УДК 517 . 925 . 77

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІРРЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГРАНИЧНОЇ МАТРИЦІ

В. П. Яковець, О. В. Головченко

Ніжин. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

We construct asymptotic solutions of a singularly perturbed system of differential equations with an irregular singular point. We consider the cases where the main matrix has a multiple eigen value to which there correspond either a single or several elementary divisors of the same multiplicity. We find that, in the case of multiple elementary divisors, the corresponding asymptotic expansions can be constructed in the form of a double series with fractional powers of the parameter and the ratio of the independent variable and the parameter.

Побудовано асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою. Розглянуто випадки, коли головна матриця має кратне власне значення, якому відповідає один або кілька елементарних дільників однакової кратності. Встановлено, що у випадку кратних елементарних дільників відповідні асимптотичні розвинення можна побудувати у вигляді подвійних рядів за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної і параметра.

1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A\,(x,\varepsilon)\, z + f\,(x,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \frac{\theta\, x^{g+1}}{g+1}\right) \tag{1}$$

з іррегулярною особливою точкою $x = \infty$, де $z\,(x,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор; ε — малий комплексний параметр; $\varepsilon \in \pi_\varepsilon = \{0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \gamma \le \arg \varepsilon \le \delta\}$; x — комплексна змінна; $x \in S = \{|x| \ge a, \alpha \le \arg\, x \le \beta\}$; h і g — невід'ємні цілі числа, $h + g \ge 1$; $A\,(x,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку, $f\,(x,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, які в областях S та π_ε допускають асимптотичні розвинення

$$A\,(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk}, \tag{2}$$

$$f\,(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} f_{sk}; \tag{3}$$

θ — комплексне число.

Такі системи уперше досліджено в роботі [1], де здійснено асимптотичне розщеплення відповідної однорідної системи на підсистеми меншої розмірності. Питання побудови розв'язків системи вигляду (1) розглянуто в роботі [2] за умови простого спектра граничної матриці. Випадок кратного власного значення граничної матриці виявився значно складнішим і в даній статті розглядається вперше.

2. Розглянемо спочатку однорідну систему

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x,\varepsilon)\, z. \tag{4}$$

Будемо вважати, що матриця A_{00} має власне значення λ_0 кратності n, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності. Як відомо [3, с. 177], цьому власному значенню відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки n, який складається з власного вектора φ_1 та $n-1$ приєднаних векторів φ_i, $i=\overline{2,n}$, таких, що виконуються співвідношення

$$\begin{gathered}(A_{00}-\lambda_0 E)\,\varphi_1 = 0,\\ (A_{00}-\lambda_0 E)\,\varphi_i = \varphi_{i-1}, \quad i=\overline{2,n}.\end{gathered} \tag{5}$$

Вектори φ_i, $i=\overline{1,n}$, визначаються неоднозначно. Цю неоднозначність згідно з [4, с. 35] можна усунути, визначивши їх за формулами

$$\varphi_i = H\varphi_{i-1}, \quad i=\overline{2,n}, \tag{6}$$

де H — напівобернена матриця до матриці $A_{00}-\lambda_0 E$. Нехай $\varphi_1=\varphi$ — деякий фіксований власний вектор. Тоді з (6) випливає

$$\varphi_i = H^{i-1}\varphi, \quad i=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Позначимо через φ елемент нуль-простору матриці $(A_{00}-\lambda_0 E)^*$, спряженої з $A_{00}-$ $-\lambda_0 E$, визначивши його так, щоб виконувалась рівність [4, с. 35]

$$(H^{i-1}\varphi,\psi) = \delta_{i,n}, \tag{8}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, а символом (,) позначено скалярний добуток в n-вимірному унітарному просторі.

Виявляється, що в цьому випадку розв'язки системи (4) можна побудувати у вигляді розвинень за дробовими степенями ε та відношенням $\dfrac{1}{x}$ та ε.

Справджується наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) матриця A_{00} має власне значення λ_0 кратності n, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності;

2) $\left|\dfrac{1}{x\varepsilon}\right| < 1$;

3) $(A_{01}\varphi, \psi) \neq 0.$

Тоді система рівнянь (4) має n *частинних формальних розв'язків вигляду*

$$z(x, \varepsilon) = u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu\right) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_0^\tau \tau^{-(g+2)} \lambda\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu\right) d\tau\right), \tag{9}$$

де $u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu\right)$ — n*-вимірний вектор,* $\lambda\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu\right)$ — *скалярна функція, які допускають формальні розвинення*

$$u\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu\right) = \varphi + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^s \mu^k u_{sk}, \tag{10}$$

$$\lambda\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu\right) = \lambda_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^s \mu^k \lambda_{sk}, \tag{11}$$

в яких $\tau = \dfrac{1}{x}$, $\mu = \sqrt[n]{\varepsilon}$.

