УДК 517.9

УМОВИ ОБОРОТНОСТІ НЕЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА $(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - f(x(n))$ У ПРОСТОРІ $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@USUWM.rv.ua

Necessary and sufficient conditions of invertibility of the nonlinear operator $(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - f(x(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, in the space of bounded two-sided number sequences are obtained. Here $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous map.

Отримано необхідні і достатні умови оборотності нелінійного різницевого оператора $(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - f(x(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, у просторі обмежених двосторонніх числових послідовностей. Тут $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція.

1. Вступ. Позначимо через l_∞ банахів простір усіх відображень $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, множина значень кожного з яких є обмеженою, з нормою $\|x\|_{l_\infty} = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|$, а через T^m, $m \in \in \mathbb{Z}$, — оператор зсуву, що діє у просторі l_∞ і визначається рівністю $(T^m x)(n) = x(n + +m)$, де $n \in \mathbb{Z}$ і $x \in l_\infty$. Нехай $\mathcal{K}_{l_\infty}$ — множина всіх компактних підмножин простору l_∞ і $\mathrm{cl}_{l_\infty}\mathcal{G}$ — замикання множини $\mathcal{G}$ у просторі l_∞. Елемент $x \in l_\infty$ називається майже періодичним елементом простору l_∞, якщо $\mathrm{cl}_{l_\infty}\{T^m x : m \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{K}_{l_\infty}$.

Позначимо через $\mathcal{A}Pl_\infty$ банахів простір усіх майже періодичних елементів простору l_∞ з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{A}Pl_\infty}$, визначеною рівністю $\|x\|_{\mathcal{A}Pl_\infty} \overset{\mathrm{df}}{=} \|x\|_{l_\infty}$.

Основною метою цієї роботи є встановлення необхідних і достатніх умов оборотності у просторах l_∞ і $\mathcal{A}Pl_\infty$ відповідно різницевого оператора $\mathcal{D}$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - f(x(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $x \in l_\infty$ і $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty}$ — звуження оператора $\mathcal{D}$ на підпростір $\mathcal{A}Pl_\infty$ простору l_∞.

При встановленні умов оборотності оператора $\mathcal{D}$ важливу роль відіграватиме властивість c-неперервності цього оператора.

2. c-Неперервні оператори. Будемо говорити, що послідовність $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, локально збігається до елемента $x \in l_\infty$ при $k \to \infty$, і позначати

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність є обмеженою і $\lim\limits_{k \to \infty} |x_k(n) - x(n)| = 0$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Оператор $F : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ називатимемо c-неперервним, якщо для довільних $x \in l_\infty$ і послідовності $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} x$ при $k \to \infty$, випливає $F x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} F x$ при $k \to \infty$.

Множина c-неперервних операторів, очевидно, є досить широкою і містить оператори $\mathcal{D}$ і T^m.

Зазначимо, що ні c-неперервність не випливає з неперервності, ні неперервність не випливає з c-неперервності [1].

3. Множини $\mathfrak{F}_s$, $\mathfrak{F}_u$, $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$. При дослідженні оператора $\mathcal{D}$ будемо використовувати ряд допоміжних множин.

Нехай $R(\mathcal{A})$ — множина значень відображення $\mathcal{A} : X \to X$, де X — один із просторів $\mathbb{R}$ та l_∞, і $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — одиничне відображення.

Позначимо через $\mathfrak{F}_s$ і $\mathfrak{F}_u$ множини всіх функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконуються відповідно нерівності $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ і $|g(x) - g(y)| > |x - y|$, якщо $x, y \in \mathbb{R}$ і $x \neq y$.

Далі, позначимо через $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$ множини всіх функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких $R(I - g) = \mathbb{R}$, множина $R(I + g)$ є необмеженою і мають місце відповідно включення $g \in \mathfrak{F}_s$ і $g \in \mathfrak{F}_u$.

Важливими є наступні два твердження.

