УДК 517.928

КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НЕТЕРОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Л. И. Каранджулов

Техн. ун-т, София, Болгария

We construct an analytic expansion of the solution in the critical case for systems of singularly perturbed linear ordinary differential equations of Noether type. Inductively, we determine all terms in the asymptotic expansion by using the method of bounding functions and pseudoinverse matrices.

Побудовано асимптотичний розклад розв'язку у критичному випадку для лінійних сингулярно збурених систем звичайних диференціальних рівнянь нетерового типу. Послідовно визначено всі члени асимптотичного розкладу методом примежових функцій і псевдообернених матриць.

1. Постановка задачи и предварительные результаты. В работе рассматривается поведение решений при $\varepsilon \to 0$ линейных краевых задач

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t), \quad t \in [a,b], \quad 0 < \varepsilon << 1, \tag{1}$$

$$l(x) = h, \quad h \in \mathbf{R}^m, \tag{2}$$

где коэффициенты системы (1), (2) подчинены следующим условиям:

У$_1$) A — постоянная $(n \times n)$-матрица, собственные числа таковы, что $\lambda_i = 0, i = \overline{1,k}$, $k < n$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = \overline{k+1,n}$, причем нулевому собственному числу соответствует k линейно независимых собственных векторов матрицы A;

У$_2$) $A_1(t)$ — $(n \times n)$-матрица, $A_1(t) \in C^\infty[a,b]$, $\varphi(t)$ — n-мерная вектор-функция, такая, что $\varphi(t) \in C^\infty[a,b]$;

У$_3$) l — m-мерный ограниченный векторный функционал $l = \operatorname{col}(l_1, \ldots, l_m)$, $l \in (x : C[a,b] \to \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$;

У$_4$) вырожденная $(\varepsilon = 0)$ для (1) система $Ax_0 + \varphi(t) = 0$ разрешима относительно x_0.

Условие У$_1$) показывает, что рассматривается критический случай [1].

Пусть матрица A^+ является единственной $(n \times n)$-псевдообратной по Муру – Пенроузу к матрице A [2, 3]. Через P_A и P_{A^*} обозначаем ортопроекторы $P_A : R^n \to \ker(A)$, $P_{A^*} : R^n \to \ker(A^*)$, $A^* = A^T$. В силу условия У$_1$) следует, что $\operatorname{rank} A = n - k$ и $\operatorname{rank} P_A = \operatorname{rank} P_{A^*} = n - (n-k) = k$. Через P_{A_k} будем обозначать $(n \times k)$-матрицу, которая составлена из k линейно независимых столбцов матрицы P_A, а через $P_{A_k^*}$ — $(k \times n)$-матрицу, составленную из k линейно независимых строк матрицы P_{A^*}.

Задачу (1), (2) будем рассматривать в классе непрерывно дифференцируемых функций. Тогда область определения $D(L_\varepsilon)$ оператора

$$(L_\varepsilon x)(t) = \varepsilon \frac{dx}{dt} - Ax(t) - \varepsilon A_1(t)x(t)$$

состоит из непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям (2). Вырожденная система $Ax_0(t) + \varphi(t) = 0$ разрешима относительно x_0 тогда и только тогда, когда $P_{A^*}\varphi(t) = 0$ для каждого $t \in [a, b]$, и имеет решение

$$x_0(t) = P_{A_k}\alpha_0(t) - A^+\varphi(t), \tag{3}$$

где $\alpha_0(t)$ — произвольная k-мерная вектор-функция.

Можно считать, что условие $l(x_0) = h$ не всегда выполнено.

Пусть система (1) имеет решение при произвольной $\varphi \in C^\infty[a, b]$. Тогда размерность ядра оператора L_ε равна размерности n системы (1), и краевая задача (1), (2) имеет индекс $n - m$: $\operatorname{ind}[L_\varepsilon, l] = n - m$. Задача с нулевым индексом $m = n$ называется фредгольмовой, а задача с ненулевым индексом $m \neq n$ — нетеровой. Таким образом, если размерность n дифференциальной системы (1) не совпадает с размерностью m векторного функционала l, то задача (1), (2) является нетеровой [4].

