

ДИНАМІКА ВЗАЄМОДІЇ КОНФЛІКТУ МІЖ СИСТЕМАМИ З ВНУТРІШНЬОЮ СТРУКТУРОЮ*

М. В. Боднарчук, В. Д. Кошманенко, І. В. Самойленко

Ін-т математики НАН України

Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We study a dynamic system of conflict between a pair of systems each of which, in its turn, has in internal conflict. The external and internal conflicts have different natures. The external conflict is described as an alternative interaction between nonannulling adversaries. The internal conflict is similar to a conflict between interrelated populations of different biological nature (the “predator-prey” model). We construct a computer model of such a system, and obtain typical behaviors, illustrated with diagrams, which can be interpreted as migration of the labor and the investment flow between countries.

Исследуется динамическая система конфликта между парой систем, каждая из которых, в свою очередь, является внутренне конфликтной. Внешний и внутренний конфликты имеют разный характер. Внешний описывается альтернативным взаимодействием неуничтожимых противников. Внутренний имеет характер борьбы между взаимно связанными популяциями разных биологических видов (модель типа „хищник-жертва”). Построена компьютерная модель такой системы, получен ряд иллюстрированного графиками типового поведения, которое можно интерпретировать, в частности, как миграцию рабочей силы и инвестиций между странами.

1. Вступ. Математичну версію конфліктної взаємодії в моделі типу „хижак-жертва” було запропоновано в роботах Лотки та Вольтерри ще на початку ХХ століття [1, 2]. Ця модель у різних модифікаціях і досі є однією з основних у математичній біології, демографії, екології та економіці (див., наприклад, [3–11]). На цій моделі ґрунтується не лише теорія популяцій, але і велика кількість сучасних досліджень у задачах оптимізації, передбачень і навіть процесів глобалізації. Звичайно, досліджуються моделі в неперервному часі. Досить популярною є логістична модель, а також модель Рікера [10]. Зазначимо, що в більшості робіт вивчається конфліктна взаємодія „хижак-жертва” в фіксованому регіоні. Можливість міграції з одного регіону в інший, як правило, не припускається. Хоча в деяких роботах [9, 10] розглядаються моделі з випадковою міграцією (міграція без фіксованої стратегії).

В даній роботі побудовано складну модель конфліктної взаємодії, в якій використано дві найменш досліджені постановки задачі в підході Лотки–Вольтерри. А саме, описано процес міграції з фіксованою стратегією в дискретному часі.

Зауважимо, що процеси в дискретному часі є цілком природними в багатьох випадках. Зокрема, народження та смерть індивідів описуються не в неперервному часі, а в дискретному. А міграційні процеси (тварин або робочої сили), звичайно, не є випадковими, а обумовлені стратегічними законами (планетарного характеру чи світової економіки).

Основною метою більшості робіт є аналітичний та графічний опис популяцій, пошук стабільних (нерухомих) точок та циклічних траєкторій, аналіз їх стійкості, знаходження

* Частково підтримано проектами DFG 436 UKR 113/67, 113/78 та INTAS 00-257.

точок біфуркацій та аналіз залежності конкретних еволюцій від параметрів у відповідних рівняннях.

Опишемо коротко постановку задачі, яку ми досліджуємо. Будемо розглядати складну систему, яка містить дві підсистеми: A та B . Кожна з підсистем — це скінченний набір невід’ємних чисел: $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_N)$ для A та $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$ для B , де N — кількість координат, які відповідають кількості конфліктних позицій. Отже, еволюція складної системи описується двома послідовностями векторів із невід’ємними координатами: $\mathbf{P}^n = (P_1^{(n)}, \dots, P_N^{(n)})$ для A та $\mathbf{R}^n = (R_1^{(n)}, \dots, R_N^{(n)})$ для B , $P_i^{(n)}, R_i^{(n)} \geq 0$, де $n = 1, 2, \dots$ — моменти дискретного часу. Моменту $n = 0$ відповідають початкові вектори \mathbf{P} та \mathbf{R} . В загальній постановці природна „мета” кожної з підсистем — оптимізувати в якомусь сенсі значення всіх своїх координат. В дійсності кожна координата змінюється досить складним чином під впливом подвійної конфліктної взаємодії між підсистемами та всередині кожної з них. Закони взаємодії ще потрібно задати. Таким чином, еволюція кожного стану складної системи має нелінійну залежність від конфліктної взаємодії між підсистемами, введеної в наступному пункті, та змін конфліктного характеру всередині кожної з підсистем, які описуються на основі підходу Лотки–Вольтерри (див. п. 3). При цьому, як звичайно, припускається, що елементи кожної з підсистем поділяються на два класи: домінуючі (хижаки, експлуататори) та підлеглі (жертви, робітники). Отже, кожен з координат $P_i^{(n)}, R_i^{(n)}$ можна інтерпретувати як кількість (популяцію) домінуючого або підлеглого класу в позиції i на момент часу n . Докладно математичну композицію, яка визначає еволюцію координат у кожній із підсистем, описано в п. 3 (див. формули (3.1)–(3.3)). При цьому використано відому концепцію різницевого варіанту рівняння Лотки–Вольтерри. Повну математичну композицію конфліктної взаємодії введено у припущенні, що зовнішня взаємодія між підсистемами має характер альтернативного конфлікту між незнищеними системами, який досліджено в роботах [12–18]. Власне, задача полягає в дослідженні складної динамічної системи, що виникає у просторі $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N$, на основі композиції між векторами з \mathbb{R}_+^N , заданими формулами (3.2), (3.3).

У п. 4, який містить основні результати роботи, досліджено динаміку цієї системи з використанням методу комп’ютерного моделювання. При цьому виявлено ряд цікавих феноменів. У цій роботі ми акцентуємо увагу лише на одному спостереженні, а саме, помічаємо, що при певному підборі початкових даних складна система починає пульсувати і притягуватися до інваріантної множини, що утворює циклічну траєкторію. Має місце стійкість цього граничного циклу. Отже, він є атрактором.

В п. 5 запропоновано інтерпретацію даної моделі в термінах міграційних процесів.

2. Взаємодія альтернативного конфлікту між незнищеними системами. В цьому пункті вивчається динаміка дискретного конфлікту між незнищеними противниками чи опонентами; ми називаємо їх системами (докладніше див. [12–18]).

Закон конфліктної взаємодії має характер імовірнісної альтернативної присутності опонента в кожній із спірних позицій. Тобто в кожній позиції в кожен момент часу може бути тільки одна із систем лише з деякою ймовірністю. *A priori* системи існують завжди з імовірністю одиниця. В цьому сенсі вони є незнищеними.

Опишемо в явній формі цей закон.

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, $N \geq 2$, — скінченна множина позицій, які претендує зайняти (окупувати) кожна з альтернативних систем (противників) A та B . Повна ймовірність наявності в Ω кожної з систем є сталою: $P_A(\Omega) = P_B(\Omega) = 1$. Початковий стан задається

довільним розподілом імовірностей наявності систем A та B в різних позиціях:

$$P_A(\omega_i) = p_i \geq 0, \quad P_B(\omega_i) = r_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1 = \sum_{i=1}^N r_i.$$

Суть взаємодії альтернативного конфлікту полягає у фізичній неможливості окупувати довільну спірну позицію ω_i противниками A та B одночасно. Це призводить до певної боротьби між системами, в результаті якої в момент часу $t = 1$ відбувається перерозподіл початкових імовірностей $p_i^{(0)} := p_i, r_i^{(0)} := r_i$, де нуль відповідає моменту часу $t = 0$. Взагалі, закон перерозподілу є невідомим. Для визначення нових значень імовірностей наявності $p_i^{(1)}, r_i^{(1)}$ будемо використовувати формули

$$p_i^{(1)} = \frac{p_i^{(0)}(1 - \alpha r_i^{(0)})}{1 - \alpha \sum_{i=1}^N p_i^{(0)} r_i^{(0)}}, \quad r_i^{(1)} = \frac{r_i^{(0)}(1 - \alpha p_i^{(0)})}{1 - \alpha \sum_{i=1}^N p_i^{(0)} r_i^{(0)}}, \quad (2.1)$$

де коефіцієнт $\alpha \neq 0, -1 \leq \alpha \leq 1$, характеризує інтенсивність взаємодії. Цей закон композиції є, очевидно, нелінійним і некомутативним.