Лема 1. *Нехай неперервна функція g є елементом множини $\mathfrak{F}_s$. Тоді для кожних замкненого відрізка $[a, b]$ і числа $\varepsilon \in (0, b - a)$ існує таке число $q \in (0, 1)$, що*

$$|g(x) - g(y)| \le q|x - y| \tag{2}$$

для всіх $x, y \in [a, b]$, для яких $|x - y| \ge \varepsilon$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0, b - a)$. Припустимо, що співвідношення (2) не виконується для жодного $q \in (0, 1)$. Існують послідовності $x_n, y_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, для яких $|x_n - y_n| \ge \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, і $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{g(x_n) - g(y_n)}{x_n - y_n}\right| = 1$. Тому на підставі неперервності функції g і компактності $[a, b]$ існують точки $x_0, y_0 \in [a, b]$, для яких $|x_0 - y_0| \ge \varepsilon$ і $|g(x_0) - g(y_0)| = |x_0 - y_0|$. Останнє співвідношення суперечить включенню $g \in \mathfrak{F}_s$.

Отже, припущення, що нерівність (2) не виконується для жодного $q \in (0, 1)$, є хибним.

Лему доведено.

Аналогічно встановлюється наступна лема.

Лема 2. *Нехай неперервна функція g є елементом множини $\mathfrak{F}_u$. Тоді для кожних замкненого відрізка $[a, b]$ і числа $\varepsilon \in (0, b - a)$ існує таке число $Q > 1$, що*

$$|g(x) - g(y)| \ge Q|x - y| \tag{3}$$

для всіх $x, y \in [a, b]$, для яких $|x - y| \ge \varepsilon$.

4. Основна теорема.

Теорема 1. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$;

2) оператор $\mathcal{D} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ має обернений неперервний оператор;

3) оператор $\mathcal{D} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ має обернений неперервний і c-неперервний оператор;

4) оператор $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$ має обернений неперервний оператор;

5) оператор $\mathcal{D} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ має обернений неперервний і обмежений оператор;

6) оператор $\mathcal{D} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ має обернений неперервний обмежений і c-неперервний оператор;

7) оператор $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$ має обернений неперервний і обмежений оператор.

Нагадаємо, що нелінійний оператор називається обмеженим, якщо множина його значень є обмеженою на кожній обмеженій множині; крім цього, для нелінійних операторів ні обмеженість не випливає з неперервності, ні неперервність не випливає з обмеженості.

Встановлюється теорема за допомогою допоміжних тверджень про множини значень функцій $I-f, I+f, I-f\circ f, I+f\circ f$, про прообрази $\mathcal{D}^{-1}h$ періодичних елементів h простору l_∞ та про існування обмежених послідовностей елементів простору l_∞ локально збіжних послідовностей.

5. Властивості елементів множини $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Будемо вважати, що $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Завдяки включенню $f \in \mathfrak{F}_s \cup \mathfrak{F}_u$ та рівності $R(I-f) = \mathbb{R}$ функція f є неперервною на $\mathbb{R}$. Наведемо властивості таких функцій, які використовуватимемо при обґрунтуванні теореми 1.

Лема 3. *Нехай $f \in \mathfrak{F}_s$ і $R(I-f) = R(I+f) = \mathbb{R}$. Тоді*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left(|x| - \max_{|t|\le|x|} : |f(t)| \right) = +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Згідно з умовами леми функції $V(x) = x - f(x)$ і $W(x) = x + f(x)$ є строго зростаючими і неперервними на $\mathbb{R}$, існують точки x^*, $x^{**} \in \mathbb{R}$, для яких

$$V(x^*) = 0, \tag{5}$$

$$W(x^{**}) = 0, \tag{6}$$

і $R(V) = R(W) = \mathbb{R}$. Оскільки $V(v) + W(x) = 2x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то можливий один із випадків:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} V(x) = -\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} W(x) = -\infty$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} W(x) = +\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} W(x) = -\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} V(x) = -\infty$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} W(x) = +\infty$.

У кожному із цих випадків на підставі (5), (6) і строгого зростання на $\mathbb{R}$ функцій $V(x)$ і $W(x)$ справджується співвідношення $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x)W(x) = +\infty$, тобто $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (x^2 - (f(x))^2) = +\infty$. Тому $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (|x| - |f(x))|) = +\infty$. Звідси та з неперервності функції f випливає співвідношення (4).