Будем исследовать нетеровую краевую задачу. В работе получено условие разрешимости и построено асимптотическое представление решения задачи (1), (2) методом пограничных функций [1, 5]. Показано, что при определенных условиях краевая задача (1), (2) имеет решение с одним пограничным слоем в окрестности точки $t = a$. Решение $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ будет стремиться к решению вырожденной системы (3) при $t \in (a, b]$.

Пусть $X(\tau)$, $\tau = \dfrac{t-a}{\varepsilon}$, — нормальная фундаментальная матрица системы $\dfrac{dx}{dt} = Ax$. Обозначим через $X_{n-k}(\tau)$ $(n \times (n-k))$-матрицу, которая получается из $X(\tau)$ и содержит только экспоненциально малые элементы (см. [6]). Пусть $D(\varepsilon) = lX_{n-k}$ — $(m \times (n-k))$-матрица. Вид функционала l определяет структуру матрицы $D(\varepsilon)$. В работе [6] рассмотрен случай, когда матрицу $D(\varepsilon)$ можно представить в виде

$$D(\varepsilon) = D_0 + O\left(\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right),$$

где $D_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} D(\varepsilon)$ — постоянная матрица, а $O\left(\exp\left(-\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right)$, $\alpha > 0$, — матрица соответствующих размерностей, компоненты которой бесконечно малы по отношению к произвольной степени ε.

Если функционал содержит интегральные члены, то можно рассмотреть второй случай, когда

$$D(\varepsilon) = \overline{D}_0(\varepsilon) + \varepsilon\overline{D}_1(\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^s\overline{D}_s(\varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right), \tag{4}$$

где $\overline{D}_i(\varepsilon)$ — $(m \times (n-k))$-матрицы, $\alpha > 0$. Элементы матрицы $\overline{D}_i(\varepsilon)$ непрерывны для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, и для них существует предел в точке $\varepsilon = 0$: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{D}_i(\varepsilon) = D_i$. Доопределим матрицы $\overline{D}_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ следующим образом: $\overline{D}_i(0) = D_i$. Тогда (4) примет вид

$$D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1 + \ldots + \varepsilon^s D_s + O\left(\varepsilon^q \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right), \tag{5}$$

где D_i — постоянные $(m \times (n-k))$-матрицы.

В этой работе мы рассматриваем случай (4). Тогда асимптотика решения (1), (2) строится иным способом и при других условиях, чем в [6].

Рассмотрим систему

$$C\dot{z}(t) = B(t)z(t) + p(t), \quad t \in [a,b], \tag{6}$$

где

$$C = P_{A_k^*} P_{A_k}, \quad B(t) = P_{A_k^*} A_1(t) P_{A_k}, \tag{7}$$

а $p(t)$ — k-мерная вектор-функция такая, что $p(t) \in C^\infty[a,b]$.

Принимая во внимание условие У$_1$) и вид ортопроекторов, легко показать невырожденность $(k \times k)$-матрицы C из (7). Дифференциальная система (6) имеет общее решение

$$z(t) = \Phi(t)\eta + \int\limits_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}p(s)\,ds, \tag{8}$$

где $\Phi(t)$ — нормальная фундаментальная $(k\times k)$-матрица решений системы $\dot{z} = C^{-1}B(t)z$, η — произвольный постоянный k-мерный вектор.

2. Асимптотическое разложение. Решение задачи (1), (2) будем искать в виде [1, 5]

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (x_i(t) + \Pi_i(\tau)), \quad \tau = \frac{t-a}{\varepsilon}, \tag{9}$$

где $x_i(t)$ и $\Pi_i(\tau))$ — неизвестные n-мерные вектор-функции; через $\Pi_i(\tau)$ обозначены пограничные функции в окрестности точки $t = a$. Они будут построены так, что при достаточно малом ε на сегменте $[a,b]$ выполняются неравенства

$$\|\Pi_i(\tau))\| \leq \gamma_i \exp(-\alpha_i \tau), \quad \gamma_i > 0, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 0,1,2,\ldots, \quad \tau \geq 0. \tag{10}$$

