}\right\| + \sigma_1\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{dF_{kl}}{dx}\right\| + \lambda\sup_{G_1}\left\|\frac{dF_{kl}}{dx_\lambda}\right\|\right) +$$
$$+\left[(\|k\|+\theta\|l\|)\sup_{G_2}\|B\| + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{G_0}|(k,\omega(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda) - \omega(s,\xi,\xi_\lambda) +\right.$$
$$\left.+\,\theta(l,\omega_\theta(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda) - \omega_\theta(s,\xi,\xi_\lambda)))|\sup_{G_1}\|F_{kl}\|\right].$$

На підставі нерівності (8)

$$\|\omega(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda) - \omega(s,\xi,\xi_\lambda)\| \le c_3(L)\varepsilon,\ \|\omega_\theta(s,\overline{x},\overline{x}_\lambda) - \omega_\theta(s,\xi,\xi_\lambda)\| \le c_3(\theta L)\varepsilon,$$

де $c_3(L) = \sigma_1 L(e^{2\sigma_1 L} + \lambda e^{2\sigma_1\lambda L})$.

Отже, маємо оцінку

$$\sup_{G_0}\left\|\frac{dg_{kl}(s,\varepsilon)}{ds}\right\| \le \sigma_1(1+c_3(L))(\|k\|+\theta\|l\|)\sup_{G_1}\|F_{kl}\| +$$
$$+ (1+\sigma_1)\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial\tau}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x}\right\| + \lambda\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_\lambda}\right\|\right). \tag{10}$$

Із нерівності для $\eta(\tau,\varepsilon)$ та оцінок (9) і (10) випливає

$$\eta(\tau,\varepsilon) \le 8\sigma_1\int\limits_0^\tau \eta(s,\varepsilon)\,ds + c_3(L)\varepsilon^2 + c_2\sigma_3(1+\sigma_1)(1+c_3(L))\varepsilon^{1+\frac{1}{p}},$$

звідки

$$\eta(\tau,\varepsilon) \le (c_2\sigma_3(1+\sigma_1)(1+c_3(L)) + c_3(L)\varepsilon^{\frac{p-1}{p}})\, e^{8\sigma_1\tau}.$$

Нехай $\overline{\varepsilon}_0 = \min\left(\varepsilon_2, \left(\dfrac{p}{2c_1}\right)^{\frac{p}{p+1}}, (c_2(1+\sigma_1))^{\frac{p}{p-1}}\right)$. Тоді із (10) одержимо оцінку (4), де $c_1 = 2c_2\sigma_1(1+\sigma_1)(1+c_3(L))$, яка виконується для всіх $(\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times(0,\overline{\varepsilon}_0]$.

Теорему доведено.

2. Задано багатоточкові крайові умови

$$f(x_\alpha,\varepsilon) = 0, \tag{11}$$

$$g(x_\alpha,\varphi_\alpha,\varepsilon) = 0, \tag{12}$$

де f і g — задані n- і m-вимірні функції відповідно,

$$x_\alpha = (x|_{\tau=\tau_1},\ldots,x|_{\tau=\tau_r}), \quad \varphi_\alpha = (\varphi|_{\tau=\tau_1},\ldots,\varphi|_{\tau=\tau_r}), \quad 0 \le \tau_1 < \ldots < \tau_r \le L.$$

Розглянемо усереднену систему (4) з відповідними r-точковими умовами

$$f(\overline{x}_\alpha,\varepsilon) = 0, \tag{13}$$

$$g(\overline{x}_\alpha,\overline{\varphi}_\alpha,\varepsilon) = 0. \tag{14}$$

Припустимо, що задача (4), (13), (14) має єдиний розв'язок

$$\overline{x} = \overline{x}\,(\tau,\overline{y},\varepsilon), \quad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}\,(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon),$$

і покажемо, що в досить малому околі усередненого розв'язку існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (11), (12).