Доведення. За допомогою підстановки $x = \dfrac{1}{\tau}$ зведемо систему (4) до вигляду

$$-\varepsilon^h \tau^{g+2} \frac{dz}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon) z.$$

Підставивши в цю систему вектор (9) і поклавши $\tilde{\tau} = \dfrac{\tau}{\varepsilon}$, матимемо

$$-\mu^{n(h+g+1)} \tilde{\tau}^{g+2} \frac{du(\tilde{\tau}, \mu)}{d\tilde{\tau}} + \lambda(\tilde{\tau}, \mu) u(\tilde{\tau}, \mu) = A(\tilde{\tau}, \mu) u(\tilde{\tau}, \mu). \tag{12}$$

Врахувавши розвинення (10) і (11), прирівняємо в (12) коефіцієнти при однакових степенях μ та $\tilde{\tau}$. Дістанемо систему алгебраїчних рівнянь

$$(A_{00} - \lambda_0 E) u_{sk} = b_{sk}, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

де

$$b_{sk} = \lambda_{sk}\varphi + \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{ij} u_{s-i,k-j} - a_{sk}, s + k \geq 1, \tag{14}$$

$$a_{sk} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{n}\right]-i} A_{ij} u_{s-i,k-(i+j)n} + \sum_{i=1}^{s} A_{i0} u_{s-i,k-in} +$$

$$+ A_{s,\frac{k-sn}{n}} \varphi + (s-(g+1)) u_{s-(g+1),k-n(h+g+1)}, \quad k \geq n, \quad s = 0, 1, \ldots. \tag{15}$$

Символом $[d]$ позначено цілу частину числа d; $u_{ij} = 0$, якщо $i < 0$ або $j < 0$, $A_{s,\frac{p}{q}} = 0$, якщо p не ділиться на q.

Система (13) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова ортогональності вектора b_{sk} до вектора ψ :

$$(b_{sk}, \psi) = 0. \tag{16}$$

При виконанні цієї умови u_{sk}, $s = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, будемо визначати за формулами

$$u_{sk} = H b_{sk}, \quad s + k \geq 1. \tag{17}$$

Здійснюючи взаємну підстановку формул (14) і (17) та беручи до уваги, що $a_{sk} = 0$ при $k < n$, $s = 0, 1, \ldots$, дістаємо

$$b_{sk} = \sum_{j=1}^{k} P_j^{s,k}(\lambda) H^{j-1}\varphi - \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{k-n}\sum_{j=1}^{r} P_j^{i,r}(\lambda)\, H^j a_{s-i,k-r} - a_{sk}, \quad s + k \geq 1, \tag{18}$$

де символом $P_j^{s,k}(\lambda)$ позначено суму всіх можливих добутків j множників λ_{s_i,k_i} з цілими невід'ємними індексами, сума яких $s_1 + s_2 + \ldots + s_j = s$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_j = k$, тобто

$$P_j^{s,k}(\lambda) = \sum_{\substack{s_1+s_2+\ldots+s_j=s \\ k_1+k_2+\ldots+k_j=k}} \lambda_{s_1k_1}\,\lambda_{s_2k_2}\ldots\lambda_{s_jk_j}. \tag{19}$$

Доведемо справедливість формули (18) методом математичної індукції.

При $k = 1$, $s = 0, 1, \ldots$ з формули (14) випливає

$$b_{s1} = \lambda_{s1}\varphi = \sum_{j=1}^{1} P_j^{s,1}(\lambda) H^{j-1}\varphi,$$

тобто формула (18) є правильною.

Припустимо, що вона є правильною при $k < l$, $s = 0, 1, \ldots$. Тоді згідно з (17), (18) і (14)

$$u_{s-i,l-j} = \sum_{j_1=1}^{l-j} P_{j_1}^{s-i,l-j}(\lambda) H^{j_1}\varphi - \sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r_1=1}^{l-j-n}\sum_{j_1=1}^{r_1} P_{j_1}^{i_1,r_1}(\lambda) H^{j_1+1} a_{s-i-i_1,l-j-r_1} - H a_{s-i,l-j}.$$

Отже,

$$b_{sl} = \lambda_{sl}\varphi + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}u_{s-i,l-j} - a_{sl} =$$

$$= \lambda_{sl}\varphi + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{j_1=1}^{l-j}\lambda_{ij}P_{j_1}^{s-i,l-j}(\lambda)H^{j_1}\varphi -$$

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-n-1}\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r_1=1}^{l-j-n}\sum_{j_1=1}^{r_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_1r_1}(\lambda)H^{j_1+1}a_{s-i-i_1,l-j-r_1} -$$

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-n}\lambda_{ij}Ha_{s-i,l-j} - a_{sl}.$$

Врахувавши співвідношення

$$\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{s-i,l-j}(\lambda) = P_{j_1+1}^{s,l}(\lambda),$$

$$\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{j=1}^{r_2-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_2-i,r_2-j}(\lambda) = P_{j_1+1}^{i_2,r_2}(\lambda), \tag{20}$$

останній вираз перетворимо до вигляду

$$b_{sl} = \lambda_{sl}\varphi + \sum_{j_1=2}^{l}P_{j_1}^{s,l}(\lambda)H^{j_1-1}\varphi - \sum_{i_2=0}^{s}\sum_{r_2=2}^{l-n}\sum_{j_1=2}^{r_2}P_{j_1}^{i_2,r_2}(\lambda)H^{j_1}a_{s-i_2,l-r_2} - \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-n}P_1^{i,j}(\lambda)Ha_{s-i,l-j} - a_{sl}.$$

Змінивши індекси, остаточно дістанемо

$$b_{sl} = \sum_{j=1}^{l}P_j^{s,l}(\lambda)H^{j-1}\varphi - \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-n}\sum_{j=1}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^j a_{s-i,l-r} - a_{sl}.$$

Отже, формула (18) є правильною для $k = l$, $s = 0, 1, \ldots$, звідки випливає, що вона справджується для довільних натуральних k і $s = 0, 1, \ldots$.

