УДК 519 . 21

ПРО СТІЙКІСТЬ МНОЖИН ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВИПАДКОВИХ ЛАМАНИХ

Г. Л. Кулініч, А. В. Єршов

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: a_yershov@univ.kiev.ua

For a sequence of random polygonal lines, we introduce a notion of a stable set. We find sufficient conditions for stability of a given set for a sequence of random polygonal lines.

Для послідовності випадкових ламаних вводиться поняття стійкої множини. Отримано достатні умови стійкості заданої множини для послідовності випадкових ламаних.

1. Вступ. Збіжність послідовностей випадкових ламаних до розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь розглядалася в багатьох роботах (див., наприклад, [1, 2]. При цьому суттєвою умовою була невиродженість дифузійної матриці граничного рівняння. Водночас дифузійна матриця стохастичного диференціального рівняння Іто, що має інваріантні криві [3, 4], є виродженою на цих кривих. У даній роботі досліджується збіжність послідовностей випадкових ламаних до множин, які, зокрема, можуть бути інваріантними для розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Вимагається невиродженість локальних характеристик випадкових ламаних, але припускається, що вони можуть вироджуватись у границі. Натомість на локальні характеристики накладено умови, подібні до умов інваріантності для стохастичних диференціальних рівнянь.

2. Постановка задачі. Нехай задано послідовність m-вимірних випадкових векторів $\xi_{n0}, ..., \xi_{nm_n}$, $n = 0, 1, 2, ...$, зв'язаних у кожній серії в ланцюг Маркова, $0 = t_{n0} < t_{n1} < ... ... < t_{nm_n} = 1$ — деяка послідовність розбиттів відрізка $[0, 1]$ та

$$\lambda_n = \max_k [t_{nk+1} - t_{nk}] \to 0 \tag{1}$$

при $n \to \infty$.

Введемо позначення: $\Delta t_{nk} = t_{nk+1} - t_{nk}$; $\Delta\xi_{nk} = \xi_{nk+1} - \xi_{nk}$; $\mathcal{F}_{nk}$ — мінімальна σ-алгебра, відносно якої вимірними є величини $\xi_{nj}, j \le k$;

$$\mathrm{E}\{\Delta\xi_{nk}|\mathcal{F}_{nk}\} = a_n(\xi_{nk})\Delta t_{nk},$$

$$\mathrm{E}\{(\Delta\xi_{nk} - a_n(\xi_{nk})\Delta t_{nk})(\Delta\xi_{nk} - a_n(\xi_{nk})\Delta t_{nk})^T|\mathcal{F}_{nk}\} = \sigma_n^2(\xi_{nk})\Delta t_{nk},$$

де $a_n(x)$ — m-вимірні вектори-стовпчики, $\sigma_n(x)$ — матриці розмірності $m \times m$, а через $(\cdot)^T$ позначено операцію транспонування.

Нехай $\xi_n(t)$ — випадкова ламана з вершинами у точках (t_{nk}, ξ_{nk}) :

$$\xi_n(t) = \xi_{nk} + \frac{t - t_{nk}}{\Delta t_{nk}}\Delta\xi_{nk}, \quad t_{nk} \le t < t_{nk+1}.$$

Запишемо величину $\Delta\xi_{nk}$ у вигляді

$$\Delta\xi_{nk} = a_n(\xi_{nk})\,\Delta t_{nk} + \sigma_n(\xi_{nk})\,\Delta\omega_{nk}, \tag{2}$$

де $\Delta\omega_{nk} = [\sigma_n(\xi_{nk})]^{-1}(\Delta\xi_{nk} - a_n(\xi_{nk})\,\Delta t_{nk})$.

