УДК 517.9

ПРО ГЛОБАЛЬНУ СТІЙКІСТЬ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

О. І. Неня

Київ. нац. економ. ун-т
Україна, 03680, Київ, просп. Перемоги, 54/1

We establish exact sufficient conditions for global stability of the zero solution of a difference equation of the form $x_{n+1} = x_n + f_n(x_n, \ldots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{Z}$, where the nonlinear functions f_n satisfy the negative feedback conditions and have sublinear growth.

Приведены точные достаточные условия глобальной устойчивости нулевого решения разностного уравнения $x_{n+1} = x_n + f_n(x_n, \ldots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{Z}$,, где нелинейные функции f_n удовлетворяют условиям отрицательной обратной связи и подлинейного роста.

1. Вступ та основні результати. Розглянемо нелінійне різницеве рівняння з запізненням

$$x_{n+1} = x_n + f_n\left(x_n, \ldots, x_{n-k}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad x_n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Нелінійні функції $f_n : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ задовольняють умови H_1), H_2), наведені нижче. За допомогою рівняння (1) описуються різноманітні дискретні моделі біологічних популяцій. Відмітимо, що різницеві рівняння з запізненням Рікера та П'єлоу (див. [1]) можна звести до рівняння вигляду (1). Метою даної роботи є продовження дослідження глобальної стійкості єдиної нерухомої точки рівняння (1)(див. [2–7]).

Розв'язком рівняння (1) з початковою умовою

$$x_i = \varphi_i, \; i = -k, \ldots, 0, \tag{2}$$

є послідовність $\{x_n\}$, яка означена для $n \geq -k$, задовольняє початкову умову (2) і рівняння (1) при $n = 0, 1, \ldots$. Очевидно, що розв'язок $\{x_n\}$ існує для всіх $n \geq 0$ і його можна побудувати послідовно.

Означимо функціонал $\mathcal{M} : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}_+$, $\mathcal{M}(z) = \max_i\{0, z_i\}$, де $z = (z_0, \ldots, z_k)$, і накладемо такі умови:

H_1) припустимо, що функції f_n задовольняють умову

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z_j, \ldots, z_{j-k}) = \infty \tag{3}$$

для кожної послідовності $\{z_j\}$, яка має ненульову границю на нескінченності;

H_2) існує число $a < 0$ таке, що

$$a\mathcal{M}(\phi) \leq f(n, \phi) \leq -a\mathcal{M}(-\phi) \tag{4}$$

для всіх $\phi \in \mathbb{R}^{k+1}$.

© О. І. Неня, 2006

Зауважимо, що в статті [8] було розглянуто достатні умови глобальної стійкості нульового розв'язку різницевого рівняння

$$x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, \dots, x_{n-k}), \quad q \in (0,1). \tag{5}$$

У роботі [8] доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай функції* f_n *задовольняють умову* H_2)*. Тоді кожен розв'язок* $\{x_n\}$ *рівняння (5) прямує до* 0 *і задовольняє нерівність*

$$\max_{j=n-k,n} |x_j| \le \Gamma\lambda^{n-s} \max_{j=s-k,s} |x_j|, \quad n \ge s, \lambda \in (0,1), \Gamma > 0, \tag{6}$$

якщо

$$\min_{s=0,\dots,k} \left(q^{k+s+1} + aq^s \left(s + \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right) + a^2 \frac{1+q^s(sq-s-1)}{(1-q)^2} \right) > -1. \tag{7}$$

Ця умова є точною для класу рівнянь (5), які задовольняють умову H_2)*.*

Переходячи до границі $q \to 1$, формулу (7) зводимо до вигляду

$$\min_{s=0,\dots,k} \left(1 + a(s+k+1) + a^2 \frac{s(s+1)}{2} \right) > -1. \tag{8}$$

У роботі [6] сформульовано гіпотезу, що при виконанні нерівності (8) всі розв'язки рівняння (1) прямують до нуля при $n \to \infty$. В даній роботі отримано підтвердження цієї гіпотези. Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 2. *Припустимо, що функції* f_n *задовольняють умови* H_1)*,* H_2)*. Тоді кожен розв'язок* $\{x_n\}$ *рівняння (1) прямує до* 0*, якщо*

$$a \ge \max_{j=1,2} \frac{-4}{k + s_j + 1 + \sqrt{(k+s_j+1)^2 - 4s_j(s_j+1)}}, \tag{9}$$

де s_1 *— ціла частина числа* $\frac{1}{3}\left(k - 1 + \sqrt{k^2+k+1}\right)$*, а* $s_2 = s_1 + 1$*.*

Формулу (9) можна отримати в результаті розв'язування нерівності (8) відносно a та відповідних алгебраїчних перетворень.