З використанням формули (18) та умови (16) можна визначити будь-які коефіцієнти розвинення (11) для функції $\lambda\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}, \mu\right)$. Дійсно, якщо $k < n$, $s = 0, 1, \ldots$, то згідно з (8) умова (16) виконується; при $k = n$, $s = 0$ ця умова має вигляд

$$\lambda_{01}^n - (A_{01}\varphi, \psi) = 0,$$

звідки можна знайти n різних відмінних від нуля значень коефіцієнта λ_{01} :

$$\lambda_{01}^{(j)} = \sqrt[n]{|(A_{01}\varphi, \psi)|}\, \exp\left(i\,\frac{\arg(A_{01}\varphi, \psi) + 2\pi(j-1)}{n}\right), \quad j = \overline{1, n}. \tag{21}$$

Знаючи $\lambda_{01}^{(j)}$, визначимо відповідні вектори $u_{01}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$. Використавши умову (16) при $k > n$, $s = 1, 2, \ldots$, визначимо коефіцієнти λ_{0i} та вектори u_{0i}, $i = 1, 2, \ldots$.

Дійсно, нехай λ_{0i} та u_{0i} є відомими при $i < k$. Тоді з умови $(b_{0,n+k-1}, \psi) = 0$ знайдемо

$$\lambda_{0k} = -\frac{1}{n\lambda_{01}^{n-1}}\left(\left(\sum_{j=n+1}^{n+k-1} P_j^{0,n+k-1}(\lambda)H^{j-1}\varphi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{r=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{r} P_j^{0,r}(\lambda)H^j a_{0,n+k-1-r} - a_{0,n+k-1}, \psi\right) + \widetilde{P}_n^{0,n+k-1}(\lambda)\right),$$

де $\widetilde{P}_n^{0,n+k-1}(\lambda)$ — сума тих доданків $P_n^{0,n+k-1}(\lambda)$, які не містять λ_{0k}.

Якщо всі λ_{ij} та u_{ij} визначені при $j < k$, $i = 0, 1, \ldots$ і при $j = k$, $i < s$, то для визначення λ_{sk} використаємо умову $(b_{s,n+k-1}, \psi) = 0$. В результаті дістанемо

$$\lambda_{sk} = -\frac{1}{n\lambda_{01}^{n-1}}\left(\left(\sum_{j=n+1}^{n+k-1} P_j^{s,n+k-1}(\lambda)H^{j-1}\varphi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{r} P_j^{i,r}(\lambda)H^j a_{s-i,n+k-1-r} - a_{s,n+k-1}, \psi\right) + \widetilde{P}_n^{s,n+k-1}(\lambda)\right), \tag{22}$$

$\widetilde{P}_n^{s,n+k-1}(\lambda)$ — та частина $P_n^{s,n+k-1}(\lambda)$, які не містять λ_{sk}.

Отримані рекурентні формули (17), (21), (22) дозволяють послідовно визначити будь-які коефіцієнти розвинень (10), (11).

Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли n-кратному власному значенню λ_0 відповідає r елементарних дільників кратності p $(rp = n)$. У цьому випадку матриця A_{00} має r жорданових ланцюжків векторів $\varphi_j^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,p}$, завдовжки p, що відповідають її власному значенню λ_0, які задовольняють співвідношення

$$(A_{00} - \lambda_0 E)\varphi_1^{(i)} = 0,$$

$$(A_{00} - \lambda_0 E)\varphi_j^{(i)} = \varphi_{j-1}^{(i)}, \quad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{2,p},$$

а рівняння $(A_{00} - \lambda_0 E)y = \varphi_p^{(i)}$ є нерозв'язними.

Вектори $\varphi_j^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,p}$, з цих співвідношень визначаються за формулами

$$\varphi_1^{(i)} = \varphi^{(i)},$$
$$\varphi_j^{(i)} = H^{j-1}\varphi^{(i)}, \quad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{2,p}, \tag{23}$$

де $\varphi^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$, — деякі фіксовані власні вектори.