У термінах стохастичних векторів $\mathbf{p}^0 = (p_1^{(0)}, \dots, p_N^{(0)})$, $\mathbf{r}^0 = (r_1^{(0)}, \dots, r_N^{(0)})$ (тобто векторів з одиничною l_1 -нормою) описану композицію альтернативного конфлікту позначаємо символом $*$ і записуємо у вигляді

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 * \mathbf{r}^0, \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{r}^0 * \mathbf{p}^0,$$

де нові стохастичні вектори $\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1$ мають координати (2.1). Аналогічно визначаються наступні результати конфліктної взаємодії в моменти часу $t = 2, 3, \dots$. Наприклад, на n -му кроці одержуємо вектори

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{p}^{n-1} * \mathbf{r}^{n-1}, \quad \mathbf{r}^n = \mathbf{r}^{n-1} * \mathbf{p}^{n-1}$$

з координатами

$$p_i^{(n)} = \frac{p_i^{(n-1)}(1 - \alpha r_i^{(n-1)})}{z_n}, \quad r_i^{(n)} = \frac{r_i^{(n-1)}(1 - \alpha p_i^{(n-1)})}{z_n}, \quad (2.2)$$

де нормуючий коефіцієнт $z_n = 1 - \alpha(\mathbf{p}^{n-1}, \mathbf{r}^{n-1})$ визначається умовою незнищеності: $\|\mathbf{p}^n\|_{l_1} = \|\mathbf{r}^n\|_{l_1} = 1$, (\cdot, \cdot) позначає скалярний добуток в \mathbb{R}^N .

Динаміку альтернативного конфлікту між довільною парою стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^N$ досліджено досить детально в роботах [12–15] (див. також [16–18]). Наведемо відповідні результати у вигляді теорем.

Теорема 2.1. Для кожної пари стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^N$, $0 < (\mathbf{p}, \mathbf{r})$ (за винятком випадку $p_i^{(0)} = r_i^{(0)} = 1, i = 1, \dots, N$) та фіксованого параметра інтенсивності взаємодії $\alpha \neq 0, -1 \leq \alpha \leq 1$, з умовою $\alpha \neq \frac{1}{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}$ існують границі

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}^n, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}^n.$$

При цьому граничний стан $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ є інваріантним відносно конфліктної взаємодії:

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}^\infty * \mathbf{r}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}^\infty * \mathbf{p}^\infty.$$

Більш того,

$$\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty, \quad \text{якщо } \mathbf{p} \neq \mathbf{r} \text{ та } 0 < \alpha \leq 1,$$

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty \quad \text{в усіх інших випадках.}$$

На рис. 1 наведено типовий варіант динаміки альтернативного конфлікту з трьома спірними позиціями.

Щоб описати граничні розподіли ймовірностей $p_i^{(\infty)}, r_i^{(\infty)}$ у випадку взаємодії відштовхування при $0 < \alpha \leq 1$, введемо деякі позначення. Для фіксованої пари початкових неортогональних і нетотожних стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^N$ введемо різниці координат: $d_i := p_i - r_i, i = 1, \dots, N$. Далі, серед усіх спірних позицій виділимо три підмножини:

$$\Omega_+ := \{\omega_i | i \in \mathbf{N}_+\}, \quad \Omega_- := \{\omega_i | i \in \mathbf{N}_-\} \quad \text{та} \quad \Omega_0 := \{\omega_i | i \in \mathbf{N}_0\},$$

де

$$\mathbf{N}_+ := \{i : d_i > 0\}, \quad \mathbf{N}_- := \{i : d_i < 0\} \quad \text{та} \quad \mathbf{N}_0 := \{i : d_i = 0\}.$$

Позначимо

$$D_+ := \sum_{i \in \mathbf{N}_+} d_i, \quad D_- := \sum_{i \in \mathbf{N}_-} d_i.$$

Внаслідок стохастичності векторів \mathbf{p} та \mathbf{r} маємо

$$D_+ + D_- = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n r_i = 0.$$

Тому можна ввести $D := D_+ = -D_-$.

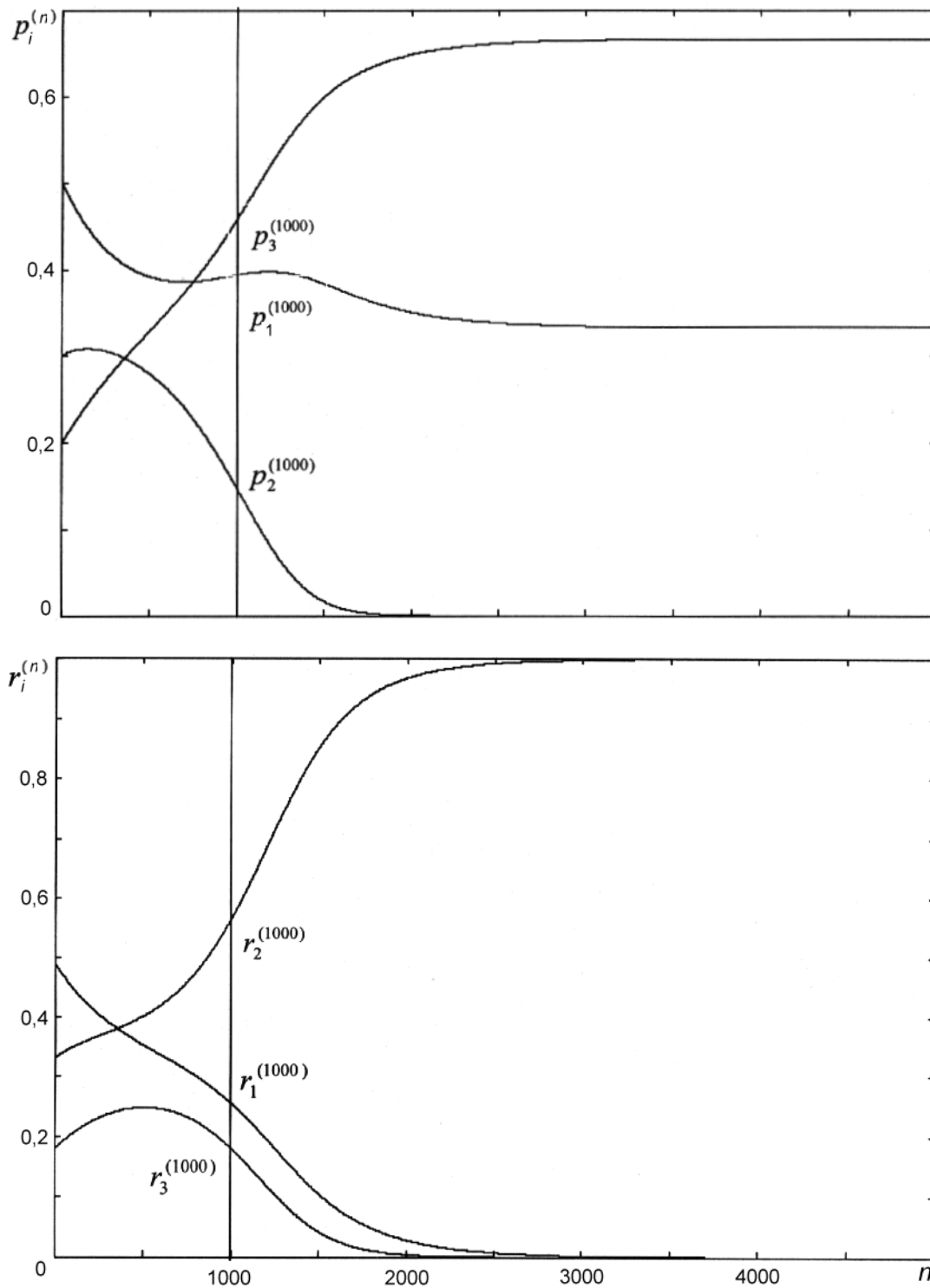


Рис. 1. Типовий варіант динаміки альтернативного конфлікту з трьома позиціями, початковий стан системи $p^0 = (0, 5; 0, 3; 0, 2)$, $r^0 = (0, 48; 0, 34; 0, 18)$, інтенсивність конфліктної взаємодії $\alpha = 1$, граничний стан системи $p^\infty = (0, 33; 0, 67)$, $r^\infty = (0; 1; 0)$.