Послідовність $\{\omega_{nk}, k = 0, 1, \ldots, m_n\}$ є $\mathcal{F}_{nk}$-мартингалом, при цьому

$$\mathrm{E}\{\Delta\omega_{nk}|\mathcal{F}_{nk}\} = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Delta\omega^i_{nk}\Delta\omega^j_{nk}|\mathcal{F}_{nk}\Big\} = \Delta t_{nk}\delta_{ij}, \tag{4}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

В подальшому будемо використовувати наступні умови:

$H_1)$ $\sigma_n(x)$ є невиродженими;

$H_2)$ для довільного $N > 0$ існує таке $C_N > 0$, що для усіх $n \geq 1$

$$(|a_n(x)| + |\sigma_n(x)|)\,\chi_N(x) \leq C_N,$$

де $\chi_N(x) = 1$, якщо $|x| \leq N$, і $\chi_N(x) = 0$ — у протилежному випадку;

$H_3)$ $G(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^m)$;

$H_4)$ $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_n \mathrm{P}\{\sup\limits_k|\xi_{nk}| > N\} = 0$;

$H_5)$ для довільного $N > 0$ існує таке $C_N > 0$, що для усіх $n \geq 1$

$$\lambda_n \sup_{|x|\leq N}\left|[\sigma_n(x)]^{-1}a_n(x)\right|^2 \leq C_N;$$

$H_6)$ для довільного $N > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\,\left|[\sigma_n(\xi_{nk})]^{-1}\Delta\xi_{nk}\right|^4\chi_N(\xi_{nk}) = 0;$$

$H_7)$ для довільного $N > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leq N}\left|\sum_{i=1}^m G'_{x_i}(x)\sigma^{ik}_n(x)\right| = 0, \quad k = 1, \ldots, m;$$

$H_8)$ для довільного $N > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leq N}\left|\sum_{i=1}^m G'_{x_i}(x)\;a^i_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{k,i,j=1}^m G''_{x_ix_j}(x)\sigma^{ik}_n(x)\sigma^{jk}_n(x)\right| = 0;$$

$H_9)$ $\lim\limits_{n\to\infty}G(\xi_{n0}) = G(x_0)$ за ймовірністю, де $x_0 \in \mathbb{R}^m$ — фіксована точка.

Означення. *Множину* $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^m | \, G(x) = G(x_0)\}$, *де* $x_0 \in \mathbb{R}^m$, *будемо називати стійкою для послідовності ламаних* $\xi_n(t)$, *якщо для довільних* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *існує номер* n_0 *такий, що*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le 1} |G(\xi_n(t)) - G(x_0)| \le \varepsilon\right\} > 1 - \delta$$

при $n > n_0$.

3. Достатні умови стійкості множини для послідовності випадкових ламаних.

Теорема. *Якщо виконуються умови* $H_1) - H_9)$, *то множина* Γ *є стійкою для послідовності випадкових ламаних* $\xi_n(t)$.

Доведення. Для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le 1} |G(\xi_n(t)) - G(x_0)| > \varepsilon\right\} \le$$

$$\le \mathrm{P}\left\{\sup_k \sup_{t_{nk}\le t< t_{nk+1}} |G(\xi_n(t)) - G(\xi_{nk})| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\left\{\sup_k |G(\xi_{nk}) - G(x_0)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

За формулою Тейлора

$$G(\xi_n(t)) = G\left(\xi_{nk} + \frac{t - t_{nk}}{\Delta t_{nk}} \Delta\xi_{nk}\right) =$$

$$= G(\xi_{nk}) + \left(G'\left(\xi_{nk} + \theta_{nk}\frac{t - t_{nk}}{\Delta t_{nk}}\Delta\xi_{nk}\right)\frac{t - t_{nk}}{\Delta t_{nk}}, \Delta\xi_{nk}\right)$$

при $t \in [t_{nk}, t_{nk+1})$, де $0 < \theta_{nk} < 1$. Тут $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярний добуток, $G' = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}\right)$. У подальшому будемо також позначати $G'' = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m}$.