Позначимо через $\psi^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$, базисні вектори нуль-простору матриці $(A_{00} - \lambda_0 E)^*$. Ці вектори, як і власні вектори $\varphi^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$, визначаються неоднозначно. Проте при будь-якому їх виборі [4, с. 107]

$$\det \left\| \varphi_p^{(i)}, \psi^{(j)} \right\|_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0.$$

Ця умова дає змогу визначити вектори $\psi^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$, так, щоб виконувалось співвідношення

$$\left(\varphi_p^{(i)}, \psi^{(j)} \right) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,r}.$$

З урахуванням (23) ці співвідношення можна записати у вигляді

$$\left(H^{p-1} \varphi^{(i)}, \psi^{(j)} \right) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,r}. \tag{24}$$

Позначимо через U_0 лінійну оболонку векторів $\varphi^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$. Розглянемо оператор проектування Q, що відображає n-вимірний простір U на підпростір U_0 так, що

$$Qu = \sum_{i=1}^{r} \left(u, \psi^{(i)} \right) \varphi^{(i)} \quad \forall u \in U.$$

Виходячи з (24), можна встановити такі властивості оператора Q [4, с. 109]. Якщо $u \in U_0$, то

$$QH^{i-1} u = 0 \quad \text{при} \quad i < p, \quad QH^{p-1} u = u. \tag{25}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) матриця A_{00} має кратне власне значення λ_0, якому відповідає r елементарних дільників кратності p;

2) $\left| \dfrac{1}{x\varepsilon} \right| < 1$;

3) всі власні значення $(r \times r)$-матриці $R = \left\| \left(A_{01} \varphi^{(j)}, \psi^{(j)} \right) \right\|_{i,j=\overline{1,r}}$ є простими і відмінними від нуля.

Тоді система рівнянь (4) має $rp = n$ формальних розв'язків вигляду

$$z(x,\varepsilon) = v\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu \right) \exp \left(-\varepsilon^{-h} \int_0^{\tau} \tau^{-(g+2)} \lambda \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu \right) d\tau \right), \tag{26}$$

де $v\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}, \mu \right)$ — n-вимірний вектор, $\lambda\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}, \mu \right)$ — скалярна функція, які допускають формальні розвинення

$$v\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \mu \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^s \mu^k v_{sk}, \tag{27}$$

$$\lambda\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\mu\right) = \lambda_0 + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^s \mu^k \lambda_{sk}, \tag{28}$$

в яких $\tau = \dfrac{1}{x}$, $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$.

Доведення. Підставивши вектор (26) у систему (4) і поклавши $\widetilde{\tau} = \dfrac{\tau}{\varepsilon}$, матимемо систему вигляду (12). Врахувавши розвинення (27), (28), прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях μ та $\widetilde{\tau}$. Дістанемо систему алгебраїчних рівнянь

$$(A_{00} - \lambda_0 E)v_{s0} = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{29}$$

$$(A_{00} - \lambda_0 E)v_{sk} = b_{sk}, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

$$b_{sk} = \lambda_{sk}v_{00} + \sum_{i=0}^{s-1}\lambda_{ik}v_{s-i,0} + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_{ij}v_{s-i,k-j} - a_{sk}, \tag{31}$$

$$a_{sk} = \sum_{i=1}^{s}A_{i0}v_{s-i,k-ip} + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]-i}A_{ij}v_{s-i,k-(i+j)p} + (s-(g+1))v_{s-(g+1),k-p(h+g+1)}. \tag{32}$$

Покажемо, що з системи (29), (30) можна визначити коефіцієнти розвинень (27), (28).

З системи (29) маємо

$$v_{s0} = u_{s0}, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{33}$$

де u_{s0} — вектори з підпростору U_0, які визначимо далі.

Рівняння (30) розв'язні відносно v_{sk} тоді і тільки тоді, коли [4, с. 109]

$$Qb_{sk} = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Якщо ця умова виконується, то вектори v_{sk}, $s = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, визначатимемо з рівняння (30) за формулою

$$v_{sk} = Hb_{sk} + u_{sk}, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

де u_{sk} — вектори з підпростору U_0, які залишаються невідомими.

Для визначення λ_{sk} та векторів u_{sk} використаємо умову (34). З цією метою виразимо вектори b_{sk} через λ_{ij} та u_{ij}. Послідовно підставивши (33), (35) у (31), дістанемо

$$b_{sk} = \sum_{j=1}^{k}P_j^{s,k}(\lambda)H^{j-1}u_{00} + \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{k}P_j^{i,k}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,0} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,k-r} - \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{k-p}\sum_{j=1}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j}a_{s-i,k-r} - a_{sk}, \tag{36}$$

де $P_j^{s,k}(\lambda)$ — вирази вигляду (19).

Доведемо справедливість формули (36) методом математичної індукції. Припустимо, що вона є правильною при $k < l$. Знаючи, що

$$v_{s-i,k-j} = \sum_{j_1=1}^{k-j} P_{j_1}^{s-i,k-j}(\lambda)H^{j_1}u_{00} + \sum_{i_1=0}^{s-i-1}\sum_{j_1=1}^{k-j} P_{j_1}^{i_1,k-j}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,0}+$$
$$+\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{k-j-1}\sum_{j_1=1}^{r} P_{j_1}^{i_1,r}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,k-j-r}-$$
$$-\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{k-j-p}\sum_{j_1=1}^{r} P_{j_1}^{i_1,r}(\lambda)H^{j_1+1}a_{s-i-i_1,k-j-r}-$$
$$-Ha_{s-i,k-j} + u_{s-i,k-j}, \quad i=\overline{0,s}, \quad j=\overline{1,k-1}, \tag{37}$$