2. Допоміжні результати. Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$y_{n+1} = y_n + ay_{n-k}, \quad n \ge \zeta, \tag{10}$$

з початковими умовами $y_i = -M < 0, i \le \zeta$, де $\zeta \in \mathbb{Z}$ — фіксоване число. Оскільки рівняння (10) є автономним, то можна взяти $\zeta = 0$. Зважаючи на те, що $y_n = -M(1+na)$ при $n = 1, \dots, k+1$, при $-a(k+1) > 1$ можна знайти число $\alpha \in \{0, \dots, k+1\}$ таке, що $y_n \le 0, n \in \{0, \dots, \alpha\}$, і $y_n > 0$ для всіх $n \in I = \{\alpha+1, \dots, \alpha+k+1\}$.

Визначимо

$$\rho(M) = \max_{n \in I} \{y_n\}.$$

Нехай виконується одна з умов

$$\begin{gathered} -a(k+1) \le 1, \\ -a(k+1) > 1, \ M^{-1}\rho(M) \le 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Наступне твердження є дискретним аналогом теореми 2.4 роботи [9].

Лема 1. *Припустимо, що f_n задовольняє умови* $\mathrm{H}_1)$, $\mathrm{H}_2)$ *і виконується одна з умов (11). Тоді для кожного розв'язку $x_n : \{\tau - k, \ldots, +\infty) \to \mathbb{R}$ рівняння (1) виконується нерівність*

$$|x_n| \le \max_{s \in \{\tau-k,\ldots,\tau+2k\}} |x_s| \quad \textit{для всіх} \quad n \ge \tau. \tag{12}$$

Доведення. Припустимо, що нерівність (12) не виконується. Тоді існує розв'язок $\{x_n\}$ такий, що для деякого $\tau_* > \tau + 2k$ маємо

$$|x_{\tau_*}| > \max_{s \in \{\tau-k,\ldots,\tau+2k\}} |x_s|. \tag{13}$$

Нехай τ_* — перша зліва точка з цією властивістю, і для визначеності припустимо, що $x_{\tau_*} > 0$. Доведемо існування такого інтервалу $\Delta = \{\alpha, \ldots, \beta\}$, що $\tau_* \in \Delta, \tau_* - \alpha \le k+1$, $x_\alpha \le 0, x_\beta \le 0$ і $x_n > 0$ для $n \in \{\alpha+1, \ldots, \beta-1\}$. Нехай, навпаки, $x_n > 0$ для всіх $n \in \{\tau_* - k - 1, \ldots, \tau_* - 1\}$. Тоді згідно з (4)

$$x_{\tau_*} = x_{\tau_*-1} + f_{\tau_*-1}(\phi_{\tau_*-1}) < x_{\tau_*-1},$$

що суперечить припущенню. Найменше $n > \tau_*$ таке, що $x_n \le 0$, приймаємо за β. Якщо такого n немає, то $x_n > 0$ для всіх $n > \alpha$. Тоді $f_n(\phi_n) \le 0$ і $x_{n+1} = x_n + f_n(\phi_n) \le x_n$. Тому існує таке число $A \ge 0$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Якщо $A > 0$, то згідно з умовою $\mathrm{H}_1)$ для всіх $n > n_1$ виконується

$$x_n = x_{n_1} + \sum_{s=n_1}^{n-1} f_s(\phi_s) \to -\infty.$$

Отримали суперечність щодо вибору числа A. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\beta = +\infty$.