Позначимо $P_n(N) = \mathrm{P}\left\{\sup_k |\xi_{nk}| > N\right\}$. Тоді

$$\mathrm{P}\left\{\sup_k \sup_{t_{nk}\le t<t_{nk+1}} |G(\xi_n(t)) - G(\xi_{nk})| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\sup_k \sup_{t_{nk}\le t<t_{nk+1}} \left|\left(G'\left(\xi_{nk} + \theta_{nk}\frac{t-t_{nk}}{\Delta t_{nk}}\Delta\xi_{nk}\right)\frac{t-t_{nk}}{\Delta t_{nk}}, \Delta\xi_{nk}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le$$

$$\le 2P_n(N) + \mathrm{P}\left\{\sup_{|x|\le 3N}\left|G'(x)\right|\sup_k |\Delta\xi_{nk}|\chi_N(\xi_{nk})\,\chi_N(\xi_{nk+1}) > \frac{\varepsilon}{8}\right\},$$

оскільки при $|\xi_{nk}| \le N$, $|\xi_{nk+1}| \le N$ маємо $\left|\xi_{nk} + \theta_{nk}\dfrac{t-t_{nk}}{\Delta t_{nk}}\Delta\xi_{nk}\right| \le 3N$. З умови H_3) випливає, що існує така стала $L_N > 0$, для якої $\sup\limits_{|x|\le 3N}|G'(x)| \le L_N$.

Таким чином,

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{|x|\le 3N}\left|G'(x)\right|\sup_k |\Delta\xi_{nk}|\chi_N(\xi_{nk})\,\chi_N(\xi_{nk+1}) > \frac{\varepsilon}{8}\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{P}\left\{|\Delta\xi_{nk}|\chi_N(\xi_{nk}) > \frac{\varepsilon}{8L_N}\right\} \le \left(\frac{8L_N}{\varepsilon}\right)^4 \sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\,|\Delta\xi_{nk}|^4\chi_N(\xi_{nk})\,.$$

Доведемо, що при фіксованому $N > 0$

$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}|\Delta\xi_{nk}|^4\chi_N(\xi_{nk}) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Скориставшись умовою H_2), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\,|\Delta\xi_{nk}|^4\chi_N(\xi_{nk}) \le \sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\,|\sigma_n(\xi_{nk})|^4\left|[\sigma_n(\xi_{nk})]^{-1}\Delta\xi_{nk}\right|^4\chi_N(\xi_{nk}) \le$$

$$\le C_N^4\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\left|[\sigma_n(\xi_{nk})]^{-1}\Delta\xi_{nk}\right|^4\chi_N(\xi_{nk}) \to 0$$

при $n\to\infty$ за умовою H_6).

Отже, переходячи до границі спочатку по $n\to\infty$, а потім по $N\to\infty$, отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_k \sup_{t_{nk}\le t<t_{nk+1}} |G(\xi_n(t)) - G(\xi_{nk})| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Використовуючи формулу Тейлора та зображення (2), маємо

$$G(\xi_{ns}) = G(\xi_{n0}) + \sum_{k=0}^{s-1}\left(G(\xi_{nk+1}) - G(\xi_{nk})\right) =$$

$$= G(\xi_{n0}) + \sum_{k=0}^{s-1}\left(\left(G'(\xi_{nk})\ \Delta\xi_{nk}\right) + \frac{1}{2}\Delta\xi_{nk}^T\, G''(\xi_{nk} + \theta_{nk}\Delta\xi_{nk})\ \Delta\xi_{nk}\right) =$$

$$= G(\xi_{n0}) + \sum_{k=0}^{s-1}\Big[\big(G'(\xi_{nk}),\ a_n(\xi_{nk})\Delta t_{nk} + \sigma_n(\xi_{nk})\Delta\omega_{nk}\big) +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_n(\xi_{nk})\Delta t_{nk} + \sigma_n(\xi_{nk})\Delta\omega_{nk})^T G''(\xi_{nk} + \theta_{nk}\Delta\xi_{nk})(a_n(\xi_{nk})\Delta t_{nk} + \sigma_n(\xi_{nk})\Delta\omega_{nk})\Big] =$$