підставимо вирази (33), (37) у (31). Після цього отримаємо

$$b_{sl} = \lambda_{sl}u_{00} + \sum_{i=0}^{s-1}\lambda_{il}u_{s-i,0} + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{j_1=1}^{l-j}\lambda_{ij}P_{j_1}^{s,l-j}(\lambda)H^{j_1}u_{00}+$$
$$+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i_1=0}^{s-i-1}\sum_{j_1=1}^{l-j}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_1,l-j}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,0}+$$
$$+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{l-j-1}\sum_{j_1=1}^{r}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_1,r}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,l-j-r}-$$
$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-p}\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{l-j-p}\sum_{j_1=1}^{r}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_1,r}(\lambda)H^{j_1+1}a_{s-i-i_1,l-j-r}-$$
$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}Ha_{s-i,l-j} + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}u_{s-i,l-j} - a_{sl}.$$

Змінивши порядок підсумовування у третьому доданку та замінивши i_1 та r на $i+i_1=i_2$ та $j+r=r_1$ у четвертому, п'ятому та шостому доданках, зведемо цей вираз до вигляду

$$b_{sl} = \lambda_{sl}u_{00} + \sum_{i=0}^{s-1}\lambda_{il}u_{s-i,0} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j_1=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{l-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{s-i,l-j}(\lambda)H^{j_1}u_{00}+$$
$$+\sum_{i_2=0}^{s-1}\sum_{j_1=1}^{l-1}\sum_{i=1}^{i_2}\sum_{j=1}^{l-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_2-i,l-j}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i_2,0}+$$
$$+\sum_{i_2=0}^{s}\sum_{r_1=2}^{l-1}\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{j_1=1}^{r_1-1}\sum_{j=1}^{r_1-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_2-i,r_1-j}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i_2,l-r_1}-$$

$$-\sum_{i_2=0}^{s}\sum_{r_1=2}^{l-p}\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{j_1=1}^{r_1-1}\sum_{j=1}^{r_1-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_2-i,r_1-j}(\lambda)H^{j_1+1}a_{s-i_2,l-r_1}-$$

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}Ha_{s-i,l-j}+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}u_{s-i,l-j}-a_{sl}.$$

Врахувавши співвідношення (20) та перепозначивши індекси, будемо мати

$$b_{sl}=\lambda_{sl}u_{00}+\sum_{j=2}^{l}P_j^{s,l}(\lambda)H^{j-1}u_{00}+\sum_{i=0}^{s-1}P_1^{i,l}(\lambda)u_{s-i,0}+\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=2}^{l}P_j^{i,l}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,0}+$$

$$+\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=2}^{l-1}\sum_{j=2}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,l-r}+\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-1}P_1^{i,r}(\lambda)u_{s-i,l-r}-$$

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=2}^{l-p}\sum_{j=2}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j}a_{s-i,l-r}-\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-p}P_1^{i,r}(\lambda)Ha_{s-i,l-r}-a_{sl}=$$

$$=\sum_{j=1}^{l}P_j^{s,l}(\lambda)H^{j-1}u_{00}+\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{l}P_j^{i,l}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,0}+\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,l-r}-$$

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-p}\sum_{j=1}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j}a_{s-i,l-r}-a_s,$$

що й слід було довести.

Враховуючи властивості (25) оператора Q і беручи до уваги (36), приходимо до висновку, що при $k<p$ умова (34) розв'язності рівнянь (29), (30) виконується. При $s=0$, $k=p$ ця умова запишеться у вигляді

$$\lambda_{01}^{p}u_{00}-QA_{01}u_{00}=0. \tag{38}$$

Оператор QA_{01} відображає n-вимірний унітарний простір U на r-вимірний підпростір U_0. Його звуження на підпростір U_0 позначимо через $\mathcal{R}$. Матриця цього оператора у підпросторі U_0 має вигляд

$$R=\left\|(A_{01}\varphi^{(j)},\psi^{(i)})\right\|_{i,j=\overline{1,r}}. \tag{39}$$

Отже, у підпросторі U_0 рівняння (38) набере вигляду

$$(R-\lambda_{01}^{p}E)u_{00}=0, \tag{40}$$

де E — одинична $(r\times r)$-матриця.

Зазначимо, що вектор u_{00} з підпростору U_0 зображується у базисі $\varphi^{(i)}$, $i = \overline{1,r}$, цього підпростору у вигляді r-вимірного вектора

$$u_{00} = \mathrm{col}\left(c_1^{(00)}, c_2^{(00)}, \ldots, c_r^{(00)}\right), \tag{41}$$

де $c_i^{(00)}$, $i = \overline{1,r}$, — коефіцієнти його розкладу за базисними векторами. В n-вимірному просторі U вектор (41) можна подати у вигляді

$$u_{00} = \sum_{i=1}^{r} c_i^{(00)} \varphi^{(i)}.$$

За умовою 3 теореми оператор $\mathcal{R}$ має r простих відмінних від нуля власних значень η_j, $j = \overline{1,r}$, тому з (40) можна знайти $rp = n$ різних відмінних від нуля значень λ_{01} :

$$\lambda_{01} = \sqrt[p]{|\eta_j|}\exp\left(i\frac{\arg\eta_j + 2(k-1)\pi}{p}\right), \quad k = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,r}, \tag{42}$$

і r різних векторів u_{00}, тобто

$$u_{00} = \varphi_j^*, \quad j = \overline{1,r}, \tag{43}$$

де φ_j^* — власні вектори матриці R, що відповідають власним значенням η_j, $j = \overline{1,r}$. Знаючи вектор u_{00}, можна визначити v_{00} за формулою (33).