Введемо такі позначення: $\overline{M} = (x_\alpha,\varepsilon)$, $\overline{\overline{M}} = (\overline{x}_\alpha,\overline{\varphi}_\alpha,\varepsilon)$, $x_\nu = x|_{\tau=\tau_\nu} = \mathrm{col}\,(x_\nu^1,\ldots,x_\nu^n)$, $v = [x, x_\lambda]$, $w = [x, x_\alpha, \varphi, \varphi_\theta]$, $R_{\overline{y}}(\varepsilon) = \sum\limits_{\nu=1}^{r} \dfrac{\partial f}{\partial\,\overline{x}_\nu}(\overline{M})\left(\dfrac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,\overline{y}}(\tau_\nu,\overline{y},\varepsilon)\right)$, $R_{\overline{\psi}}(\varepsilon) = \sum\limits_{\nu=1}^{r}\dfrac{\partial g}{\partial\,\overline{\varphi}_\nu}(\overline{\overline{M}})$.

Теорема 2. *Нехай:*

1^0) *виконуються умови* 3^0 *і* 4^0 *із* $\gamma = 1$ *теореми 1;*

2^0) $a \in C_z^2(G_1,\sigma_1)$, $F \in C_z^2(G_2,\sigma_1)$, *до того ж*

$$\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 a}{\partial v\partial v_j}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial^2 F_0}{\partial v\partial v_j}\right\|\right) \le \sigma_4;$$

3^0) *для кожного* $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_0]$ *існує єдиний розв'язок* $\overline{x} = \overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)$, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)$ *усередненої крайової задачі (4), (13), (14), причому* $\overline{x} = \overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)$ *належить* D *разом із* ρ*-околом, коли* $(\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times(0,\overline{\varepsilon}_0]$;

4^0) *для кожного* $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_0]$ *в* $\overline{\rho}$*-околі розв'язку усередненої системи* ($\overline{\rho} \ge \rho$)

$$f(\cdot,\varepsilon) \in C_{x_\alpha}^2(G_\rho,\sigma_5), \quad g(\cdot,\cdot,\varepsilon) \in C_{w_\alpha}^2(G_\rho,\sigma_5)$$

і виконується нерівність

$$\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=1}^{2n}\left(\sup_{G_\rho}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial z^\nu \partial z_j}\right\| + \sum_{j=1}^{2(n+m)}\sup_{G_\rho}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial w^\nu \partial w_j}\right\|\right) \le \sigma_6;$$

5^0) $\|R_y(\varepsilon)\| \le \sigma_6\varepsilon^{-\chi_1}$, $\|R_\varphi(\varepsilon)\| \le \sigma_7\varepsilon^{-\chi_2}$, $0 \le \chi_1 + 2\chi_2 < 1/p$, $0 \le 2\chi_1 + \chi_2 < 1/p$.

Тоді існує $\overline{\overline{\varepsilon}}_0 \in (0, \overline{\varepsilon}_0]$ *таке, що для будь-якого* $\varepsilon \in (0, \overline{\overline{\varepsilon}}_0]$ *у досить малому околі розв'язку усередненої системи існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (11), (12) і для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \overline{\overline{\varepsilon}}_0]$ *виконується нерівність*

$$\varepsilon^{-\chi_2}\|x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\| + \varepsilon\|\varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\varphi}, \varepsilon)\| \le$$
$$\le c_5\varepsilon^{\beta-\chi_2}, \tag{15}$$

де $\beta = 1 + p^{-1} - \chi_1$, $y = \overline{y} + \mu$, $\psi = \overline{\psi} + \xi$, $\|\mu\| \le c_{12}\varepsilon^{\beta-\chi_1}$, $\|\xi\| \le c_{17}\varepsilon^{\beta-\chi_2}$.

Доведення. Застосуємо схему доведення, запропоновану в [1]. Нехай $\rho_1 = \rho/2$, $\mu \in R^n$ і $\|\mu\| \le c_6^{-1}\rho_1$, $c_6 = 2\exp(4\sigma_1 L)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, \overline{v}_0]$ існує розв'язок $\tilde{x} = \overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu, \varepsilon)$ відповідного усередненого рівняння, який належить $(\rho_1/2)$-околі розв'язку $\overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)$.