$$= G(\xi_{n0}) + \sum_{k=0}^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}(\xi_{nk})\, a_n^i(\xi_{nk})\Delta t_{nk} + \sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}(\xi_{nk}) \sum_{j=1}^{m} \sigma_n^{ij}(\xi_{nk})\Delta\omega_{nk}^j + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk} + \theta_{nk}\Delta\xi_{nk})\, a_n^i(\xi_{nk}) a_n^j(\xi_{nk})(\Delta t_{nk})^2\right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk} + \theta_{nk}\Delta\xi_{nk})\ a_n^i(\xi_{nk}) \sum_{l=1}^{m} \sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\Delta t_{nk}\Delta\omega_{nk}^l +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{m}\left(G''_{x_i x_j}(\xi_{nk} + \theta_{nk}\Delta\xi_{nk}) - G''_{x_i x_j}(\xi_{nk})\right) \sum_{p,\,l=1}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^p\Delta\omega_{nk}^l\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p\neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^p\Delta\omega_{nk}^l\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p=1}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\sigma_n^{jp}(\xi_{nk})\left((\Delta\omega_{nk}^p)^2 - \Delta t_{nk}\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p=1}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\sigma_n^{jp}(\xi_{nk})\, \Delta t_{nk}\right]\right] = G(\xi_{n0}) + \sum_{r=1}^{8} I_s^{(r)}.$$

Доведемо, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s\left|I_s^{(1)} + I_s^{(8)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для довільного $N > 0$ маємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s\left|I_s^{(1)} + I_s^{(8)}\right| > \varepsilon\right\} \le P_n(N) + \mathrm{P}\left\{\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|\left[\sum_{i=1}^m G'_{x_i}(\xi_{nk})\ a_n^i(\xi_{nk}) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2}\left[\sum_{p,i,j=1}^m G''_{x_i x_j}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{jp}(\xi_{nk})\right]\right]\chi_N(\xi_{nk})\,\Delta t_{nk}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le$$

$$\le P_n(N) + \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2\left(\sup_{|x|\le N}\left|\sum_{i=1}^m G'_{x_i}(x)\,a_n^i(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left[\sum_{p,i,j=1}^m G''_{x_i x_j}(x)\,\sigma_n^{ip}(x)\ \sigma_n^{jp}(x)\right]\right|\right)^2\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}\Delta t_{nk}\right)^2,$$

а отже, за умовами H_4) та H_8), для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s\left|I_s^{(1)} + I_s^{(8)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для довільних $N > 0,\ \varepsilon > 0$ отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s\left|I_s^{(2)}\right| > \varepsilon\right\} \le$$

$$\le P_n(N) + \mathrm{P}\left\{\sup_s\left|\sum_{k=0}^{s-1}\left[\sum_{i,j=1}^m G'_{x_i}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{ij}(\xi_{nk})\,\Delta\omega_{nk}^j\right]\ \chi_N(\xi_{nk})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Послідовність $\sum_{k=0}^{s-1}\left[\sum_{i,j=1}^m G'_{x_i}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{ij}(\xi_{nk})\,\Delta\omega_{nk}^j\right]\ \chi_N(\xi_{nk})$ є мартингалом по s.

Скориставшись мартингальною нерівністю та співвідношеннями (3) та (4), знайдемо

$$P\left\{\sup_s\left|\sum_{k=0}^{s-1}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G'_{x_i}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{ij}(\xi_{nk})\,\Delta\omega_{nk}^j\right]\chi_N(\xi_{nk})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G'_{x_i}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{ij}(\xi_{nk})\,\Delta\omega_{nk}^j\right]\chi_N(\xi_{nk})\right)^2 \le$$

$$\le C_1\sum_{k=0}^{m_n-1}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{ij}(\xi_{nk})\right]\Delta\omega_{nk}^j\chi_N(\xi_{nk})\right)^2 =$$