Виведемо рекурентні формули для визначення решти коефіцієнтів розвинень (27), (28). Для цього зафіксуємо одне із значень λ_{01} та один із векторів u_{00}, визначених за формулами (42), (43). Власне значення матриці (39) та власний вектор, який йому відповідає, позначимо через η та φ^* відповідно.

Нехай $\lambda_{i,j+1}$ та вектори u_{ij}, $i = \overline{0,s}$, $j = \overline{0,k-1}$, вже відомі, тоді для визначення $\lambda_{s,k+1}$ та u_{sk} використаємо умову

$$Qb_{s,k+p} = 0,$$

де

$$b_{s,k+p} = \sum_{j=1}^{k+p} P_j^{s,k+p}(\lambda) H^{j-1}\varphi^* + \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{k+p} P_j^{i,k+p}(\lambda) H^{j-1} u_{s-i,0} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{k+p-1}\sum_{j=1}^{r} P_j^{i,r}(\lambda) H^{j-1} u_{s-i,k+p-r} - \tilde{a}_{s,k+p} - A_{01}u_{sk},$$

$$\tilde{a}_{s,k+p} = \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} P_j^{i,r}(\lambda) H^{j} a_{s-i,k+p-r} + a_{sk} - A_{01}u_{sk}.$$

Враховуючи властивості (25) оператора Q і переходячи у підпростір U_0, отримуємо систему рівнянь

$$(R-\eta E)u_{sk} = \tilde{b}_{sk}, \quad s \geq 0, \;\; k \geq 0, \quad s+k \neq 0, \tag{44}$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{sk} = {} & \sum_{j=p+1}^{k+p} P_j^{s,k+p}(\lambda) Q H^{j-1}\varphi^* + P_p^{s,k+p}(\lambda)\varphi^* + \\ & + \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=p+1}^{k+p} P_j^{i,k+p}(\lambda) Q H^{j-1} u_{s-i,0} + \\ & + \sum_{i=0}^{s-1} P_p^{i,k+p}(\lambda) u_{s-i,0} + \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=p+1}^{k+p-1}\sum_{j=p+1}^{r} P_j^{i,r}(\lambda) Q H^{j-1} u_{s-i,k+p-r} + \\ & + \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=p+1}^{k+p-1} P_p^{i,r}(\lambda) u_{s-i,k+p-r} + \sum_{i=1}^{s} P_p^{i,p}(\lambda) u_{s-i,k} - Q\tilde{a}_{s,k+p}.\end{aligned} \tag{45}$$

Умова розв'язності системи (44) має вигляд

$$(\tilde{b}_{sk}, \psi^*) = 0, \tag{46}$$

де ψ^* — елемент нуль-простору матриці $(R-\eta E)^*$, спряженої до $R-\eta E$, який визначимо так, щоб

$$(\varphi^*, \psi^*) = 1. \tag{47}$$

З умови (46), враховуючи (45), (47), знаходимо

$$\lambda_{s,k+1} = -\frac{(d_{sk}, \psi^*) + \tilde{P}_p^{s,k+p}(\lambda)}{p\lambda_{01}^{p-1}}, \qquad s \geq 0, \;\; k \geq 0, \quad s+k \neq 0, \tag{48}$$

де d_{sk} — вже відомий вектор із підпростору U_0, який має вигляд

$$\begin{aligned}d_{sk} = {} & \sum_{j=p+1}^{k+p} P_j^{s,k+p}(\lambda) Q H^{j-1}\varphi^* + \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=p+1}^{k+p} P_j^{i,k+p}(\lambda) Q H^{j-1} u_{s-i,0} + \sum_{i=0}^{s-1} P_p^{i,k+p}(\lambda) u_{s-i,0} + \\ & + \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=p+1}^{k+p-1}\sum_{j=p+1}^{r} P_j^{i,r}(\lambda) Q H^{j-1} u_{s-i,k+p-r} + \\ & + \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=p+1}^{k+p-1} P_p^{i,r}(\lambda) u_{s-i,k+p-r} + \sum_{i=1}^{s} P_p^{i,r}(\lambda) u_{s-i,k} - Q\tilde{a}_{s,k+p}.\end{aligned}$$

Вектори u_{sk} визначимо за формулою

$$u_{sk} = \tilde{H}\,\tilde{b}_{sk}, \quad s \geq 0, \ k \geq 0, \quad s + k \neq 0, \tag{49}$$

де $\tilde{H}$ — напівобернена матриця до $R - \eta E$. Знаючи $\lambda_{s,k+1}$ та u_{sk}, $s \geq 0$, $k \geq 0$, $s + k \neq 0$, за формулами (33), (35) знаходимо v_{sk}.