Для определения коэффициентов $x_i(t)$ получаем систему

$$Ax_i(t) = f_i(t), \quad t \in [a,b], \quad i = 0,1,\ldots, \tag{11}$$

$$f_i(t) = \begin{cases} -\varphi(t) & \text{при} \quad i = 0, \\ (L_1 x_{i-1})(t) & \text{при} \quad i = 1,2,\ldots, \end{cases}$$

где L_1 — дифференциальный оператор $(L_1 x)(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} - A_1 x(t)$. Пограничные функции $\Pi_i(\tau)$ определяются из краевых задач

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_i(\tau) = A\Pi_i(\tau) + \psi_i(\tau), \quad \tau \in [\tau_a, \tau_b], \quad \tau_a = 0, \quad \tau_b = \frac{b-a}{\varepsilon}, \tag{12}$$

$$lx_i(\cdot) + l\Pi_i\left(\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} h & \text{при} \quad i=0, \\ 0 & \text{при} \quad i=1,2,\ldots, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\psi_i(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i=0, \\ \sum\limits_{q=i-1}^{0} \dfrac{1}{q!}\,\tau^q A_1^{(q)}(a)\,\Pi_{i-1-q}(\tau) & \text{при} \quad i=1,2,\ldots. \end{cases}$$

Решение системы (11) при $i=0$ имеет вид (3). Неизвестная k-мерная вектор-функция $\alpha_0(t)$ будет определяться из условия разрешимости системы (11) при $i=1$.

Решение системы (12) при $i=0$ имеет вид $\Pi_0(\tau) = X(\tau)c$, $c \in R^n$. Для того чтобы выполнялось требование $\lim\limits_{\tau\to\infty}\Pi_0(\tau)=0$, необходимо в общем решении k компонент вектора c считать равными нулю. Поэтому решение $\Pi_0(\tau)$ примет вид

$$\Pi_0(\tau) = X_{n-k}(\tau)c_0, \quad c_0 \in R^{n-k}. \tag{14}$$

Подставляя (3) и (14) в краевое условие (13) при $i=0$, получаем, что постоянный вектор c_0 и вектор-функция $\alpha_0(t)$ удовлетворяют уравнению

$$l_1\alpha(\cdot) + D(\varepsilon)c_0 = h_0, \tag{15}$$

где $l_1\alpha(\cdot) \equiv l(P_A\alpha(\cdot))$, $h_0 = h + l(A^+\varphi(\cdot))$ — m-мерный вектор-столбец.

Рассмотрим систему (11) при $i=1$. Тогда $x_1(t)$ определяется из уравнения $Ax_1(t) = (L_1x_0)(t)$, условие разрешимости которого приводит, с учетом (15), к следующей краевой задаче для определения вектор-функции $\alpha_0(t)$:

$$\begin{gathered} C\,\frac{d}{dt}\,\alpha_0(t) = B(t)\alpha_0(t) + g_0(t), \quad t\in[a,b], \\ l_1\alpha_0(\cdot) + D(\varepsilon)c_0 = h_0, \end{gathered} \tag{16}$$

где C, $B(t)$ — матрицы из (7), а $g_0(t) = -P_{A^*}(L_1A^+\varphi)(t)$.

Согласно (7) и (8) при $l(t) \equiv g_0(t)$ имеем

$$\alpha_0(t) = \Phi(t,a)\eta_0 + \int\limits_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_0(s)\,ds, \quad \eta_0 \in \mathbf{R}^k. \tag{17}$$

Подставляя (17) в краевое условие из (16), получаем алгебраическую систему относительно η_0 и c_0

$$D(\varepsilon)c_0 = \bar h_0 - Q\eta_0, \tag{18}$$

где $Q = l_1\Phi(\cdot)$ — $(m\times k)$-матрица, $\bar h_0 = h_0 - l\left(\int\limits_a^{(\cdot)} \Phi(\cdot)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_0(s)ds\right)$, $\bar h_0 \in R^m$.