$$= C_1\sum_{k=0}^{m_n-1}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}(\xi_{nk})\,\sigma_n^{ij}(\xi_{nk})\right]^2 \mathrm{E}\left\{\left[\Delta\omega_{nk}^j\right]^2\Big|\,\mathcal{F}_{nk}\right\}\chi_N(\xi_{nk})\right) \le$$

$$\le C_1\sum_{j=1}^{m}\sup_{|x|\le N}\left[\sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}(x)\,\sigma_n^{ij}(x)\right]^2\sum_{k=0}^{m_n-1}\Delta t_{nk} = C_1\sum_{j=1}^{m}\sup_{|x|\le N}\left[\sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}(x)\,\sigma_n^{ij}(x)\right]^2 \to 0$$

при $n\to\infty$ за умовою H_7). Звідси випливає, що $P\left\{\sup_s\left|I_s^{(2)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0\,,\ n\to\infty$. Далі,

$$P\left\{\sup_s\left|I_s^{(3)}\right| > \varepsilon\right\} \le 2P_n(N) + \frac{4m^2}{\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{m}\mathrm{E}\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|G''_{x_ix_j}(\xi_{nk}+\theta_{nk}\Delta\xi_{nk})\right| \times$$

$$\times \left|a_n^i(\xi_{nk})\right|\left|a_n^j(\xi_{nk})\right|(\Delta t_{nk})^2\chi_N(\xi_{nk})\,\chi_N(\xi_{nk+1})\,.$$

З умови H_3) випливає, що існує таке $K_N > 0$, що

$$\left|G''_{x_ix_j}(\xi_{nk}+\theta_{nk}\Delta\xi_{nk})\right|\chi_N(\xi_{nk})\,\chi_N(\xi_{nk+1}) \le K_N.$$

Використовуючи умови H_2) та H_4), отримуємо

$$P\left\{\sup_s\left|I_s^{(3)}\right| > \varepsilon\right\} \le 2P_n(N) + \frac{4m^4}{\varepsilon}K_N{C_N}^2\sum_{k=0}^{m_n-1}(\Delta t_{nk})^2 \le$$

$$\le 2P_n(N) + \frac{4m^4}{\varepsilon}K_N{C_N}^2\lambda_n,$$

а отже, $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_s \left|I_s^{(3)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0$ при $n \to \infty$. Далі,

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s \left|I_s^{(4)}\right| > \varepsilon\right\} \le 2P_n(N) + \sum_{i,j,l=1}^{m} \left(\frac{4m^3}{\varepsilon}\right)^2 \times$$

$$\times\, \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} \left|G''_{x_i x_j}(\xi_{nk} + \theta_{nk}\Delta\xi_{nk})\; a_n^i(\xi_{nk})\,\sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\,\Delta t_{nk}\Delta\omega_{nk}^l\right| \chi_N(\xi_{nk})\,\chi_N(\xi_{nk+1})\right)^2 \le$$

$$\le 2P_n(N) + \sum_{i,j,l=1}^{m} \left(\frac{4m^3}{\varepsilon}\right)^2 K_N^2 C_N^4 \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathrm{E}\left\{\left[\Delta\omega_{nk}^l\right]^2 \middle|\, \mathcal{F}_{nk}\right\}(\Delta t_{nk})^2 +$$

$$+ \sum_{i,j,l=1}^{m} \left(\frac{4m^3}{\varepsilon}\right)^2 K_N^2 C_N^4 \mathrm{E}\sup_k \left[\left(\Delta\omega_{nk}^l\right)^2 \chi_N(\xi_{nk})\right] \sum_{k \ne k_1}^{m_n-1} \Delta t_{nk}\Delta t_{nk_1} \le$$

$$\le 2P_n(N) + \sum_{i,j,l=1}^{m} \left(\frac{4m^3}{\varepsilon}\right)^2 K_N^2 C_N^4 \left[\lambda_n^2 + \mathrm{E}\sup_k \left[\left(\Delta\omega_{nk}^l\right)^2 \chi_N(\xi_{nk})\right]\right].$$