Виведені рекурентні формули (33), (35), (42), (43), (48) і (49) дають можливість визначити будь-які коефіцієнти розвинень (27), (28).

Теорему доведено.

Неважко переконатися, що формальні розв'язки системи (4), побудовані згідно з теоремами 1, 2, лінійно незалежні при досить малих ε і $\dfrac{1}{x\varepsilon}$; отже, дозволяють побудувати загальний формальний розв'язок цієї системи.

3. Побудуємо частинний розв'язок неоднорідної системи (1) за виконання умов, сформульованих у п. 2.

При цьому необхідно розрізняти два випадки:

1) „резонансу", коли значення θ збігається з коренем характеристичного рівняння $\det(A_{00} - \lambda E) = 0$;

2) „нерезонансу", коли θ не дорівнює жодному з коренів характеристичного рівняння.

У другому випадку матриця $A_{00} - \theta E$ є неособливою і побудова частинного розв'язку системи (1) не залежить від кратності елементарних дільників матриці A_{00}. Цей випадок досліджено в [2].

Проведемо дослідження у випадку „резонансу", коли $\theta = \lambda_0$, де λ_0 — кратне власне значення, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності. Справджується наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1 – 3 теореми 1. Тоді система (1) має формальний розв'язок вигляду*

$$z(x,\varepsilon) = p\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \exp\left(\varepsilon^{-h}\frac{\lambda_0 x^{g+1}}{g+1}\right), \tag{50}$$

де $p\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ — *n-вимірний вектор, який в областях S та π_ε допускає формальне розвинення*

$$p\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \tau^g \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^s \varepsilon^k z_{sk}, \tag{51}$$

в якому $\tau = \dfrac{1}{x}$.

Доведення. Вкажемо алгоритм визначення коефіцієнтів розвинення (51). Для цього підставимо вектор (50) у систему (1). Врахувавши розвинення (2), (3), (51), прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε та $\dfrac{\tau}{\varepsilon}$. Отримаємо систему рівнянь

$$(A_{00} - \lambda_0 E) z_{s,-1} = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{52}$$

$$(A_{00} - \lambda_0 E) z_{s,k} = b_{sk}, \quad s, k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{53}$$

де

$$\begin{aligned} b_{sk} &= \bar{b}_{sk} - (g + s - (g+1)) z_{s-(g+1), k-(h+g+1)}, \\ \bar{b}_{sk} &= -\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{k+1-i} A_{ij} z_{s-i, k-i-j} - \sum_{j=1}^{k+1} A_{0j} z_{s, k-j} - f_{s, k-s}. \end{aligned} \tag{54}$$

З рівнянь (52) маємо

$$z_{s,-1} = c_{s,-1} \varphi, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{55}$$

де φ — власний вектор, що відповідає власному значенню λ_0, $c_{s,-1}$ — числа, які визначимо далі.

Система (53) буде розв'язною, якщо виконуватиметься умова (16) для векторів (54). За її виконання вектори z_{sk} будемо визначати за формулами

$$z_{sk} = H b_{sk} + c_{sk} \varphi, \quad s, k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{56}$$

Для визначення чисел c_{sk}, $s = 0, 1, \ldots$, $k = -1, 0, 1, \ldots$, зафіксуємо індекс s і застосуємо умову (16) до рівнянь (53) на $(k+1)$-му кроці.

З умови $(b_{00}, \psi) = 0$ дістанемо

$$c_{0,-1} = -\frac{(f_{00}, \psi)}{(A_{01} \varphi, \psi)}. \tag{57}$$

Якщо індекси s і k задовольняють умову

$$\begin{gathered} 0 \le s < g + 1, \quad k \ge -1; \\ s \ge 0, \quad -1 \le k < h + g - 1, \end{gathered} \tag{58}$$

то вектори $b_{s,k+1}$ можна подати у вигляді

$$b_{s,k+1} = -c_{sk} A_{01} \varphi - d_{s,k+1}, \tag{59}$$

де

$$d_{s,k+1} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{k+2-i} A_{ij} z_{s-i, k+1-i-j} + \sum_{j=2}^{k+1} A_{0j} z_{s, k+1-j} + f_{s, k+1-s} + A_{01} H b_{sk}. \tag{60}$$

Застосовуючи (16) до (59), отримуємо

$$c_{sk} = -\frac{(d_{s,k+1}, \psi)}{(A_{01} \varphi, \psi)}. \tag{61}$$

При $s \geq g+1,\ k \geq h+g-1$ у виразах (54) з'явиться доданок $(g+s-(g+1))\times$ $\times z_{s-(g+1),k+1-(h+g+1)}$, що вплине на визначення коефіцієнтів c_{sk}. Нехай тепер індекси s і k такі, що

$$
\begin{gathered}
s \geq m(g+1),\\
m(h+g+1)-2 \leq k < (m+1)(h+g+1)-2;\\
m(g+1) \leq s < (m+1)(g+1),\\
k \geq m(h+g+1)-2;
\end{gathered}
\tag{62}
$$