Якщо $\varepsilon_3 = \min(\overline{\varepsilon}_0, (\rho_1/(2c_1))^{\frac{p}{p+1}})$, то на підставі теореми 1 існує єдиний розв'язок $[x(\tau, \overline{y} + \nu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon), \varphi(\tau, \overline{y} + \nu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)]$ системи (1) і

$$\|x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu, \varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^{1+\frac{1}{p}},$$

де $c_1 = c_1(\rho/2)$. Тоді

$$\left\|x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\right\| \le c_1\varepsilon^{1+\frac{1}{p}} + c_6\|\mu\|. \tag{16}$$

Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4]$, $\varepsilon_4 \le \varepsilon_3$, і $\xi \in R^m$ існує єдине значення $\mu = \mu(\varepsilon, \xi)$, для якого розв'язок $x = x(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)$ задовольняє крайову умову (11). Із (11) і (13) виводимо

$$f(x_\alpha, \varepsilon) - f(\overline{x}_\alpha, \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f(\overline{M})}{\partial \overline{x}_\nu}(x_\nu - \tilde{x}_\nu) + \sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f(\overline{M})}{\partial \overline{x}_\nu}(\tilde{x}_\nu - \overline{x}_\nu) + R_\alpha. \tag{17}$$

Скориставшись оцінкою з роботи [11], одержимо

$$\|R_\alpha(f)\| := \left\|f(x_\alpha, \varepsilon) - f(\overline{x}_\alpha, \varepsilon) - \sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f(\overline{x}_\alpha, \varepsilon)}{\partial x_\nu}(x_\nu - \overline{x}_\nu)\right\| \le$$
$$\le \frac{1}{2}n\sigma_4\left(\|\mu\| + c_1\varepsilon^{1+\frac{1}{p}}\right)^2,$$

$$\|R_\nu(\overline{x}_\nu)\| := \left\|\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y}+\mu,\varepsilon)-\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y},\varepsilon)-\frac{\partial\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}\mu\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}nc_7\|\mu\|^2,$$

де сталою c_7 обмежено вираз

$$\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_6]}\left\|\frac{\partial^2\overline{x}(\tau_\nu,\overline{y}(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\overline{y}\partial\overline{y}_j}\right\|.$$

Із (17) знаходимо

$$R_{\overline{y}}(\varepsilon)\mu = -\left(\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_\nu}(\overline{M})(x_\nu-\tilde{x}_\nu)+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_\nu}(\overline{M})R_\nu+R_\alpha\right)\equiv\overline{\Phi}_1(\mu,\xi,\varepsilon),$$

звідки

$$\mu = \Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon), \tag{18}$$

де $\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon) = -R_{\overline{y}}^{-1}(\varepsilon)\overline{\Phi}_1(\mu,\xi,\varepsilon)$. Із умов 4^0, 5^0 і оцінок для R_ν, R_α маємо

$$\|\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le \sigma_5\varepsilon^{-\chi_1}\left(c_1c_8\varepsilon^{1+\frac{1}{p}}+c_9\|\mu\|^2+c_{10}\varepsilon^{1+\frac{1}{p}}\|\mu\|+c_{11}\varepsilon^{2(1+\frac{1}{p})}\right),$$

де $c_8,\ldots,c_{11}$ — деякі додатні сталі, $\sum_{\nu=1}^{r}\left\|\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_\nu}(\overline{M})\right\| \le c_8$.

Нехай

$$\|\mu\| \le c_{12}\varepsilon^{\beta}, \quad c_{12} = 2c_1c_8\sigma_5, \tag{19}$$

$$S_{\overline{y}}(\varepsilon) = \{\mu:\ \|\mu\|\le c_{12}\varepsilon^{\beta}\}, \quad \varepsilon_4 = \min\left(\varepsilon_3,(6c_9c_{12}\sigma_5)^{\frac{1}{\chi_1-\beta}},(6c_{10}\sigma_6)^{-\frac{1}{\beta}},\left(\frac{c_{12}}{6c_{11}\sigma_6}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right).$$

Тоді $\|\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le c_{12}\varepsilon^{\beta}$ і для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_4]$ $\Phi_1: S_{\overline{y}}(\varepsilon)\to S_{\overline{y}}(\varepsilon)$.