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай $f \in \mathfrak{F}_u$ і $R(I-f) = R(I+f) = \mathbb{R}$. Тоді функція f має обернену неперервну функцію $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, для якої*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \min_{\omega\in[a,b]} : \left(|x| - \max_{|t|\le|x|} : \left| f^{-1}(t-\omega) \right| \right) = +\infty \tag{7}$$

для кожного відрізка $[a,b]$.

Доведення. Згідно з умовами леми функція f є строго монотонною і неперервною на $\mathbb{R}$ і $R(f) = \mathbb{R}$. Тому f має обернену неперервну функцію $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що є елементом множини $\mathcal{F}_s$ на підставі включення $f \in \mathfrak{F}_u$. Оскільки $R(f^{-1}) = \mathbb{R}$, $I - f^{-1} = -(I - f)f^{-1}$ і $I + f^{-1} = (I + f)f^{-1}$, то $R(I - f^{-1}) = R(I + f^{-1}) = \mathbb{R}$.

Отже, для функції f^{-1} виконуються умови леми 3. Тому

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left(|x| - \max_{|t|\le|x|} : \left|f^{-1}(t)\right| \right) = +\infty. \tag{8}$$

На підставі включення $f^{-1} \in \mathcal{F}_s$ для довільних чисел $t \in \mathbb{R}$ і $\omega \in [a, b]$

$$\left|f^{-1}(t-\omega)\right| \le \left|f^{-1}(t)\right| + \left|f^{-1}(t) - f^{-1}(t-\omega)\right| \le$$
$$\le \left|f^{-1}(t)\right| + |\omega| \le \left|f^{-1}(t)\right| + \max\{|a|, |b|\}.$$

Звідси та із співвідношення (8) випливає співвідношення (7).

Лему 4 доведено.

Позначимо через $\mathcal{B}_-$ і $\mathcal{B}_+$ множини неперервних функцій $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, обмежених відповідно на $(-\infty, 0]$ і $[0, +\infty)$, а через s_ω — функцію, що визначається співвідношенням

$$s_\omega(x) = \omega, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лема 5. *Нехай:*
1) $f \in \mathfrak{F}_s \cup \mathfrak{F}_u$;
2) $R(I - f) = \mathbb{R}$;
3) $R(I + f)$ *— необмежена множина, причому* $R(I + f) \ne \mathbb{R}$.
Тоді для всіх $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$

$$R\left(I - (f + s_{\omega_2}) \circ (f + s_{\omega_1})\right) = \mathbb{R} \tag{9}$$

і

$$R\left(I + (f + s_{\omega_2}) \circ (f + s_{\omega_1})\right) = \mathbb{R}. \tag{10}$$

Доведення. Спочатку обґрунтуємо лему у випадку $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Розглянемо функцію $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначається рівністю

$$g(x) = x + f(x). \tag{11}$$

Використаємо цю функцію спочатку у випадку $f \in \mathfrak{F}_s$. На підставі включення $f \in \mathfrak{F}_s$ функція g є строго зростаючою і неперервною на $\mathbb{R}$. Тому множина $R(I + f)$ є зв'язною, причому завдяки третій умові леми

$$R(I + f) = (-\infty, a), \tag{12}$$

або

$$R(I+f) = (b, +\infty) \tag{13}$$

для деяких $a, b \in \mathbb{R}$.

Подамо $I - f \circ f$ за допомогою g у вигляді

$$(I - f \circ f)(x) = g(x) - g(-x + g(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Розглянемо випадок виконання співвідношення (12). Завдяки (14), строгому зростанню функції g на $\mathbb{R}$ і включенню $g \in \mathcal{B}_+$

$$\lim_{x \to +\infty} (I - f \circ f)(x) = +\infty. \tag{15}$$

Тепер покажемо, що

$$\underline{\lim}_{x \to -\infty} (I - f \circ f)(x) = -\infty. \tag{16}$$

У випадку $\overline{\lim}_{x \to -\infty} (-x + g(x)) = +\infty$ і $\overline{\lim}_{x \to -\infty} (-x + g(x)) \in \mathbb{R}$ співвідношення (16) виконується на підставі (14).