Нехай $-a(k+1) \le 1$. Позначимо $M = \max_{n \in \Delta} \{x_n\} = x_\xi > 0$, де ξ — найменше ціле число, яке має цю властивість. Розглянемо на інтервалі $\{\alpha, \ldots, \xi\}$ розв'язок $\{x_n\}$ рівняння (1) та розв'язок $\{y_n(\alpha, -M)\}$ рівняння

$$y_{n+1} = y_n - aM, x_\alpha = y_\alpha, n \in \{\alpha, \ldots, \xi\}. \tag{14}$$

Тоді при $n \in \{\alpha, \ldots, \xi\}$

$$x_n = x_\alpha + \sum_{i=\alpha}^{n-1} f_i(\phi_i) \le y_\alpha + \sum_{i=\alpha}^{n-1} a\left(-\mathcal{M}(-\phi_i)\right) < y_\alpha - (n-\alpha)aM = y_n.$$

Маємо нерівність $x_n < y_n$, яку оцінимо в точці $n = \xi$:

$$M = x_\xi < y_\xi = y_\alpha - (\xi - \alpha)\, aM \le -(\xi - \alpha)\, aM \le -(k+1)\, aM,$$

а це суперечить першій з умов (11).

Тепер нехай $-(k+1)a > 1$. Розглянемо розв'язок рівняння (10) такий, що $y_\alpha = x_\alpha \le 0$ і $y_n = -M$ при $n \le 0$.

Покажемо, що на інтервалі $\Sigma = \{-k, \ldots, \alpha\}$ для розв'язків рівнянь (1) та (10) виконується $x_n > y_n$. Очевидно, що для всіх $n \in \{-k, \ldots, 0\}$ $x_n > y_n$, оскільки $|x_n| < M$ для всіх $n \in \{\tau, \ldots, \xi - 1\} \supset \{-k, \ldots, 0\}$. Припустимо, що існує така точка $l \in \{0, \ldots, \alpha - 1\}$, в якій $x_l = y_l$. Порівняємо розв'язки рівнянь (1), (10) для всіх $n \in \{l, \ldots, \alpha\}$:

$$y_n = y_l - (n-l)\, aM,$$

$$x_n = x_l + \sum_{i=l}^{n-1} f_i(\phi_i) < y_l - (n-l)\, aM = y_n,$$

а це суперечить тому, що $x_\alpha = y_\alpha$. Звідси випливає, що $x_n > y_n$ для всіх $-k \le n < \alpha$.

Тепер розглянемо розв'язки рівнянь (1) та (10) на інтервалі $I = \{\alpha, \ldots, \alpha + k + 1\}$. Нехай $I = I_1 \cup I_2$, де $I_1 = \{\alpha, \ldots, k\}, I_2 = \{k+1, \ldots, \alpha + k + 1\}$. При $n \in I_1$ маємо

$$x_n = x_\alpha + \sum_{i=\alpha}^{n-1} f_i(\phi_i) < y_\alpha - \sum_{i=\alpha}^{n-1} aM = y_n,$$

при $n \in I_2$

$$x_n = x_k + \sum_{i=k}^{n-1} f_i(\phi_i) < y_k + a \sum_{i=k}^{n-1} y_{i-k} = y_n.$$

У загальному випадку $x_n < y_n$ для всіх $n \in I$. Оцінюючи останню нерівність в точці $n = \xi$, отримуємо

$$M = x_\xi < y_\xi = \rho(M),$$

що суперечить припущенню (11). Отже, при виконанні умов леми припущення про існування точки τ_*, в якій виконується нерівність (13), приводить до суперечності.

Лему доведено.

Наслідок 1. *За умов леми 1 нульовий розв'язок рівняння (1) є стійким:*

$$\max_{j=n-k,\ldots,n} |x_j| \le \exp(-3ake^{-1}) \max_{j=s-k,\ldots,s} |x_j|, \quad n \ge s.$$

Доведення. Розглянемо розв'язок $\{x_n\}$ на інтервалі $\{s-k,\ldots,s+2k\}$, $s\in\mathbb{Z}$. Нехай $\xi\in\{s,\ldots,s+2k\}$ — точка локального максимуму розв'язку $\{x_n\}$. Тоді існують точки $\alpha\in\{\xi-k-1,\ldots,\xi-1\}$ і $\beta>\alpha$ такі, що $x_\alpha\le 0, x_i>0, i=\alpha+1,\ldots,\beta-1$, і $x_\beta\le 0$, $\beta=s+2k$. Позначимо $\max\limits_{n=\alpha,\ldots,\beta}\{x_n\}=x_{\alpha+\delta}>0$ і $M_0=\max\limits_{n=s-k,\ldots,s}|x_n|$. Тоді

$$x_{\alpha+\delta}=x_\alpha+\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\delta-1}f_i\left(\phi_i\right)\le\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\delta-1}a\left(-\mathcal{M}\left(-\phi_i\right)\right)=-M_0a\delta.$$