Вектор c_0 ищем в виде

$$c_0 = c_0(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} c_{0j}\varepsilon^j, \quad c_{0j} \in R^{n-k}. \tag{19}$$

Коэффициенты c_{0k} определим из (18).

Для этого введем $((2s+1)m \times (s+1)(n-k))$-блочную матрицу (напомним, что D_i – $(mx(n-k))$-матрицы)

$$\begin{bmatrix} D_0 & & & & \\ D_1 & D_0 & & \mathbf{0} & \\ D_2 & D_1 & D_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_s & D_{s-1} & D_{s-2} & \dots & D_0 \\ & D_s & D_{s-1} & \dots & D_1 \\ & & D_s & \dots & D_2 \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \vdots \\ & & & & D_s \end{bmatrix},$$

а также $(2s+1)m$-мерный вектор

$$b_i = \left(b_{i0} - Q\eta_i, \underbrace{b_{i1}, \dots, b_{is}}_{sm} \underbrace{0, \dots, 0}_{sm} \right)^T \quad \text{при} \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где b_{ij} — постоянные m-мерные векторы, которые определяются в дальнейшем, $\eta_i \in R^k$, $i = \overline{0, s}$.

Очевидно, блочная $((2s+1)m \times (s+1)(n-k))$-матрица M состоит из $(2s+1)(s+1)$ блоков, нулевые и D_i — из $n-k$ строк и m столбцов. Следовательно, матрица M^+ тоже состоит из $(s+1)(2s+1)$ блоков из $n-k$ строк и m столбцов. Через $[M^+]_m^1$ обозначим первый блок из m столбцов. Отдельные блоки матрицы M^+ обозначим через $(M^+)_{i,j}$, $i = \overline{1, s+1}$, $j = \overline{1, 2s+1}$, т. е. $M^+ = \left[(M^+)_{i,j} \right]$, $i = \overline{1, s+1}$, $j = \overline{1, 2s+1}$. Конечно, некоторые из них будут с нулевыми элементами.

Пусть $P_{M^*} : R^{(2s+1)m} \to \ker(M^*)$ — ортопроектор, который является $((2s+1)m \times \times (2s+1)m)$-матрицей, а $P_{M_d^*}$ — $(d \times (2s+1)m)$-матрица, которая состоит из d линейно независимых столбцов матрицы P_{M^*}. Тогда матрица $P_{M_d^*}$ состоит из $(2s+1)d$ блоков, каждый из которых состоит из одной строки и m столбцов. Эти блоки обозначим через $\left(P_{M_d^*}\right)_{i,j}$, $i = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, 2s+1}$. Первый столбец из d блоков матрицы $P_{M_d^*}$ обозначим через $\left[P_{M_d^*}\right]_d^m$, а остальные блоки матрицы $P_{M_d^*}$ — через $\left[P_{M_d^*}\right]_d^{2sm}$. И наконец, через

$[M^+]_{j+1}$ обозначим $((n-k)\times sm)$-матрицу

$$\left[M^+\right]_{j+1} = \left[\left(M^+\right)_{j+1,2}, \left(M^+\right)_{j+1,3}, \ldots, \left(M^+\right)_{j+1,s+1}\right],$$

которая состоит из s блоков j-й строки матрицы M^+.

Лемма. *Пусть выполнены условия:*
1) $\operatorname{rank} M = (s+1)(n-k) < (2s+1)m$, $d = (2s+1)m - (s+1)(n-k)$;
2) $\operatorname{rank} R = d = k(\det R \neq 0)$, $R = \left[P_{M_d^*}\right]_d^m Q$ *— $(d\times k)$-матрица.*
Тогда из алгебраической системы

$$Mc_i = b_i, \tag{20}$$

где $c_i = (c_{i0},\ldots,c_{is})^T$, $c_{ij} \in R^{n-k}$, *единственным образом определяются* η_i, $c_{i0},\ldots,c_{is}$, $i=\overline{0,s},$:

$$\eta_i = R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m b_{i0} - R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^{sm}(b_{i1},b_{i2},\ldots,b_{is})^T, \tag{21}$$

$$c_{ij} = \left(M^+\right)_{j+1,1}\left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m\right)b_{i0} + \left\{\left[\overline{M}^{\,+}\right]_{j+1} + \left[M^+\right]_{j+1}\right\}(b_{i1},\ldots,b_{is})^T, \quad j=\overline{0,s}. \tag{22}$$