Покажемо, що Φ_1 — стискаюче відображення. Справді,

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu} = -R_{\overline{y}}^{-1}(\varepsilon)\left(\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_\nu}(\overline{M})\frac{\partial}{\partial\mu}(x_\nu-\overline{x}_\nu)+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial\overline{x}_\nu}(\overline{M})\frac{\partial R_\nu}{\partial\mu}+\frac{\partial R_\alpha}{\partial\mu}\right).$$

При виконанні умов теореми 2 із [6] маємо

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\mu}(x-\tilde{x})\right\|+\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi-\tilde{\varphi})\right\| \le c_{13}\varepsilon^{1+\frac{1}{p}}$$

для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_5]$, $\varepsilon_5 \le \varepsilon_4$. Тут $\tilde{\varphi} = \overline{\varphi}(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\varphi} + \xi, \varepsilon)$. Тоді

$$\left\| \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} \right\| \le \sigma_6 \varepsilon^{-\chi_1} (c_8 c_{13} \varepsilon^{1+\frac{1}{p}} + c_{14} \|\mu\|) = q_1(\varepsilon) \le \frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon \le \varepsilon_6 = \min \left(\varepsilon_5, (4c_8 c_{13} \sigma_6)^{-\frac{1}{\beta}}, (4c_{12} c_{14} \sigma_6)^{\frac{1}{\chi_1 - \beta}} \right)$.

На підставі принципу стискаючих відображень для будь-яких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_6]$ і $\xi \in R^n$ існує єдина нерухома точка $\mu = \mu(\varepsilon, \xi)$ відображення Φ_1.

Аналогічно, з умов (12) і (14) маємо

$$\xi = \Phi_2(\xi, \varepsilon),$$

де

$$\Phi_2(\xi, \varepsilon) = -R_{\overline{\psi}}^{-1}(\varepsilon) \cdot \Phi_2(\xi, \varepsilon),$$

$$\overline{\Phi}_2(\xi, \varepsilon) = -R_{\overline{\psi}}^{-1}(\varepsilon) \left\{ \sum_{\nu=1}^{r} \left[\frac{\partial g}{\partial \overline{x}_\nu} (\overline{\overline{M}})(x_\nu - \overline{x}_\nu) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial g}{\partial \overline{\varphi}_\nu} (\overline{\overline{M}})(\varphi_\nu - \overline{\varphi}_\nu) + \frac{\partial g}{\partial \overline{\varphi}_\nu} (\overline{\overline{M}})(\tilde{\varphi}_\nu - \overline{\varphi}_\nu + \xi) \right] + P_\alpha(\xi, \varepsilon) \right\}.$$

Враховуючи оцінку

$$\|\tilde{x} - \overline{x}\| := \|\overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\| \le c_6 \|\mu\| \le c_6 c_{12} \varepsilon^{\beta}, \tag{20}$$

одержуємо

$$\|\tilde{\varphi}_\nu - \overline{\varphi}_\nu + \xi\| \le \tau_\nu \sigma_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_6]} (\|\tilde{x} - \overline{x}\| + \|\tilde{x}_\lambda - \overline{x}_\lambda\|) \le$$

$$\le 4 \tau_\nu c_6 c_{12} \sigma_1 \varepsilon^{\frac{1}{p} - \sigma_1} \equiv c_{15} \varepsilon^{\frac{1}{p} - \sigma_1}.$$

Тоді

$$\|\Phi_2(\xi, \varepsilon)\| \le \sigma_7 \varepsilon^{-\chi_2} \left(2c_6 c_8 c_{12} \varepsilon^{\beta} + c_1 c_8 \varepsilon^{\frac{1}{p}} + c_8 c_{15} \varepsilon^{\frac{1}{p} - \chi_1} + c_{16} (\|\xi\| + \varepsilon^{\beta})^2 \right).$$

Нехай

$$\|\xi\| \le c_{17} \varepsilon^{\frac{1}{p} - \chi_1 - \chi_2}, \quad c_{17} = 2c_8\, c_{15} \sigma_7.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_7]$

$$\|\Phi_2(\xi, \varepsilon)\| \le c_{17} \varepsilon^{\frac{1}{p} - \sigma_1 - \sigma_2},$$

$$\Phi_2 : \; S_{\overline{\psi}}(\varepsilon) \to S_{\overline{\psi}}(\varepsilon), \quad S_{\overline{\psi}}(\varepsilon) = \left\{ \xi : \; \|\xi\| \le c_{17} \varepsilon^{\frac{1}{p} - \sigma_1 - \sigma_2} \right\}.$$