Маємо

$$\sum_{l=1}^{m} \mathrm{E}\sup_k \left(\left|\Delta\omega_{nk}^l\right|^2 \chi_{[-N,N]}(\xi_{nk})\right) \le \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} \mathrm{E}\,|\Delta\omega_{nk}|^4 \chi_N(\xi_{nk})\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_1 \left(\mathrm{E} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(\left|[\sigma_n(\xi_{nk})]^{-1}\Delta\xi_{nk}\right|^4 \chi_N(\xi_{nk}) + \left|[\sigma_n(\xi_{nk})]^{-1} a_n(\xi_{nk})\right|^4 \chi_N(\xi_{nk})(\Delta t_{nk})^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \mathrm{E}\left|[\sigma_n(\xi_{nk})]^{-1} a_n(\xi_{nk})\right|^4 \chi_N(\xi_{nk})(\Delta t_{nk})^4 \le$$

$$\le \lambda_n^3 \sup_{|x|\le N} \left|[\sigma_n(x)]^{-1} a_n(x)\right|^4 = \lambda_n \left(\lambda_n \sup_{|x|\le N} \left|[\sigma_n(x)]^{-1} a_n(x)\right|^2\right)^2 \to 0\,,\;\; n \to \infty,$$

за умовами H_5) та (1), то

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s \left|I_s^{(4)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для довільного $\delta > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s \left|I_s^{(5)}\right| > \varepsilon\right\} \le 2P_n\left(N\right) + \mathrm{P}\left\{\sup_k |\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}| > \delta\right\} +$$

$$+\frac{8m^4}{\varepsilon}\sum_{i,j,p,l=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\left|G''_{x_ix_j}\left(\xi_{nk}+\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}\right)-G''_{x_ix_j}\left(\xi_{nk}\right)\right|\times$$

$$\times\left|\sigma_n^{ip}\left(\xi_{nk}\right)\sigma_n^{jl}\left(\xi_{nk}\right)\Delta\omega_{nk}^p\Delta\omega_{nk}^l\right|\chi_N\left(\xi_{nk}\right)\chi_N\left(\xi_{nk+1}\right)\chi_{|\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}|<\delta}.$$

Функція $G''_{x_i\,x_j}\left(x\right)$ є неперервною на компакті $\{x \in \mathbb{R}^m|\ |x| \le N\}$, а тому рівномірно неперервною, тобто для довільного $\varepsilon_1 > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при кожному k для всіх ξ_{nk}, ξ_{nk+1} таких, що $|\,\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}| < \delta$, виконується

$$\left|G''_{x_i\,x_j}\left(\xi_{nk}+\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}\right)-G''_{x_i\,x_j}\left(\xi_{nk}\right)\right| < \varepsilon_1.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\left|\left(G''_{x_ix_j}\left(\xi_{nk}+\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}\right)-G''_{x_ix_j}\left(\xi_{nk}\right)\right)\sigma_n^{ip}\left(\xi_{nk}\right)\sigma_n^{jl}\left(\xi_{nk}\right)\Delta\omega_{nk}^p\Delta\omega_{nk}^l\right|\times$$

$$\times\chi_N\left(\xi_{nk}\right)\chi_N\left(\xi_{nk+1}\right)\chi_{|\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}|<\delta} \le$$

$$\le \varepsilon_1 C_N^2\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\left(\left|\Delta\omega_{nk}^p\right|\left|\Delta\omega_{nk}^l\right|\right) \le \varepsilon_1 C_N^2\sum_{k=0}^{m_n-1}\left[\mathrm{E}\left(\Delta\omega_{nk}^p\right)^2\mathrm{E}\left(\Delta\omega_{nk}^l\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varepsilon_1 C_N^2\sum_{k=0}^{m_n-1}\left[\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left\{\left(\Delta\omega_{nk}^p\right)^2|\mathcal{F}_{nk}\right\}\right)\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left\{\left(\Delta\omega_{nk}^l\right)^2|\mathcal{F}_{nk}\right\}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_1 C_N^2.$$