Теорема 2.2. Нехай $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 0, \mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Тоді для довільної інтенсивності взаємодії $0 < \alpha \leq 1$ координати граничних векторів $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ мають такий розподіл:

$$p_i^\infty = \begin{cases} \frac{d_i}{D}, & i \in \mathbf{N}_+, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases} \quad r_i^\infty = \begin{cases} -\frac{d_i}{D}, & i \in \mathbf{N}_-, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Відзначимо цікавий факт. Обидві системи в результаті альтернативного конфлікту неминуче втрачають усі свої позиції (навіть з ненульовою ймовірністю наявності!), де на початку був паритет, $p_i^{(0)} = r_i^{(0)}$. Тобто $p_i^{(\infty)} = r_i^{(\infty)} = 0$ для усіх $i \in \mathbf{N}_0$.

Виявляється, що у випадку притягальної взаємодії $-1 \leq \alpha < 0$ на межі при $n = \infty$ супротивники досягають паритету з усіх спірних позицій. Тому граничні вектори \mathbf{p}^∞ та \mathbf{r}^∞ є рівними. Але питання про те, які саме координати на межі є ненульовими, є досить складним. Воно досліджено лише у випадку $\alpha = -1$ (див. [15]). Сформулюємо відповідний результат.

Позначимо $\mathbb{S}_0 := \{k | p_k^\infty = r_k^\infty = 0\}$ і $\mathbb{S}^\infty := \{1, \dots, n\} \setminus \mathbb{S}_0$.

Теорема 2.3. У випадку чисто притягальної взаємодії $\alpha = -1$ граничні вектори \mathbf{p}^∞ та \mathbf{r}^∞ є рівними і їх координати мають такий розподіл:

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \begin{cases} \frac{1}{m}, & i \in \mathbb{S}^\infty, \\ 0 & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

де $m = |\mathbb{S}^\infty|$ — кількість елементів у множині \mathbb{S}^∞ .

Зауважимо, що координати p_k^∞, r_k^∞ можуть бути нульовими, навіть якщо $p_k \neq 0$ та $r_k \neq 0$. Це трапляється, наприклад, якщо існує позиція ω_i така, що

$$p_i + r_i \geq p_k + r_k \quad \text{та} \quad p_i r_i > p_k r_k.$$

Тобто в цьому випадку $k \in \mathbb{S}_0$. Більш того, $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ і тоді, коли існує i таке, що

$$p_i + r_i < p_k + r_k, \quad p_i r_i > p_k r_k, \quad \text{але} \quad 2p_k r_k + p_k + r_k \leq 2p_i r_i + p_i + r_i.$$

Отже, коли взаємодія є притягальною, деякі позиції з ненульовою стартовою ймовірністю присутності також можуть втрачатися обома опонентами. Питання про повний опис таких позицій для довільного значення $-1 \leq \alpha < 0$ залишається відкритим.

3. Підхід Лотки – Вольтерри. В попередньому пункті координати векторів $\mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{P}$ та $\mathbf{r}^0 \equiv \mathbf{R}$, які відповідають підсистемам A та B , змінювались внаслідок взаємодії альтернативного конфлікту. Тут ми вводимо додаткову конфліктну взаємодію між координатами всередині кожної підсистеми. Ця взаємодія належить до моделі типу „хижак-жертва”.

Нагадаємо коротко її суть. В основу покладемо відоме рівняння Лотки – Вольтерри вигляду

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2, \quad (3.1)$$

де параметри α, β є додатними. В багатьох застосуваннях функція $N(t)$ описує популяцію довільного біологічного виду. В теорії конфліктів, коли стикаються інтереси щонайменше двох видів (типичним прикладом є модель типу „хижак-жертва” (докладніше див., наприклад, [3])), використовується система рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_2 N_1 - \gamma_1 N_1^2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2 N_2 + \beta_2 N_1 N_2 - \gamma_2 N_2^2,\end{aligned}\tag{3.2}$$

де N_1 — кількість жертв, N_2 — кількість хижаків, параметри $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ визначають вільну динаміку відповідної популяції (експоненціальне зростання чи затухання), коефіцієнти $\beta_1, \beta_2 > 0$ — вплив одного виду на інший, а коефіцієнти $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ — вплив самої популяції на себе. Якісний аналіз динамічної системи, породженої рівняннями (3.2), проводився в багатьох роботах (див., наприклад, [4–11]) та бібліографію в [3]).

У випадку дискретного часу рівняння (3.2) набирають вигляду

$$\begin{aligned}P_1^{(n)} &= P_1^{(n-1)} + P_1^{(n-1)}(a - bP_2^{(n-1)} - cP_1^{(n-1)}), \\ P_2^{(n)} &= P_2^{(n-1)} + P_2^{(n-1)}(-d + eP_1^{(n-1)} - fP_2^{(n-1)}),\end{aligned}\tag{3.3}$$

де функції N_1, N_2 замінено на перші дві координати вектора \mathbf{P} в момент часу n . Аналогічні рівняння потрібно записати і для вектора \mathbf{R} . Тут ми спрощуємо ситуацію і припускаємо, що існують лише дві альтернативні позиції у кожній з підсистем. Моделювання систем з більшою, ніж два, кількістю координат призводить до значних ускладнень і потребує додаткового аналізу.

Роль коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відома та досить повно описана в [3, 7]. Зокрема, коефіцієнти a, d зумовлюють вільне зростання популяції жертв (координата P_1) та хижаків (координата P_2). Коефіцієнт b характеризує зменшення кількості жертв при збільшенні хижаків, а коефіцієнт e — збільшення хижаків при збільшенні жертв. Останні коефіцієнти c, f в кожному з рівнянь відповідають за самообмеження росту кожної популяції. Іншими словами, популяція „тисне” сама на себе, не дозволяючи необмеженого розмноження, внаслідок існування граничної щільності насичення життєвого простору.

Відомо, що система рівнянь (3.3), звичайно, має щонайменше три інваріантні точки (точки рівноваги): тривіальну $(0, 0)$, осьову $(a/b, 0)$ та внутрішню з додатними координатами

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} \frac{ae - cd}{be + cf}, \frac{ae - cd}{be + cf} \right).\tag{3.4}$$

Інваріантну точку рівноваги називають стійкою, якщо існує її окіл такий, що при виході з будь-якої точки цього околу координати системи наближаються з часом до координат точки рівноваги. Це може відбуватися як монотонно, так і асимптотично у формі затухаючих коливань.

Зазначимо, що за умови існування стійких інваріантних точок коефіцієнти a, b, c, d, e, f повністю визначають поведінку системи. Однак якщо інваріантні точки рівноваги не стійкі, то еволюція системи може бути досить складною. В залежності від того, як близько

розташовані початкові дані P_i, R_i до координат точок рівноваги, система може описувати принципово різні траєкторії (див., наприклад, [19]).