Продовжуючи аналогічно, показуємо, що на інтервалі $\{s-k,\ldots,s+2k\}$ існує $m\ge 1$ аналогічних чисел $\alpha_i+\delta_i$. Тоді

$$\max_{j=s,\ldots,s+2k}|x_j|=\max_{i=1,\ldots,m}|x_{\alpha_i+\delta_i}|\le M_0\prod_{i=1}^m(-a\delta_i)\le$$

$$\le M_0\left(\frac{-a\sum\delta_i}{m}\right)^m\le M_0\left(\frac{-3ak}{m}\right)^m\le M_0\exp\left(\frac{-3ak}{e}\right).$$

Наслідок доведено.

При виконанні умови (11) ми довели обмеженість розв'язків рівняння (1). Тому для розв'язку $\{x_n\}$ існують $M=\limsup_{n\to\infty}x_n$ і $m=\liminf_{n\to\infty}x_n$. У цьому випадку існують дві послідовності точок ξ_j,δ_j локального максимуму і локального мінімуму відповідно таких, що $x(\xi_j)=M_j\to M, x(\delta_j)=m_j\to m$ і $\xi_j,\delta_j\to+\infty$ при $j\to\infty$.

Лема 2. *Існують такі* $n\in\{\delta_j-k-1,\ldots,\delta_j-1\}$ *та* $l\in\{\xi_j-k-1,\ldots,\xi_j-1\}$, *що* $x_n>0$ *і* $x_l<0$.

Доведення. Візьмемо одне з δ_j. Якщо $x_n\le 0$ для всіх $n\in\{\delta_j-k-1,\ldots,\delta_j-1\}$, то $x_{\delta_j}-x_{\delta_{j-1}}=f_{\delta_{j-1}}(\phi_{\delta_{j-1}})\ge 0$, що суперечить вибору точки x_{δ_j}. Інший випадок розглядається аналогічно.

Лема 3. *Якщо* $m\ge 0$ *або* $M\le 0$, *то* $M=m=0$.

Доведення. Припустимо, що $M<0$. Тоді $x_n<M/2<0$ починаючи з деякого $n=n_1$. Тому виконується $x_{n+1}=x_n+f_n(\phi_n)\ge x_n,\ n\ge n_1+k$. Звідси розв'язок $\{x_n\}$ прямує монотонно до від'ємного значення M. Маємо суперечність, оскільки згідно з умовою H_1)

$$x_n=x_{n_1}+\sum_{s=n_1}^{n-1}f_s(\phi_s)\to+\infty.$$

Розглянемо тепер розв'язок при $M=0$ і $m<0$. В цьому випадку $\{x_n\}$ обов'язково коливається біля нуля. Справді, оскільки інакше $x_n\le 0$ і тому $x_{n+1}-x_n=f_n(\phi_n)\ge 0$, $\{x_n\}$ прямує монотонно до тривіального стійкого положення рівноваги. З того, що $\{x_n\}$ — коливний розв'язок, можна знайти послідовність цілих інтервалів $I_j=\{l_j,r_j\}$ таких, що $x_n<0, l_j+1\le n\le r_j-1$ і $\min_{I_j}x_n=x_{\delta_j}\to m$ при $j\to+\infty$, де δ_j — мінімальна точка з цією властивістю на інтервалі I_j. Згідно з лемою 2 зауважимо, що

$$x_{\delta_j}=x_{l_j}+\sum_{s=l_j}^{\delta_j-1}f_s(\phi_s)\ge\sum_{s=l_j}^{\delta_j-1}f_s(\phi_s)\ge(k+1)a\max_{n\in\{l_j-k,l_j\}}x_n\to 0,\ j\to+\infty,$$

а це суперечить відношенню $x_{\delta_j} \to m < 0$.

Випадок $m \geq 0$ розглядається аналогічно.