Для довільного $\delta > 0$ $\mathrm{P}\left\{\sup_k|\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}| > \delta\right\} \to 0\,,\ n \to \infty.$

Дійсно,

$$\mathrm{P}\left\{\sup_k|\theta_{nk}\Delta\xi_{nk}| > \delta\right\} \le P_n(N) + \mathrm{P}\left\{\sup_k|\Delta\xi_{nk}|\chi_N(\xi_{nk}) > \frac{\delta}{2}\right\} \le$$

$$\le P_n\left(N\right) + \left(\frac{2}{\delta}\right)^4\sum_{k=0}^{m_n-1}\mathrm{E}\,|\Delta\xi_{nk}|^4\chi_N(\xi_{nk}).$$

За доведеним раніше останній доданок прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, $\mathrm{P}\{\sup\limits_s |I_s^{(5)}| > > \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$. Далі,

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s \left|I_s^{(6)}\right| > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq P_n(N) + \mathrm{P}\left\{\sup_s \left|\sum_{k=0}^{s-1}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\, \sigma_n^{jl}(\xi_{nk}) \Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l}\right] \chi_N(\xi_{nk})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Послідовність

$$\sum_{k=0}^{s-1}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\, \sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l}\right] \chi_N(\xi_{nk})$$

є мартингалом по s, оскільки $\mathrm{E}\left\{\Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l} \middle| F_{nk}\right\} = 0$ при $p \neq l$. Скориставшись мартингальною нерівністю, отримаємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s \left|\sum_{k=0}^{s-1}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\, \sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l}\right] \chi_N(\xi_{nk})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\, \sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l}\right] \chi_N(\xi_{nk})\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \left[\sum_{k=0}^{m_n-1} \mathrm{E}\left(\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\, \sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l}\right)^2 \chi_N(\xi_{nk}) + \right.$$

$$+ 2\sum_{k>k_1}^{m_n-1} \mathrm{E}\left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk})\, \sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l}\right] \chi_N(\xi_{nk}) \times$$

$$\left. \times \left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk_1}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk_1})\, \sigma_n^{jl}(\xi_{nk_1})\, \Delta\omega_{nk_1}^{p} \Delta\omega_{nk_1}^{l}\right] \chi_N(\xi_{nk_1})\right].$$

Оскільки $\mathrm{E}\left\{\Delta\omega_{nk}^{p} \Delta\omega_{nk}^{l} \middle| \mathcal{F}_{nk}\right\} = 0$ при $p \neq l$, то другий доданок дорівнює нулю.

За умовами $H_2)$, $H_3)$

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \mathrm{E} \left(\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sum_{p \neq l}^{m} \sigma_n^{ip}(\xi_{nk}) \sigma_n^{jl}(\xi_{nk})\, \Delta\omega_{nk}^p \Delta\omega_{nk}^l \right)^2 \chi_N(\xi_{nk}) \leq$$

$$\leq C_1 K_N C_N^4 \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{p \neq l}^{m} \mathrm{E} \left[\Delta\omega_{nk}^p\right]^2 \left[\Delta\omega_{nk}^l\right]^2 \chi_N\left(\xi_{nk}\right) \leq$$

$$\leq C_1 K_N C_N^4 \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathrm{E}\, \left|\Delta\omega_{nk}\right|^4 \chi_N\left(\xi_{nk}\right) \to 0\,,\ n \to \infty,$$

а отже, $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_s \left|I_s^{(6)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Послідовність

$$\sum_{k=0}^{s-1} \sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}\left(\xi_{nk}\right) \sum_{p=1}^{m} \sigma_n^{ip}\left(\xi_{nk}\right) \sigma_n^{jp}\left(\xi_{nk}\right) \left(\left(\Delta\omega_{nk}^p\right)^2 - \Delta t_{nk}\right) \chi_N\left(\xi_{nk}\right)$$