У випадку складного конфлікту роль усіх цих коефіцієнтів зберігається, але їх вплив на поведінку системи ускладнюється. Наша задача полягає у дослідженні цих кореляцій. При цьому, як уже зазначалося, поряд із точками стабілізації ми виявили такі значення коефіцієнтів, при яких система коливається по деяких замкнених циклах.

4. Модель конфліктної взаємодії між складними системами. В цьому пункті ми будемо складну динамічну систему (модель), яка описує конфліктну взаємодію між парою підсистем, кожна з яких, у свою чергу, містить внутрішній конфлікт між своїми елементами. Для спрощення будемо припускати, що структура підсистем є ідентичною. Отже, ми беремо дві копії моделі типу „хижак-жертва” в дискретному часі (див. (3.3)) і вводимо між ними взаємодію альтернативного конфлікту між незнищеними супротивниками з інтенсивністю α , як описано в п. 2. Зрозуміло, що в такій ситуації „спектр” еволюцій може бути досить багатим.

У цій роботі на основі комп’ютерного моделювання одержано якісну характеристику поведінки відповідної динамічної системи лише для деякого вибору параметрів a, b, c, d, e, f, α та певних значень початкових координат P_i, R_i .

У загальному випадку ми плануємо дослідити динамічну систему, стан якої фіксується парою векторів $\mathbf{P}^n = (P_1^{(n)}, \dots, P_N^{(n)})$, $\mathbf{R}^n = (R_1^{(n)}, \dots, R_N^{(n)})$ з невід’ємними координатами, де $n = 0, 1, \dots$ — дискретний час, $N \geq 2$ — кількість альтернативних позицій конфлікту. Але тут ми розглядаємо найпростішу ситуацію, коли кожна підсистема описується лише двома координатами, які характеризують популяції видів типу жертви та хижака. Відображення

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}^n \\ \mathbf{R}^n \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{n+1} \\ \mathbf{R}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

яке породжує динамічну систему і відповідає складній конфліктній взаємодії, насправді є композицією декількох математичних перетворень $F = \mathcal{N}^{-1} * \mathcal{N}U$. Опишемо їх послідовно в явному вигляді.

Перетворення U описує взаємодію між елементами в кожній підсистемі окремо згідно з моделлю „хижак-жертва”. Відповідна математична композиція векторів $\{\mathbf{P}^0, \mathbf{R}^0\} \xrightarrow{U} \{\tilde{\mathbf{P}}^0, \tilde{\mathbf{R}}^0\}$ описується двома системами рівнянь вигляду (3.3):

$$\tilde{P}_1^{(0)} = P_1^{(0)} + P_1^{(0)}(a - bP_2^{(0)} - cP_1^{(0)}),$$

$$\tilde{P}_2^{(0)} = P_2^{(0)} + P_2^{(0)}(-d + eP_1^{(0)} - fP_2^{(0)})$$

та

$$\tilde{R}_1^{(0)} = R_1^{(0)} + R_1^{(0)}(a - bR_2^{(0)} - cR_1^{(0)}),$$

$$\tilde{R}_2^{(0)} = R_2^{(0)} + R_2^{(0)}(-d + eR_1^{(0)} - fR_2^{(0)}),$$

де перехід до нових значень координат позначено тильдою і не змінено верхній індекс, на відміну від (3.3).

Для виконання перетворення, яке відповідає взаємодії альтернативного конфлікту * (див. (2.1)) між двома підсистемами, необхідно спочатку перенормувати вектори

$$\tilde{\mathbf{P}}^0 = (\tilde{P}_1^{(0)}, \tilde{P}_2^{(0)}), \quad \tilde{\mathbf{R}}^0 = (\tilde{R}_1^{(0)}, \tilde{R}_2^{(0)})$$

таким чином, щоб вони стали стохастичними. Ми перенормуємо ці вектори $\mathcal{N}\{\tilde{\mathbf{P}}^0, \tilde{\mathbf{R}}^0\} = \{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\}$ таким чином, що координати стохастичних векторів $\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0$ визначаються формулами

$$p_1^{(0)} = \frac{\tilde{P}_1^{(0)}}{\tilde{z}_P^{(0)}}, \quad p_2^{(0)} = \frac{\tilde{P}_2^{(0)}}{\tilde{z}_P^{(0)}},$$

$$r_1^{(0)} = \frac{\tilde{R}_1^{(0)}}{\tilde{z}_R^{(0)}}, \quad r_2^{(0)} = \frac{\tilde{R}_2^{(0)}}{\tilde{z}_R^{(0)}},$$

де

$$\tilde{z}_P^{(0)} = \tilde{P}_1^{(0)} + \tilde{P}_2^{(0)}, \quad \tilde{z}_R^{(0)} = \tilde{R}_1^{(0)} + \tilde{R}_2^{(0)}.$$

Далі відбувається взаємодія альтернативного конфлікту між підсистемами, згідно з формулою (2.1):

$$p_j^{(1)} = \frac{p_j^{(0)}(1 - \alpha r_j^{(0)})}{1 - \alpha \sum_{i=1}^2 p_i^{(0)} r_i^{(0)}}, \quad r_j^{(1)} = \frac{r_j^{(0)}(1 - \alpha p_j^{(0)})}{1 - \alpha \sum_{i=1}^2 p_i^{(0)} r_i^{(0)}}, \quad j = 1, 2.$$

І нарешті, необхідно повернутись до ненормованих векторів, які характеризують кількісно популяції в кожному з регіонів після першого кроку внутрішнього та зовнішнього конфліктів $\mathcal{N}^{-1}\{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} = \{\mathbf{P}^1, \mathbf{R}^1\}$. Отже, в момент $n = 1$ одержуємо вектори

$$\mathbf{P}^1 = (P_1^{(1)}, P_2^{(1)}), \quad \mathbf{R}^1 = (R_1^{(1)}, R_2^{(1)}),$$

де

$$P_j^{(1)} = p_j^{(1)} \tilde{z}_P^{(0)}, \quad R_j^{(1)} = r_j^{(1)} \tilde{z}_R^{(0)}, \quad j = 1, 2.$$

Таким чином, ми детально визначили математичну композицію $F = [\mathcal{N}^{-1} * \mathcal{N}]U$, яка описує подвійну конфліктну взаємодію елементів двох підсистем.

У розглядуваному випадку для знаходження інваріантних точок рівноваги необхідно розв'язати систему рівнянь відносно P_1, P_2, R_1, R_2 :

$$\begin{aligned} (a + 1 - bR_1 - cP_1)(Z_2 - \alpha R_2(-d + 1 + eP_2 - fR_2))Z_1 &= Z, \\ (-d + 1 + eP_1 - fR_1)(Z_2 - \alpha P_2(a + 1 - bR_2 - cP_2))Z_1 &= Z, \\ (a + 1 - bR_2 - cP_2)(Z_1 - \alpha R_1(-d + 1 + eP_1 - fR_1))Z_2 &= Z, \\ (-d + 1 + eP_2 - fR_2)(Z_1 - \alpha P_1(a + 1 - bR_1 - cP_1))Z_2 &= Z, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Z_1 &= P_1(a + 1 - bR_1 - cP_1) + R_1(-d + 1 + eP_1 - fR_1), \\ Z_2 &= P_2(a + 1 - bR_2 - cP_2) + R_2(-d + 1 + eP_2 - fR_2), \\ Z &= Z_1Z_2 - \alpha[P_1P_2(a + 1 - bR_2 - cP_2)(a + 1 - bR_1 - cP_1) + \\ &\quad + R_1R_2(-d + 1 + eP_1 - fR_1)(-d + 1 + eP_2 - fR_2)]. \end{aligned}$$

Зауважимо, що при $\alpha = 0$ ми отримуємо чисту модель Лотки – Вольтерри і відповідну систему рівнянь, розв'язком якої, звичайно, є три точки рівноваги, згадані в п. 3.