Здесь $\left[\overline{M}^{\,+}\right]_{j+1} = -\left(M^+\right)_{j+1,1} QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^{sm}$ *— $((n-k)\times sm)$-матрица.*

Доказательство. Из первого условия следует, что система (20) имеет решение

$$c_i = M^+ b_i, \quad i=\overline{0,s}, \tag{23}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие $P_{M^*}b_i = 0 \Rightarrow P_{M_d^*}b_i = 0$. Из

$$P_{M_d^*}(b_{i0} - Q\eta_i, b_{i1},\ldots,b_{is},0,\ldots,0)^T = 0$$

получаем

$$R\,\eta_i = \left[P_{M_d^*}\right]_d^m b_{i0} + \left[P_{M_d^*}\right]_d^{sm}(b_{i1},b_{i2},\ldots,b_{is})^T. \tag{24}$$

Из равенства (24), согласно условию 2 леммы, находим (21). Подставим (21) в (23). Тогда

$$c_i = M^+\left(b_{i0} - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m b_{i0} - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^{sm}(b_{i1},\ldots,b_{is})^T, b_{i1},\ldots,b_{i,s},0,\ldots,0)^T\right),$$

откуда находим (22).

Лемма доказана.

Замечание 1. Очевидно, векторы $c_{i0}, \ldots, c_{is}$ можно определить последовательно из системы (20) другим способом. Тогда необходимо изменить условия леммы.

Замечание 2. Если $M < \min((s+1)(n-k), (2s+1)m)$, то c_{ij}, $j = \overline{0, s}$, определяются при других условиях. Этот случай представляет и самостоятельный интерес.

Введем обозначения

$$
\begin{gathered}
x_0(t) = P_(A_k)\Phi(t)R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m \bar{h}_0 + \bar{x}_0, \\
\Pi_0(\tau) = X_{n-k}(\tau)\sum_{j=0}^{s}\left(M^+\right)_{j+1,1}\left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m \bar{h}_0\right)\varepsilon^j,
\end{gathered}
\tag{25}
$$

где

$$
\bar{x}_0(t) = P_{A_k}\int\limits_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_0(s)ds - A^+\varphi(t), \tag{26}
$$

и

$$
x_i(t) = P_(A_k)\Phi(t)R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m b_{i0} + \overline{x}_i(t),
$$

$$
\begin{gathered}
\Pi_i(\tau) = X_{n-k}\sum_{j=0}^{s}\Big\{\left(M^+\right)_{j+1,1}\left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m\right)b_{i0} + \\
+\left(\left[\overline{M}^{\,+}\right]_{j+1} + \left[M^+\right]_{j+1}\right)(b_{i1}, \ldots, b_{is})^T\Big\}\varepsilon^j + \overline{\Pi}_i(\tau),
\end{gathered}
\tag{27}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\overline{x}_i(t) = P_{A_k}\Phi(t)\int\limits_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_i(s)ds + A^+(L_1x_{i-1})(t), \\
\overline{\Pi}_i(\tau) = \int\limits_\infty^\tau X(\tau)X^{-1}(s)\psi_s(s)ds, \quad i = 1, 2, \ldots .
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Отметим, что система $\dfrac{dx}{d\tau} = Ax + f(\tau)$, где функция $f(\tau)$ удовлетворяет неравенству $\|f(\tau)\| < c_1\exp(-\alpha_1\tau)$, $c_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$, имеет частное решение вида $\overline{x}(\tau) = -\int\limits_\tau^\infty X(\tau) \times$ $\times X^{-1}(s)f(s)ds$ такое, что $\|\overline{x}(\tau)\| \leq c\exp(-\beta\tau)$, $\tau \geq 0$, $c > 0$, $\beta > 0$.