Зауваження 1. Якщо розглянути розв'язок $\{y_n\}$ рівняння (10), то існує таке ціле число $s \in \{0, \ldots, k\}$, що $y_{\alpha-s} > -M$ і $y_{\alpha-s-1} = -M$, де $\alpha = s+1$, $y_\alpha = (m-\varepsilon)(1+(s+1))$. Нехай значення $\rho(M)$ досягається в точці $n = k+1+s$, тобто

$$\rho(M) = \max_{n \in I}\{y_n\} = y_{k+1+s} =$$

$$= -M\left(1 + as + a + a^2 s(s+1) + ak - a^2 \frac{s(s+1)}{2}\right) =$$

$$= -M\left(1 + a(s+k+1) + a^2 \frac{s(s+1)}{2}\right).$$

Тому при виконанні умов теореми 2 умови (11) виконуються автоматично, що дозволяє використати лему 1 при доведенні теореми 2.

3. Доведення теореми 2. З леми 1 та зауваження 1 випливає, що при виконанні умов теореми всі розв'язки рівняння (1) є обмеженими. З огляду на лему 3 досить розглянути коливний розв'язок $\{x_n\}$ рівняння (1) з $m < 0 < M$. Існують дві послідовності точок ξ_j, δ_j локального максимуму і локального мінімуму таких, що $\lim x(\xi_j) \to M$, $\lim x(\delta_j) \to m$, $\xi_j \to \infty$, $\delta_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Тоді при довільному $\varepsilon > 0$ і досить великих j виконується $x(\xi_j) < M + \varepsilon, x(\delta_j) > m - \varepsilon$.

Згідно з лемою 2 для ξ_j існує число $\alpha'_j \in \{\xi_j - k - 1, \ldots, \xi_j - 1\}$ таке, що $0 \geq x(\alpha'_j) = -\mathcal{M}\left(-\phi_{\xi_j - 1}\right)$, а для δ_j буде існувати число $\alpha'^{*}_j \in \{\delta_j - k - 1, \ldots, \delta_j - 1\}$ таке, що $0 \leq x(\alpha'^{*}_j) = \mathcal{M}\left(\phi_{\delta_j - 1}\right)$. Як і раніше, $\phi_s = (x_s, \ldots, x_{s-k})$.

З нерівності

$$x_{\alpha'_j} = x_{\alpha'_j - 1} + f_{\alpha'_j - 1}\left(x_{\alpha'_j - 1}, \ldots, x_{\alpha'_j - k - 1}\right) \leq x_{\alpha'_j - 1} + a(m - \varepsilon)$$

отримуємо оцінку $x_{\alpha'_j - 1} \geq x_{\alpha'_j} - a(m-\varepsilon) = z_{\alpha'_j - 1}$. Аналогічно

$$x_{\alpha'_j - l} \geq x_{\alpha'_j} - al(m - \varepsilon) = z_{\alpha'_j - l}. \tag{15}$$

При $l = 0$ покладемо $x_{\alpha'_j} = z_{\alpha'_j}$. Позначимо через $s \in \{0, \ldots, k\}$ таке ціле число, що $z_{\alpha'_j - s} > m - \varepsilon$ і $z_{\alpha'_j - s - 1} \leq m - \varepsilon$. Тоді при $s \geq 1$

$$(m - \varepsilon)(1 + as) < x_{\alpha'_j} \leq (m - \varepsilon)(1 + a(s+1)). \tag{16}$$

Врахувавши (15), оцінимо x_{ξ_j}:

$$M_j = x_{\xi_j} = x_{\alpha'_j} + \sum_{i=\alpha'_j}^{\xi_j - 1} f_i(\phi_i) \le x_{\alpha'_j} + \sum_{i=\alpha'_j}^{\xi_j - 1} a(-\mathcal{M}(-\phi_i)) \le$$

$$\le x_{\alpha'_j} + \sum_{l=0}^{k} a\left(-\mathcal{M}\left(-\phi_{l+\alpha'_j}\right)\right) \le$$

$$\le x_{\alpha'_j} + \sum_{l=0}^{s} a\left(x_{\alpha'_j} - al(m-\varepsilon)\right) + \sum_{l=s+1}^{k} a(m-\varepsilon) =$$

$$= x_{\alpha'_j} + a(m-\varepsilon)(k-s) + ax_{\alpha'_j}(s+1) - a^2(m-\varepsilon)\sum_{l=0}^{s} l =$$

$$= x_{\alpha'_j}(1 + a(s+1)) + a(m-\varepsilon)\left(k - s - a\frac{s(s+1)}{2}\right) = S(s, m-\varepsilon).$$