Зрозуміло, що у випадку $\alpha \neq 0$ ця система є досить складною для того, щоб одержати точний розв'язок. Але, використовуючи комп'ютерне моделювання, можна наблизитися до її розв'язку з будь-якою точністю. На цьому шляху ми отримали цікаві спостереження.

Зокрема, ми виявили існування інваріантних точок рівноваги та стійких циклічних орбіт для цілого ряду значень параметрів та початкових даних (див. рис. 2–5).

Крім того, виявилось, що так звана позитивна внутрішня інваріантна точка рівноваги (звичайно, вона існує для кожної системи та може бути знайдена за формулою (3.4)) зсувається при введенні конфліктної взаємодії між системами. В дискретній моделі Лотки – Вольтерри рівновага відбувається в точці $P_1 = 32$, $P_2 = 4$. Тобто ця точка є інваріантною в часі. Це легко перевірити, підставивши наведені значення координат у відповідні рівняння. При комп'ютерному моделюванні також не виникає ніякої динаміки – початкові значення залишаються незмінними в дискретному часі.

У випадку ж введення конфліктної взаємодії (рис. 5) при тих же значеннях параметрів моделі та константи інтенсивності взаємодії $\alpha = 0,01$ інваріантна точка рівноваги змінює свої координати: $P_1 = R_1 = 32,200863$, $P_2 = R_2 = 4,087615$. Саме при цих початкових даних комп'ютерна модель не має динаміки.

Знайти цю точку легко, якщо покласти початкові дані в кожній із двох систем рівними. У цьому випадку системи коливаються синхронно і, як і у випадку чистої моделі Лотки – Вольтерри, з'являється стабілізація, але при цьому відбувається зсув точки рівноваги, як зазначено вище.

Таким чином, одержуємо цікавий феномен. Якщо ми маємо деяку систему типу „хижак-жертва” та хочемо якось змінити популяцію її видів, ми вводимо одночасно „паралельну” подібну систему і застосовуємо між ними конфліктну взаємодію альтернативного конфлікту. Тоді з необхідністю з'являється певний зсув інваріантної точки рівноваги. Можна очікувати ще більш значного зсуву цієї точки в „ансамблі”, що складається з якоїсь кількості ідентичних систем типу Лотки – Вольтерри. Отже, ми виявили ефект зсуву ізольованої інваріантної точки рівноваги при об'єднанні окремих ідентичних систем типу моделі Лотки – Вольтерри в ансамбль.

Але ця точка є нестабільною — будь-яка незначна зміна початкових даних призводить до того, що траєкторія системи з часом віддаляється від точки рівноваги.

Найбільш цікаве спостереження стосується наявності циклічних орбіт. Нагадаємо, що в моделях Лотки – Вольтерри з дискретним часом циклічні орбіти не існують. Але при „вмиканні” зовнішнього конфлікту між підсистемами динамічна система описує траєкторію, яка наближається з часом до циклічної орбіти. При цьому можна стартувати як із зовнішньої, так і з внутрішньої області відносно цієї циклічної орбіти, і навіть з будь-якої

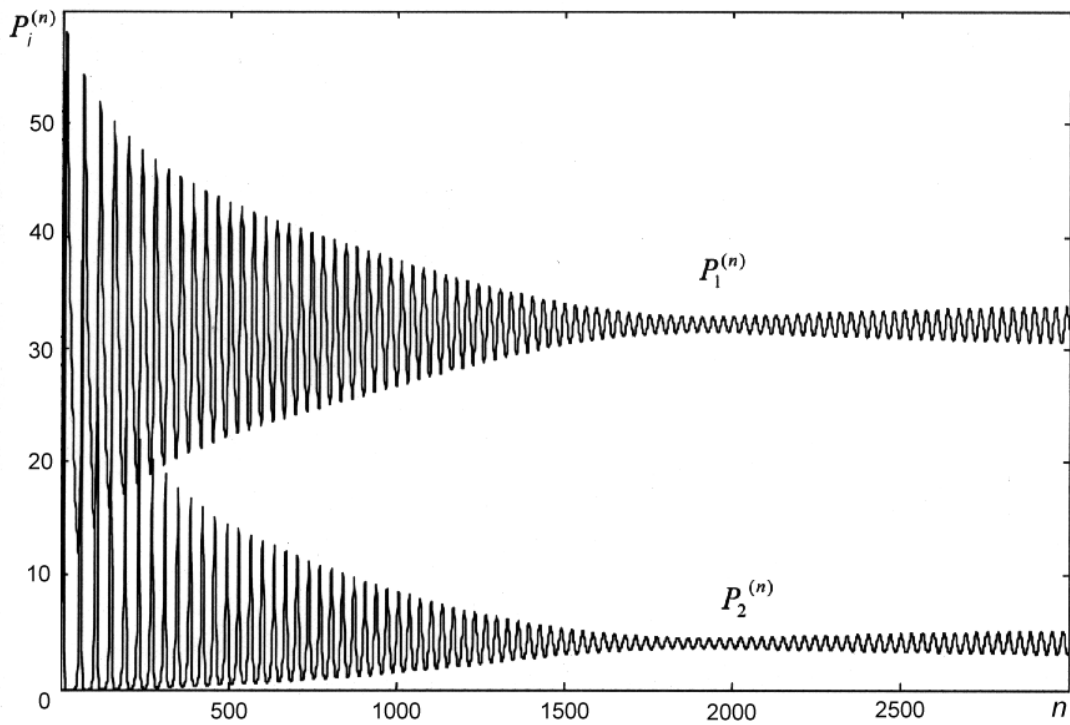


Рис. 2. Модель Лотки–Вольтерри з дискретним часом та конфліктною взаємодією між складними системами при $a = 0,2$, $b = 0,006$, $c = 0,002$, $d = 0,008$, $e = 0,002$, $f = 0$, $\alpha = 0,01$, $P_1^{(0)} = 3$, $P_2^{(0)} = 7$, $R_1^{(0)} = 5$, $R_2^{(0)} = 10$.

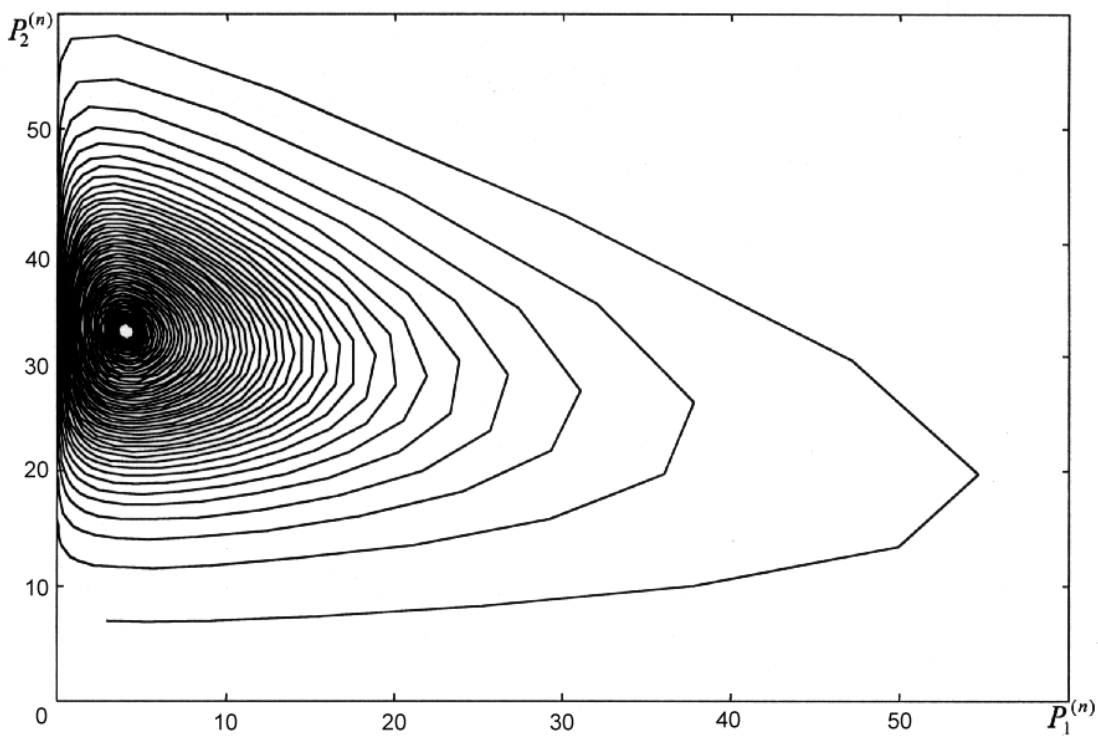


Рис. 3. Фазовий простір $(P_1^{(n)}, P_2^{(n)})$.