Теорема. *Пусть выполнены условия $У_1)$ – $У_4)$ и условия леммы. Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, представимое формальным асимптотическим* *рядом вида (9). Коэффициенты разложения $x_i(t)$, $\Pi_i(\tau)$ имеют вид (25) – (28). Пограничные функции $\Pi_i(\tau)$ удовлетворяют неравенству (10). Это решение при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению (25) вырожденной системы при $t \in (a, b]$.*

Доказательство. Отбросим экспоненциально малые элементы в матрице $D(\varepsilon)$ из (5), а затем подставим (5) и (19) в (18). Для определения коэффициентов c_{0j} и η_0 находим систему вида (20) при $i = 0$. Поскольку $b_{00} = \bar{h}_0, \bar{h}_0 = h_0 - l_1\left(\int\limits_a^{(\cdot)} \Phi(\cdot)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_0(s)ds\right)$, $b_{01} = b_{02} = \ldots = b_{0s} = 0$, из (21) и (22) при $i = 0$ имеем

$$\eta_0 = R^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m \bar{h}_0, \quad c_{0j} = \left(M^+\right)_{j+1,1}\left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m\right)\bar{h}_0, \quad j = \overline{0, s}. \tag{29}$$

Используя (3), (17) и η_0 из (29), получаем окончательное выражение для $x_0(t)$ в виде (25). Для пограничной функции $\Pi_0(\tau)$ из (14), (19), (29) находим (26).

Очевидно,

$$\|\Pi_0(\tau)\| \leq \|X_{n-k}(\tau)\| \sum_{j=0}^{s} \left\|\left(M^+\right)_{j+1,1}\left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m\right)\bar{h}_0\right\|\varepsilon^j \leq$$

$$\leq \delta\exp(-\alpha\tau)\left(\delta_{00} + \delta_{01}\varepsilon + \ldots + \delta_{0s}\varepsilon^s\right) \leq \delta\exp(-\alpha\tau)(\delta_{00} + \delta_{01} + \ldots + \delta_{0s}) \leq \delta_0\exp(-\alpha\tau),$$

где $\delta_0 > 0$, $\alpha > 0$, т. е. неравенство (10) выполнено.

Найдем коэффициенты $x_1(t)$ и $\Pi_1(t)$. Решение уравнения (11) при $i = 1$ имеет вид

$$x_1(t) = P_{A_k}\alpha_1(t) + A^+(L_1x_0)(t). \tag{30}$$

Вектор-функцию $\Pi_1(\tau)$ находим из дифференциальной системы (12) при $i = 1$, которая имеет общее решение вида

$$\Pi_1(\tau) = X_{n-k}(\tau)c_1 + \int\limits_{\infty}^{\tau} X(\tau)X^{-1}(s)A_1(a)\Pi_0(s)\,ds, \quad c_1 \in R^{n-k}. \tag{31}$$

Из краевого условия (13) при $i = 1$ имеем

$$l_1\alpha(\cdot) + D(\varepsilon)c_1 = h_1(\varepsilon), \tag{32}$$

где $h_1(\varepsilon) = -l(A^+(L_1x_0))(\cdot) - l\left(\int\limits_{\infty}^{\cdot} X(\cdot)X^{-1}(s)A_1(a)\Pi_0(s)ds\right)$.

Условие разрешимости $P_{A^*}(L_1x_1)(t) = 0$ системы (11) при $i = 2$ приводит к системе вида (6), где $z(t) = \alpha_1(t)$, $p(t) = g_1(t)$, $g_1(t) = -P_{A_k^*}(L_1A^+L_1x_0)(t)$.

Решение дифференциальной системы имеет вид (8)

$$\alpha_1(t) = \Phi(t)\eta_1 + \int\limits_a^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_1(s)ds.$$

Подставляя его в краевое условие (32), получаем аналогичную (18) алгебраическую систему

$$Q\eta_1 + D(\varepsilon)c_1 = \bar{h}_1(\varepsilon), \tag{33}$$

где $\bar{h}_1(\varepsilon) = h_1(\varepsilon) - l_1\left(\int\limits_a^{(\cdot)} \Phi(\cdot)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_1(s)ds\right)$.