де $m = \min\left\{\left[\dfrac{s}{g+1}\right], \left[\dfrac{k+2}{h+g+1}\right]\right\},\ m \geq 1.$

З умови (16), застосованої до вектора

$$
b_{s,k+1} = -c_{sk}A_{01}\varphi - \overline{d}_{s,k+1} - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\prod_{j=1}^{i}(g+s-j(g+1))c_{s-i(g+1),k+1-i(h+g+1)}H^{i-1}\varphi,
$$

де

$$
\begin{gathered}
\overline{d}_{s,k+1} = d_{s,k+1} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\prod_{j=1}^{i}(g+s-j(g+1))H^{i}\overline{b}_{s-i(g+1),k+1-i(h+g+1)} + \tilde{d}_{s,k+1},\\
\widetilde{d}_{s,k+1} = \sum_{i=n+1}^{m}(-1)^{i+1}\prod_{j=1}^{i}(g+s-j(g+1))c_{s-i(g+1),k+1-i(h+g+1)}H^{i-1}\varphi,
\end{gathered}
\tag{63}
$$

матимемо

$$
c_{sk} = -\frac{1}{(A_{01}\varphi,\psi)}\left(\left(\overline{d}_{s,k+1},\psi\right) + (-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(g+s-j(g+1))c_{s-n(g+1),k+1-n(h+g+1)}\right).
\tag{64}
$$

У формулі (64) покладемо $c_{ij}=0$, якщо $i<0,\ j<-1$, і $b_{s,-1}=0,\ s=0,1,\ldots$.

Умова (58) випливає з (62) при $m=0$. Отже, коефіцієнти c_{sk} можна знайти за формулою (64), якщо індекси s і k задовольняють умову (62) при $m \geq 0$. Рекурентні формули (55), (56), (64) дозволяють визначити всі коефіцієнти розвинення (51).

Теорему доведено.

За теоремою 3 побудовано розв'язок для випадку n-кратного власного значення λ_0 матриці A_{00}, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності. Якщо ж цьому власному значенню відповідає r елементарних дільників кратності p, то частинний розв'язок системи (1) можна побудувати, використавши теоретичні відомості та позначення, введені в п. 2.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 2 і матриця*

$$R = \left\| (A_{01}\varphi^{(j)}, \psi^{(i)}) \right\|_{i,j=\overline{1,r}}$$

є невиродженою. Тоді частинний формальний розв'язок системи (1) можна побудувати у вигляді (50), де вектор $p\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ *допускає розвинення (51).*

Доведення. Визначення коефіцієнтів z_{sk} розвинення (51) будемо проводити, використовуючи звуження $\mathcal{R}$ оператора QA_{01} на підпростір U_0.

Підставивши вектор (50) у систему (1) та врахувавши розвинення (2), (3), (51), як і при доведенні теореми 3, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь (52) – (54). Розв'язок системи (52) можна подати у вигляді

$$z_{s,-1} = u_{s,-1}, \quad s = 0, 1, \ldots , \tag{65}$$

де $u_{s,-1}$ — вектори з підпростору U_0, які визначимо далі. Якщо умова (34) розв'язності системи (53) виконується, то вектори z_{sk} шукатимемо у вигляді

$$z_{sk} = Hb_{sk} + u_{sk}, \quad k, s = 0, 1, \ldots , \quad u_{sk} \in U_0. \tag{66}$$

Вектори u_{sk} визначимо, застосувавши умову (34) до векторів $b_{s,k+1}$.

Якщо індекси s і k задовольняють умову (62) при $m \geq 0$, то вектори u_{sk} визначаються з рівнянь

$$Ru_{sk} = -\left(Q\overline{d}_{s,k+1} + (-1)^{p+1} \prod_{j=1}^{p} (g + s - j(g+1)) u_{s-p(g+1),k+1-p(h+g+1)} \right),$$

де R — матриця вигляду (39), яка за умовою теореми є невиродженою. Вектори $\overline{d}_{s,k+1}$ мають вигляд (63), якщо

$$\tilde{d}_{s,k+1} = \sum_{i=p+1}^{m} (-1)^{i+1} \prod_{j=1}^{i} (g + s - j(g+1)) H^{i-1} u_{s-i(g+1),k+1-i(h+g+1)}.$$

Отже

$$u_{sk} = -R^{-1} \left(Q\overline{d}_{s,k+1} + (-1)^{p+1} \prod_{j=1}^{p} (g + s - j(g+1)) u_{s-p(g+1),k+1-p(h+g+1)} \right), \tag{67}$$

де $u_{ij} = 0$, якщо $i < 0$, $j < -1$. Таким чином, формули (65) – (67) задають алгоритм визначення коефіцієнтів розвинення (51).

Теорему доведено.

Використавши методи робіт [4, 5], можна довести, що формальні розв'язки систем (1), (4) є асимптотичними розвиненнями деяких точних розв'язків цих систем, якщо $\varepsilon \to 0$, $x \to \alpha$, $\left|\frac{1}{x\varepsilon}\right| < 1$.

1. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. — Киев, 1980. — 48 с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 80.3).
2. *Давидюк Г. П.* Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1983. — 132 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
4. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
5. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.

Одержано 11.10.06