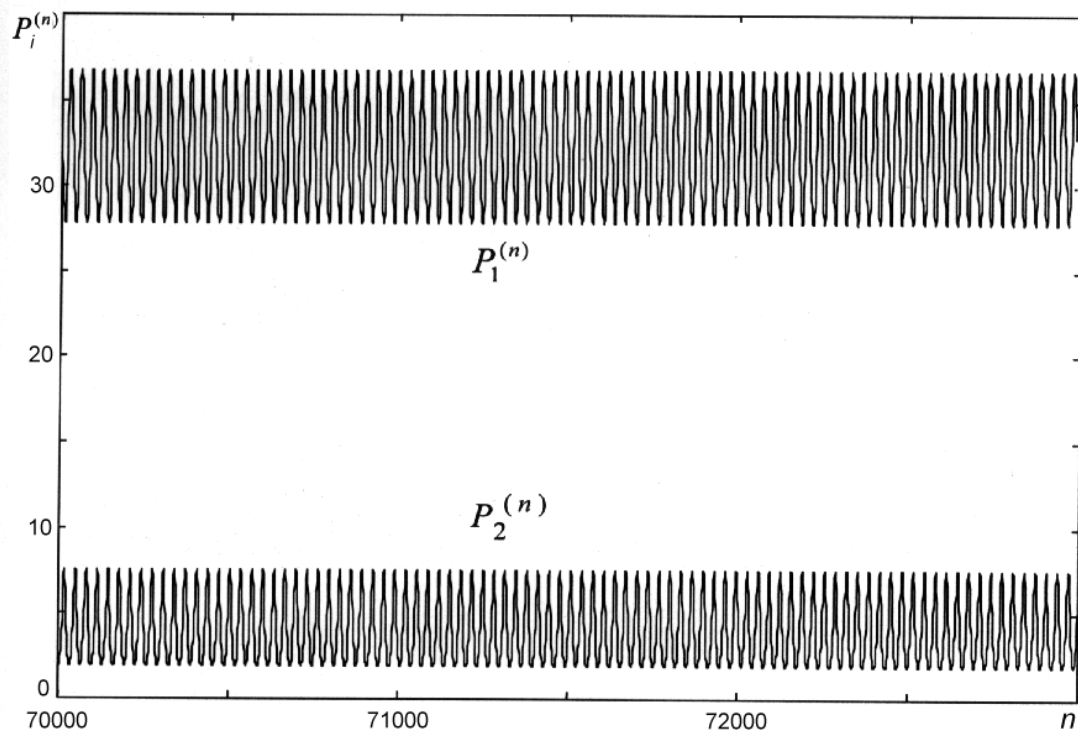


Рис. 4. Стабільні коливання моделі Лотки–Вольтерри з дискретним часом та конфліктною взаємодією між складними системами після 70 000 кроків ітерації.

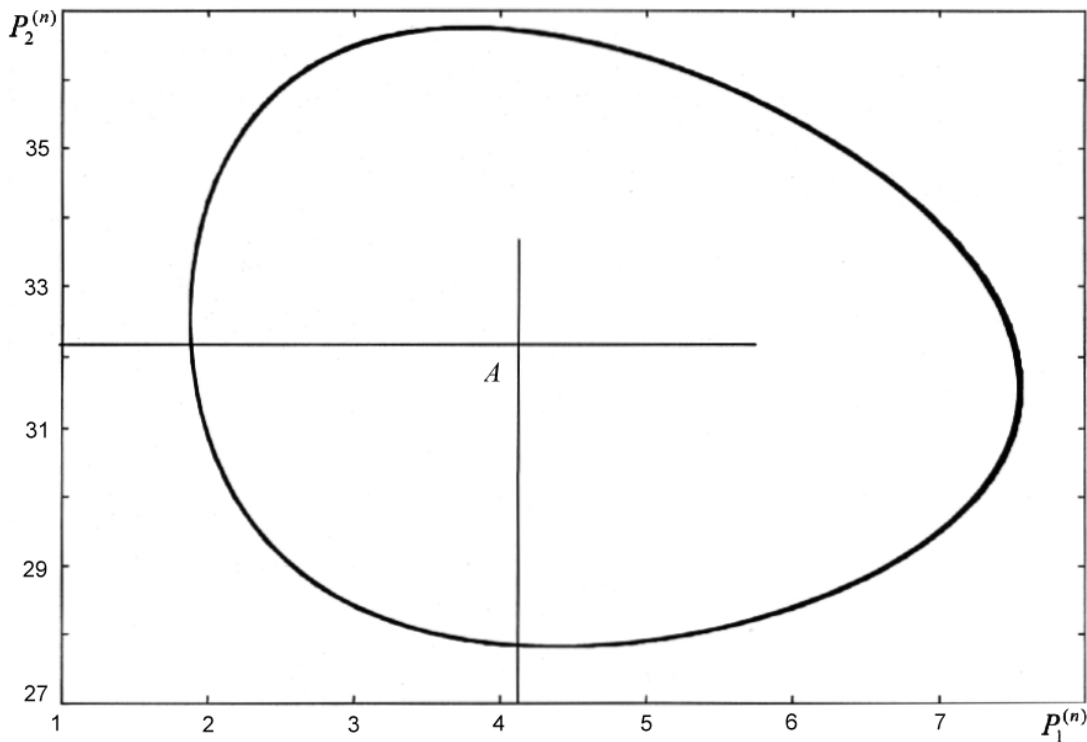


Рис. 5. Фазовий простір $(P_1^{(n)}, P_2^{(n)})$ після 70 000 кроків ітерації (A — нестабільна точка рівноваги з координатами 4,087615; 32,200863).

точки, близької до нестабільної інваріантної точки рівноваги. Таким чином, циклічна орбіта є атрактором. На рис. 6, 7 зображено траєкторії моделі, яка стартує в точці $P_1^{(0)} = 32$, $P_2^{(0)} = 4$. Як зазначалося вище, у випадку чистої моделі Лотки–Вольтерри за таких початкових даних динаміки взагалі немає. У випадку ж моделі з конфліктом між системами траєкторія наближається до циклічної орбіти.