Пусть

$$\bar{h}_1(\varepsilon) = b_{10} + \varepsilon b_{11} + \ldots + \varepsilon^s b_{1s} + O(\varepsilon^q \exp(-\alpha/\varepsilon)), \quad \alpha > 0, \quad q \in N.$$

Будем искать c_1 в виде $c_1 = c_1(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{s} c_{1k}\varepsilon^k$. Отбросим экспоненциально малые элементы в $D(\varepsilon)$ и $\bar{h}_1(\varepsilon)$. Согласно доказанной лемме, система (33) имеет решение (21), (22) при $i = 1$. Используя $\alpha_1(t)$ и (30), получаем (27) при $i = 1$.

Индуктивный подход показывает, что коэффициенты $x_i(t)$ и $\Pi_i(\tau)$ разложения (9) имеют вид (27), (28). При этом учтено, что

$$\overline{h}_i(\varepsilon) = h_i(\varepsilon) - l_1\left(\int\limits_a^{(\cdot)} \Phi(\cdot)\Phi^{-1}(s)C^{-1}g_i(s)ds\right) + \sum_{k=0}^{s} b_{ik}\varepsilon^k + O(\varepsilon^q \exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon})),$$

$$h_i(\varepsilon) = -l(A^+(L_1x_{i-1}))(\cdot) - l\left(\int\limits_\infty^{(\cdot)} X(\cdot)X^{-1}(s)\psi_i(s)ds\right),$$

$$g_i(t) = P_{A_k^*}(L_1A^+L_1x_{i-1})(t),$$

$$\psi_i(t) = \sum_{q=i-1}^{0} \frac{1}{q!}s^q A_1^{(a)}\Pi_{i-1-q}(s).$$

Покажем, что все $\Pi_i(\tau)$ экспоненциально убывают. Действительно,

$$\|\Pi(\tau)\| \leq \|X_{n-k}(\tau)\| \sum_{j=0}^{s} \| \left(M^+\right)_{j+1,1} \left(E_m - QR^{-1}\left[P_{M_d^*}\right]_d^m\right) b_{i0} +$$

$$+ \left(\left[\overline{M}^+\right]_{j+1} + \left[M^+\right]_{j+1}\right)(b_{i1}, \ldots, b_{is})^T \|\varepsilon^j + \int\limits_\infty^\tau \|X(\tau)X^{-1}(s)\|\|\Psi_i(s)\|ds \leq$$

$$\leq \delta \exp(-\alpha\tau)(\delta_{i0} + \delta_{i1}\varepsilon + \ldots + \delta_{is}\varepsilon^s) + c_i \exp(-\beta_i\tau) \leq$$

$$\leq \delta \exp(-\alpha\tau)(\delta_{i0} + \delta_{i1} + \ldots + \delta_{is}) + c_i \exp(-\beta_i\tau) \leq \gamma_i \exp(-\alpha_i\tau),$$

где $\gamma_i = \max\limits_i \left(\delta \sum\limits_{j=0}^{s} \delta_{ij}, c_i\right)$, $\alpha_i = \max(\alpha, \beta_i)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = x_0(t)$, $t \in (a,b]$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Доказательство того, что для формального ряда (9) выполнена оценка $\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leq K\varepsilon^{n+1}$, $K > 0$, где $X_n(t,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{n} [x_i(t) + \Pi_i(\tau)]\,\varepsilon^i$, возможно, представляет и самостоятельный интерес.

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.
2. *Generalize* inverse and applications / Ed. M. Z. Nashed. — New York etc.: Acad. Press, 1967. — 1143 p.
3. *Penrose R.* A generalize inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**. — P. 406–413.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
6. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Каранджулов Л. И.* Нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 9. — С. 1186–1193.

Получено 11.05.07