Якщо $1 + a(s+1) \le 0$, то за нерівністю (16)

$$S(s, m-\varepsilon) \le (m-\varepsilon)(1+as)(1+a(s+1)) + a(m-\varepsilon)\left(k - s - a\frac{s(s+1)}{2}\right) =$$

$$= (m-\varepsilon)\left(1 + as + a + a^2 s(s+1) + ak - a^2\frac{s(s+1)}{2}\right) = (m-\varepsilon)\Omega(s,k,a).$$

Якщо $1 + a(s+1) \ge 0$, то

$$S(s, m-\varepsilon) \le (m-\varepsilon)(1+a(s+1))^2 + a(m-\varepsilon)\left(k - s - a\frac{s(s+1)}{2}\right) =$$

$$= (m-\varepsilon)\left(1 + a(s+k+2) + a^2\frac{s^2+3s+2}{2}\right) =$$

$$= (m-\varepsilon)\left(1 + a(s+k+2) + a^2\frac{(s+1)(s+2)}{2}\right) =$$

$$= (m-\varepsilon)\Omega(s+1,k,a).$$

Окремо розглянемо випадок для $1 + a(s+1) \geq 0$ при $s = k$. Отримуємо

$$S\,(k, m-\varepsilon) = (m-\varepsilon)\Omega\,(k+1, k, a) =$$

$$= (m-\varepsilon)\left(1 + a\,(2k+2) + a^2\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right) \leq$$

$$\leq (m-\varepsilon)\left(1 - 2 + \frac{(k+1)\,(k+2)}{2(k+1)^2}\right) = (m-\varepsilon)\frac{-k}{2(k+1)} < -(m-\varepsilon).$$

Враховуючи останню нерівність та (8), при граничному переході $\varepsilon \to 0$ отримуємо

$$M \leq S(s,m) \leq m \min_{s=0,\ldots,k} \Omega\,(s,k,a) < -m. \tag{17}$$

Виконаємо аналогічні дії для точок $\{x_{\delta_j}\}$. Відповідними до нерівностей (15), (16) будуть

$$x_{\alpha_j'^*-l} \leq x_{\alpha_j'^*} - al\,(M+\varepsilon) = z_{\alpha_j'^*-l}, \tag{18}$$

$$(M+\varepsilon)(1+a(s+1)) \leq x_{\alpha_j'^*} < (M+\varepsilon)(1+as) \tag{19}$$

для таких значень $s \in \{0,\ldots,k\}$, що $z_{\alpha_j'^*-s} < M+\varepsilon, z_{\alpha_j'^*-s-1} \geq M+\varepsilon$. Далі, враховуючи (18), виконуємо аналогічні перетворення

$$m_j = x_{\delta_j} = x_{\alpha_j'^*} + \sum_{i=\alpha_j'^*}^{\delta_j-1} f_i\,(\phi_i) \geq x_{\alpha_j'^*} + \sum_{i=\alpha_j'^*}^{\delta_j-1} a\,(\mathcal{M}\,(\phi_i)) \geq$$

$$\geq x_{\alpha_j'^*} + \sum_{l=0}^{s} a\left(x_{\alpha_j'^*} - al(M+\varepsilon)\right) + \sum_{l=s+1}^{k} a(M+\varepsilon) =$$

$$= x_{\alpha_j'^*} + a(M+\varepsilon)\,(k-s) + ax_{\alpha_j'^*}\,(s+1) - a^2(M+\varepsilon)\sum_{l=0}^{s} l =$$

$$= x_{\alpha_j'^*}\,(1 + a\,(s+1)) + a(M+\varepsilon)\left(k - s - a\frac{s\,(s+1)}{2}\right) = S\,(s, M+\varepsilon)\,.$$