Коефіцієнт інтенсивності взаємодії α відіграє важливу роль. При малих значеннях α інтенсивність взаємодії між підсистемами слабка і поведінка кожної з них узгоджується з стандартною моделлю Лотки–Вольтерри, циклічних траєкторій немає. Але при збільшенні значень α виникають біфуркації. А саме, при певних значеннях $\alpha = \alpha_1$ з'являються цикли малої кратності. При подальшому збільшенні α до фіксованого значення $\alpha_1 < \alpha_m < 1$ з'являються нові точки біфуркацій. У цих точках змінюється кратність циклічних траєкторій. Зростання інтенсивності конфліктної взаємодії між підсистемами призводить до збільшення кратності циклічних траєкторій. Більш того, при певному значенні $\alpha = \alpha_{кр}$ з'являються цикли нескінченної кратності, тобто система досить швидко стабілізується в тому сенсі, що її координати стають сталими, зокрема нульовими (при цьому деякі види повністю зникають), навіть якщо у відповідному випадку чистої моделі Лотки–Вольтерри з $\alpha = 0$ координати точки стабільної рівноваги були строго додатними.

5. Дискусія та інтерпретація. В цьому пункті ми пропонуємо деяку інтерпретацію комп'ютерної моделі з попереднього пункту в термінах міграційних процесів.

Зазначимо, що в багатьох роботах з математичної біології та економіки (див. [3–11]) моделювання динаміки фізичних процесів проводиться за допомогою рівнянь Лотки–Вольтерри. При цьому, як правило, використовується неперервний час, хоча існує невелика кількість робіт (див., наприклад, [10]), в яких, зокрема, процес міграції між окремими регіонами відбувається з фіксованою ймовірністю, а всередині регіонів динаміка змін описується за моделлю типу Лотки–Вольтерри.

Ми по суті також досліджуємо модель Лотки–Вольтерри, задану в парі підсистем, але в дискретному часі і з додатковою взаємодією між ними. Цю взаємодію можна інтерпретувати як взаємозв'язок між мешканцями різних регіонів, який породжує процес міграції. Використання дискретного часу, на наш погляд, є більш природним, оскільки, наприклад, народження та загибель індивідів відбуваються в часі фактично дискретно.

Відомо, що в класичній моделі „хижак–жертва” в дискретному часі існує інваріантна точка стабільної рівноваги, до значень координат якої прямує кількість хижаків та жертв. Траєкторія відповідного процесу, коливаючись, наближається до цієї точки. Таким чином, у фазовому просторі точка рівноваги є односточковим атрактором. За ідеальних умов така картина мала б спостерігатися всередині кожного окремого регіону — система асимптотично наближається до певної динамічної рівноваги між кількістю жертв та хижаків. При цьому міграції немає.

Введення взаємодії різними копіями моделі Лотки–Вольтерри ми інтерпретуємо як боротьбу за життєвий простір між мешканцями різних регіонів. Відповідна зміна поведінки траєкторій може трактуватися як міграційний процес. Зокрема, така більш складна модель може не мати інваріантної точки рівноваги — кількість хижаків та жертв у

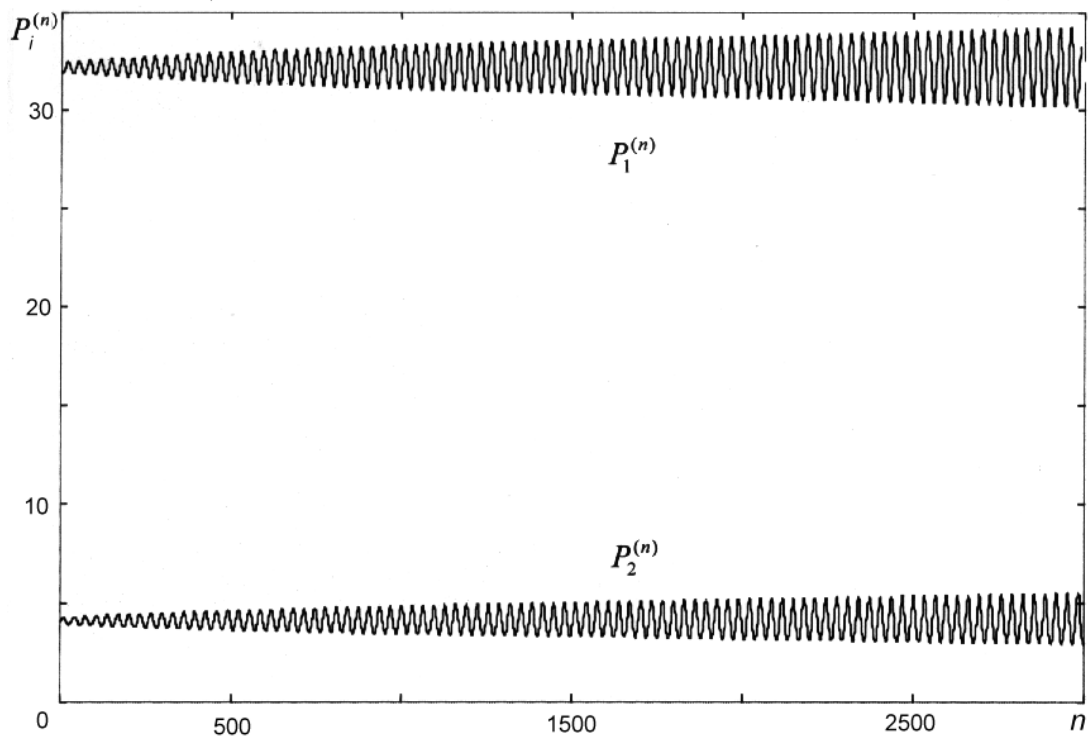


Рис. 6. Модель Лотки–Вольтерри з дискретним часом та конфліктною взаємодією між складними системами при $a = 0,2$, $b = 0,006$, $c = 0,002$, $d = 0,008$, $e = 0,002$, $f = 0$, $\alpha = 0,01$, $P_1^{(0)} = 32$, $P_2^{(0)} = 4$.

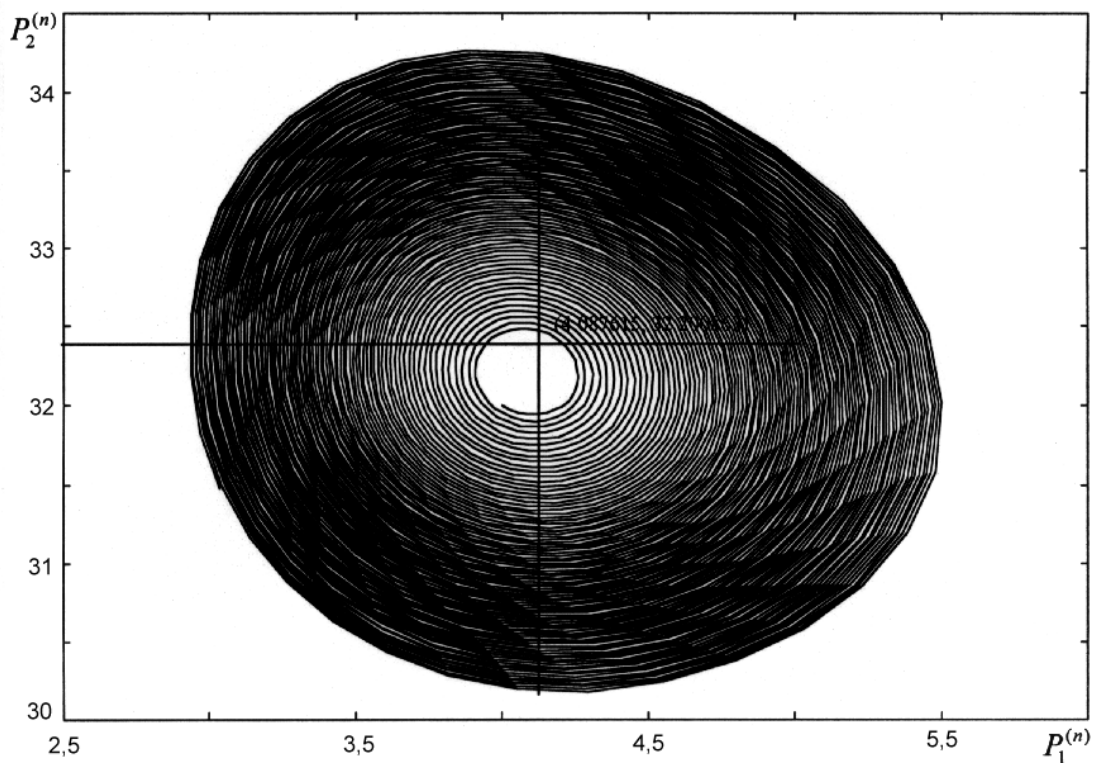


Рис. 7. Фазовий простір $(P_1^{(n)}, P_2^{(n)})$.