є мартингалом по s, тому

$$\mathrm{P}\left\{\sup_s \left|I_s^{(7)}\right| > \varepsilon\right\} \leq P_n\left(N\right) +$$

$$+ \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \mathrm{E} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} \left[\sum_{i,j=1}^{m} G''_{x_i x_j}\left(\xi_{nk}\right) \sum_{p=1}^{m} \sigma_n^{ip}\left(\xi_{nk}\right) \sigma_n^{jp}\left(\xi_{nk}\right) \left(\left(\Delta\omega_{nk}^p\right)^2 - \Delta t_{nk}\right) \right] \chi_N\left(\xi_{nk}\right) \right)^2 \leq$$

$$\leq P_n\left(N\right) + C_1 \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{i,j,p=1}^{m} \mathrm{E} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} G''_{x_i x_j}\left(\xi_{nk}\right) \sigma_n^{ip}\left(\xi_{nk}\right) \sigma_n^{jp}\left(\xi_{nk}\right) \left(\left(\Delta\omega_{nk}^p\right)^2 - \Delta t_{nk}\right) \chi_N\left(\xi_{nk}\right) \right)^2 .$$

За умовами $H_2)$, $H_3)$ та (1)

$$\mathrm{E} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} G''_{x_i x_j}(\xi_{nk}) \sigma_n^{ip}(\xi_{nk}) \sigma_n^{jp}(\xi_{nk}) \left(\left(\Delta\omega_{nk}^p\right)^2 - \Delta t_{nk}\right) \chi_N(\xi_{nk}) \right)^2 =$$

$$= \mathrm{E} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(G''_{x_i x_j}\left(\xi_{nk}\right)\right)^2 \left(\sigma_n^{ip}\left(\xi_{nk}\right)\right)^2 \left(\sigma_n^{jp}\left(\xi_{nk}\right)\right)^2 \left(\left(\Delta\omega_{nk}^p\right)^2 - \Delta t_{nk}\right)^2 \chi_N\left(\xi_{nk}\right) \leq$$

$$\leq 2K_N^2 C_N^4 \sum_{k=0}^{m_n-1} \Big(\mathrm{E} \left(\Delta\omega_{nk}^p \right)^4 \chi_N(\xi_{nk}) + (\Delta t_{nk})^2 \Big) \leq$$

$$\leq 2K_N^2 C_N^4 \left[\sum_{k=0}^{m_n-1} \mathrm{E} \left(\Delta\omega_{nk}^p \right)^4 \chi_N(\xi_{nk}) + \lambda_n \right] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, $\mathrm{P}\left\{ \sup_s \left| I_s^{(7)} \right| > \varepsilon \right\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Врахувавши, те, що

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_k |G(\xi_{nk}) - G(x_0)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{ \sup_k |G(\xi_{nk}) - G(\xi_{n0})| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} + \mathrm{P}\left\{ |G(\xi_{n0}) - G(x_0)| > \frac{\varepsilon}{4} \right\},$$

та умову H_9), отримаємо твердження теореми.

4. Висновок. Отримані в роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування при побудові математичних моделей та дослідженні поведінки динамічних систем. Враховуючи те, що множина, яка є стійкою для послідовності випадкових ламаних, водночас може бути інваріантною множиною для розв'язку певного стохастичного диференціального рівняння, отримані результати можна використати при дослідженні збіжності послідовності випадкових ламаних до розв'язку стохастичного диференціального рівняння з виродженою дифузією.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. — М.: Наука, 1975. — Т. 3. — 496 с.
2. *Кулинич Г. Л.* Некоторые предельные теоремы для последовательности цепей Маркова // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1975. — Вып.12. — С. 77 – 89.
3. *Кулініч Г. Л., Перегуда О. В.* Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь Іто. — Київ: Київ. ун-т, 2002. — 92 с.
4. *Kulinich G. L., Pereguda O. V.* Phase picture of diffusion processes with the degenerate diffusion matrices // Random Oper. and Stochast. Equat. — 1997. — **5**, № 3. — P. 203 – 216.

Одержано 22.05.2006