Далі маємо

$$\frac{\partial \Phi_2(\xi,\varepsilon)}{\partial \xi} = -R_{\overline{\psi}}^{-1}(\varepsilon)\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\left[\frac{\partial g}{\partial \overline{x}_\nu}(\overline{\overline{M}})\frac{\partial}{\partial \xi}(x_\nu-\overline{x}_\nu)+\frac{\partial g}{\partial \overline{\varphi}_\nu}(\overline{\overline{M}})\frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi_\nu-\overline{\varphi}_\nu)\right]+\frac{\partial P_\alpha}{\partial \xi}(\xi,\varepsilon)\right\}.$$

Звідси одержуємо оцінку

$$\left\|\frac{\partial \Phi_2(\xi,\varepsilon)}{\partial \xi}\right\| \le \sigma_7\varepsilon^{-\chi_2}\left(2c_8c_{13}\varepsilon^{\frac{1}{p}}(\varepsilon+1)+c_{18}(\|\xi\|+\varepsilon^\beta)\right) \equiv q_2(\varepsilon) \le \frac{1}{2},$$

якщо

$$\varepsilon \le \varepsilon_8 = \min\left(\varepsilon_7, (24c_8c_{13}\sigma_7)^{\frac{p}{p\chi_2-1}}, (6c_{17}\,c_{18}\sigma_7)^{\frac{1}{2\chi_2-\beta}}\right).$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_8]$ існує єдина точка $\xi=\xi(\varepsilon)$ відображення Φ_2.

Із (16) і (20) маємо

$$\|x(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)\| \le (c_1\varepsilon^{\chi_1}+c_6c_{12})\varepsilon^\beta \le 2c_6c_{12}\varepsilon^\beta,$$

якщо

$$\varepsilon \le \left(\frac{c_6\,c_{12}}{c_1}\right)^{1/\chi_1} = \varepsilon_9.$$

Аналогічно

$$\varepsilon\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\| \le$$
$$\le \varepsilon\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\|+$$
$$+\varepsilon\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\| \le$$
$$\le c_1\varepsilon^\beta+\varepsilon\|\xi\|+c_{15}\varepsilon^\beta \le (c_1+c_{15})\varepsilon^\beta+c_{17}\varepsilon^{\beta-\chi_2} \le 2c_{17}\varepsilon^{\beta-\chi_1},$$

якщо $\varepsilon \le (c_{17}/(c_1+c_{15}))^{1/\chi_2} = \varepsilon_{10}$. Звідси й випливає оцінка (15), оскільки

$$\varepsilon^{-\chi_2}\|x-\overline{x}\|+\varepsilon\|\varphi-\overline{\varphi}\| \le 2c_6c_{12}\varepsilon^{\beta-\chi_2}+(c_1+c_{15})\varepsilon^\beta+c_{17}\varepsilon^{\beta-\chi_2} = c_5\varepsilon^{\beta-\chi}, \quad c_5 = 2c_{17},$$

$$\varepsilon \le \varepsilon_{11} = \min\left(\varepsilon_9, \varepsilon_{10}, \left(\frac{2c_6c_{12}+c_{17}}{c_1+c_{15}}\right)^{1/\chi_2}\right).$$

Якщо $\overline{\overline{\varepsilon}}_0 = \min(\varepsilon_{11}, (\overline{\rho}/c_5)^{1/(\beta-\chi_2)})$, то виконується й умова 4^0 теореми 2.

Теорему доведено.

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 475 с.

2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.

3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
4. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
5. *Байнов Д. Д.* О некоторых применениях метода усреднения для решения начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных, интегро-дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений // Proc. VIII Int. Conf. Nonlinear Oscillations. — Prague, 1978. — P. 771–789.
6. *Бігун Я. Й.* Усереднення багаточастотної крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 3. — С. 291–299.
7. *Бігун Я.Й.* Усереднення крайових задач для багаточастотних систем із сталим запізненням // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2005. — Вип. 2. — С. 90–96.
8. *Бігун Я. Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 4. — С. 435–446.
9. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
10. *Бигун Я. И., Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 1. — С. 8–14.

Одержано 29.04.08