Якщо $1 + a(s+1) \leq 0$, то за нерівністю (19)

$$S\,(s, M+\varepsilon) \geq (M+\varepsilon)\left(1 + as + a + a^2 s\,(s+1) + ak - a^2\frac{s\,(s+1)}{2}\right) =$$

$$= (M+\varepsilon)\Omega\,(s,k,a)\,.$$

Якщо $1 + a(s+1) \geq 0$, то

$$S(s, M+\varepsilon) = (M+\varepsilon)\left(1 + a(s+k+2) + a^2\frac{(s+1)(s+2)}{2}\right) =$$

$$= (M+\varepsilon)\Omega(s+1, k, a).$$

Для $1 + a(s+1) \geq 0$ при $s = k$ отримуємо

$$S(k, M+\varepsilon) = (M+\varepsilon)\Omega(k+1, k, a) \geq (M+\varepsilon)\frac{-k}{2(k+1)} > -(M+\varepsilon).$$

При граничному переході $\varepsilon \to 0$ маємо

$$m \geq S(s, M) \geq M \min_{s=0,\ldots,k} \Omega(s, k, a) > -M. \tag{20}$$

Враховуючи оцінки (17), (20), одержуємо

$$M < -m < -(-M) = M,$$

з чого випливає, що $m = M = 0$.

Теорему доведено.

Насамкінець встановимо точну природу умови $\min_{0\leq s\leq k}\Omega(s, a, k) > -1$. Дійсно, візьмемо параметри (a, k) такі, що $\Omega(s_0, a, k) = \min_s \Omega(s, a, k) \leq -1$ для деякого цілого $s_0 \in \in [0, k]$. Означимо $(k + s_0 + 1)$-періодичну функцію $h : Z \to \{0, \ldots, k\}$ через $h(j) = j$ для $0 \leq j \leq k$ і $h(j) = k$ для $k+1 \leq j \leq k+s_0$. Тепер розглянемо $(k + s_0 + 1)$-періодичне лінійне різницеве рівняння $x_{n+1} = x_n + ax_{n-k(n)}$, $n \in Z$. Використовуючи формулу варіації сталої, отримуємо

$$x_j = x_0 + \sum_{i=0}^{j-1} ax_{i-h(i)} = x_0 + \sum_{i=0}^{j-1} ax_0 = x_0(1 + aj)$$

для всіх $j \in \{1, \ldots, k+1\}$. Тому

$$x_{k+s_0+1} = x_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{k+s_0} ax_{j-h(j)} = x_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{k+s_0} ax_{j-k} =$$

$$= x_0(1 + a(k+1)) + \sum_{j=1}^{s_0} ax_j =$$

$$= x_0(1 + a(k+1)) + ax_0\sum_{j=1}^{s_0}(1 + aj) = x_0\Omega(s_0, a, k).$$

Отже, $x_{m(k+1+s_0)} = x_0\Omega^m(s_0, a, k)$, $m = 1, 2, \ldots$, так що всі розв'язки рівняння необмежені, якщо $\Omega(s_0, a, k) < -1$. Якщо $\Omega(s_0, a, k) = -1$, то всі розв'язки рівняння періодичні.

1. *Liz E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Global stability in discrete population models with delayed-density dependence // Math. Biosci. — 2006. — **199**. — P. 26 – 37.
2. *El-Morshedy H. A., Liz E.* Convergence to equilibria in discrete population model // J. Different. Equat. and Appl. — 2005. — **11**. — P. 117 – 131.
3. *Kocic V. L., Ladas.* Global asymptotic behaviour of nonlinear difference equations of higher order with applications. — Dordrecht: Kluwer Acad., 1993.
4. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. — Acad. Press, 1993.
5. *Li X.* Global attractivity in a genotype selection model // Int. J. Math. and Math. Sci. — 2002. – **29**, № 9. — P. 537 – 544.
6. *Tkachenko V., Trofimchuk S.* A global attractivity criterion for nonliner non-autonomous difference equations // J. Math. Anal. and Appl. — 2006. — **322**. — P. 901 – 912.
7. *Matsunaga H., Hara T., Sakata S.* Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. — 2001. — **41**. — P. 543 – 551.
8. *Неня О. І., Ткаченко В. І., Трофимчук С. І.* Про глобальну стійкість одного нелінійного рівняння // Нелінійні коливання. — 2004. – **7**, № 4. — P. 487 – 494.
9. *Ivanov A., Liz E., Trofimchuk S.* Halanay inequality, Yorke 3/2 stability criterion, and differential equations with maxima // Tohoku Math. J. — 2002. — **54**. — P. 277 – 295.

Одержано 31.07.2006