кожному регіоні постійно коливається. Натомість виникає циклічний атрактор, до якого наближається траєкторія процесу у фазовому просторі.

Взаємодія в складній системі на кожному дискретному кроці складається, на відміну від класичної моделі Лотки–Вольтерри, з двох перетворень. Спочатку між собою взаємодіють мешканці кожного окремого регіону згідно з моделлю Лотки–Вольтерри. Регіону відповідає вектор з координатами, рівними популяціям якогось виду (жертви чи хижака). Потім кожен із векторів нормується за сумарною кількістю усіх мешканців регіону (вектори стають стохастичними, тобто нормованими на одиницю). Далі відбувається взаємодія альтернативного конфлікту між регіонами. Природний простір для існування є спільним для усіх, і тому існує глобальна боротьба за цей простір, зокрема, між різними регіонами як окремими супротивниками (хоча всередині вони вже конфліктні згідно з моделлю Лотки–Вольтерри). І нарешті, потрібно знайти реальну кількість (видів) мешканців у кожному регіоні. Для цього ми проводимо зворотне перенормування стохастичних векторів по закону пропорційності до величини популяції до моменту включення конфлікту між регіонами. Аналогічні перетворення повторюємо в кожен момент дискретного часу.

Зауважимо, що саме друга частина цього перетворення відповідає за процес перерозподілу популяцій між регіонами: особи якогось виду (жертви чи хижаки) мігрують до іншого регіону. Значенням $0 < \alpha \leq 1$ відповідає глобальна стратегія відштовхування між жертвами та хижаками. При цьому жертви мігрують у регіон, де їх більше; хижаки також перерозподіляються туди, де їх більше. Але в цілому система не „розвалюється”, тому що в кожному з регіонів популяції видів підкорюються законам моделі Лотки–Вольтерри. Велика кількість жертв спонукає зростання хижаків, а мала кількість жертв швидко обмежує популяцію хижаків. Цей внутрішній процес у кожному регіоні динамічно може зрівноважитись процесом міжрегіональної міграції. Відповідна точка стабілізації існує, але вона не є стійкою. Загальна ситуація описується траєкторією, яка асимптотично наближається до циклічного коливання. Так в дійсності „працює” ефект запізнення: хижаки „не знають”, що в регіоні, куди вони мігрували, їх кількість почала зменшуватись за законами моделі Лотки–Вольтерри, і продовжують мігрувати в цей регіон. Аналогічна „логіка” спостерігається і у жертв: вони деякий час продовжують мігрувати в регіон, де їхня попередня популяція була великою, але вже настало перенасичення і відбувається швидкий спад. Цей універсальний принцип інертності породжує коливний процес. На нескінченності в часі траєкторія системи в фазовому просторі наближається до фіксованого циклу. Його спостерігаємо в комп’ютерній моделі. Кратність циклу залежить від значення коефіцієнта $0 < \alpha \leq 1$ конфліктної взаємодії між регіонами.

Зокрема, на рис. 4 показано періоди, коли кількість жертв у регіоні починає зменшуватись, хоча хижаки, не знаючи цього, збільшують свою популяцію. З необхідністю через деякий час починається відтік індивідів будь-якого типу в протилежний регіон.

Отже, в розглядуваній моделі, на відміну від дискретної моделі Лотки–Вольтерри, спостерігаються циклічні коливання кількості хижаків та жертв, і в фазовому просторі існує орбіта-атрактор, до якої прямує траєкторія процесу популяції, причому незалежно від того, були початкові дані всередині чи ззовні цієї орбіти (див. рис. 5, 7).

Варто також зазначити, що в даній моделі нормування відбувається по кількості мешканців регіону, тому якась з компонент стохастичного вектора може бути відносно великою як за рахунок того, що в регіоні велика кількість індивідів цього виду, так і за рахунок того, що регіон взагалі малонаселений. В останньому випадку міграція може відбуватися

в ті регіони, де популяція мала, але є багато „вільного простору”.

Ми розглядали також комп'ютерну модель з притягальною взаємодією ($-1 \leq \alpha < 0$). У цьому випадку ми спостерігали схожу динаміку. Але траєкторії процесів допускали іншу міграційну інтерпретацію. А саме, міграція відбувалася вже в той регіон, де кількість осіб цього виду є меншою. Така міграційна стратегія є цілком природною в інших конкретних моделях, що описують локальну концентрацію протилежних видів в обмеженому просторі.

1. *Lotka A. J.* Relation between birth rates and death rates // *Science*. — 1907. — **26**. — P. 21–22.
2. *Volterra V.* Sui tentativi di applicazione della matematiche alle scienze biologica e sociale // *G. econom.* — 1901. — **23**. — P. 436–458.
3. *Murray J. D.* *Mathematical biology. I. An introduction*. — New York: Springer, 2002. — 551 p.
4. *Stone L., Olinky R.* Phenomena in ecological systems // *Experim. Chaos: 6-th Experim. Chaos Conf.* — 2003. — P. 476–487.
5. *Kuang Y.* Basic properties of mathematical population models // *J. Biomath.* — 2002. — № 17. — P. 129–142.
6. *Lonzonn Y., Solomon S., Goldenberg J., Mazarsky D.* World-size global markets lead to economic instability // *Acrifit. Life*. — 2003. — P. 357–370.
7. *Kuang Y., Beretta E.* Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system // *J. Math. Biol.* — 1998. — № 36. — P. 389–406.
8. *Tufto J.* Effects of releasing maladapted individuals: a demographic-evolutionary model // *Amer. Natur.* — 2001. — **158**, № 4. — P. 331–340.
9. *Cressman R., Krivan V., Garay J.* Ideal free distributions, evolutionary games, and population dynamics in multiple-species environment // *Ibid.* — 2004. — **164**, № 4. — P. 473–489.
10. *Colato A., Mizrahi S. S.* Effects of random migration in population dynamics // *Phys. Rev. E*. — 2001. — **64**. — P. 1–14.
11. *Bandyopadhyay M., Chattopadhyay J.* Ratio-dependent predator-prey model: effects of environmental fluctuation and stability // *Nonlinearity*. — 2005. — № 18. — P. 913–936.
12. *Koshmanenko V.* On the conflict theorem for a pair of stochastic vectors // *Ukr. Math. J.* — 2003. — **55**, № 4. — P. 555–560.
13. *Koshmanenko V.* The theorem of conflict for probability measures // *Math. Meth. Operat. Res.* — 2004. — **59**, № 2. — P. 303–313.
14. *Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту // *Нелінійні коливання*. — 2004. — **7**, № 4. — С. 446–461.
15. *Albeverio S., Bodnarchuk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents // *Math. Funct. Anal. and Top.* — 2005. — **11**, № 4.
16. *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір // *Укр. мат. журн.* — 2004. — **56**, № 7. — С. 927–938.
17. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // *Theory Stochast. Process.* — 2004. — **10**, № 3–4. — P. 73–81.
18. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under infinite conflict interaction // *Positivity*. — 2006. — **10**. — P. 39–49.
19. *Sigmund K.* The population dynamics of conflict and cooperation // *Doc. Math. J.* — 1998. — **1**. — P. 487–506.

Одержано 12.05.2006,
після доопрацювання — 29.05.2006