У випадку

$$\lim_{x \to -\infty} (-x + g(x)) = -\infty \tag{17}$$

використаємо рівність

$$(I - f \circ f)(x) = (I - f)(x) + (I - f)(f(x)). \tag{18}$$

Завдяки (11), строгому зростанню функції $(I - f)(x)$ на $\mathbb{R}$, другій умові леми, (17) і (18) справджується (16).

З неперервності функції $(I - f \circ f)(x)$ на $\mathbb{R}$ та з (15) і (16) випливає співвідношення (9) при $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Тепер розглянемо випадок виконання співвідношення (13).

Завдяки (14), строгому зростанню функції g на $\mathbb{R}$ та тому, що $g \in \mathcal{B}_-$,

$$\lim_{x \to -\infty} (I - f \circ f)(x) = -\infty. \tag{19}$$

У випадках $\lim_{x \to +\infty} (-x + g(x)) = -\infty$ і $\overline{\lim}_{x \to +\infty} (-x + g(x)) \in \mathbb{R}$ на підставі (14)

$$\lim_{x \to +\infty} (I - f \circ f)(x) = +\infty. \tag{20}$$

У випадку

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} (-x + g(x)) = +\infty \tag{21}$$

використаємо співвідношення (18). Враховуючи (11), строге зростання функції $(I-f)(x)$ на $\mathbb{R}$ та другу умову леми, за допомогою (18) і (21) отримуємо співвідношення (20).

Отже, на підставі (19) і (20) та неперервності функції f співвідношення (9) справджується при $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Тепер розглянемо випадок $f \in \mathfrak{F}_u$. У цьому випадку визначена рівністю (11) функція g є строго спадною на $\mathbb{R}$ (випадок строгого зростання на $\mathbb{R}$ цієї функції неможливий на підставі третьої умови леми). Аналогічну властивість має і функція f. Завдяки третій умові леми для функції $I+f$ виконується співвідношення (12) або (13). Використаємо (14).

У випадку виконання співвідношення (12) завдяки строгому спаданню на $\mathbb{R}$ функцій g і f

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-g(-x+g(x))) = -\infty \tag{22}$$

і

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)-g(-x+g(x))) = +\infty. \tag{23}$$

У випадку виконання співвідношення (13) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Тому

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-g(-x+g(x))) = -\infty \tag{24}$$

і

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)-g(-x+g(x))) = +\infty. \tag{25}$$

Отже, завдяки неперервності функції g на $\mathbb{R}$ і співвідношенням (22) – (25) рівність (9) справджується при $\omega_1 = \omega_2 = 0$ й у випадку $f \in \mathfrak{F}_u$.

Тепер покажемо, що співвідношення (10) виконується при $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

У випадку $f \in \mathfrak{F}_u$ функція f є строго монотонною на $\mathbb{R}$. Тому функція $f \circ f$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$ і виконується співвідношення (10) при $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Розглянемо випадок $f \in \mathfrak{F}_s$. Припустимо, що $R(I + f \circ f) \neq \mathbb{R}$. Тоді

$$R(I + f\circ f) = (-\infty, c) \tag{26}$$

або

$$R(I + f\circ f) = (d, +\infty). \tag{27}$$

Тут c і d — деякі дійсні числа. У цьому випадку функція $f \circ f$ набирає вигляду

$$f(f(x)) = -x + g_1(x), \tag{28}$$

де $g_1 \in \mathcal{B}_+$, якщо виконується співвідношення (26), і $g_1 \in \mathcal{B}_-$, якщо виконується співвідношення (27). Завдяки включенню $f \in \mathfrak{F}_s$ функція g_1 є строго зростаючою і неперервною на $\mathbb{R}$.

Далі використаємо третю умову леми. На підставі цієї умови справджується співвідношення (12) або (13) і функція $f(x)$ зображується у вигляді

$$f(x) = -x + g(x), \tag{29}$$

де g — строго зростаюча на $\mathbb{R}$ функція, $g \in \mathcal{B}_+$ у випадку використання співвідношення (12) і $g \in \mathcal{B}_-$ у випадку використання співвідношення (13). Згідно з рівностями (14) і (28) для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$2x - g(x) + g(f(x)) = g_1(x). \tag{30}$$

Припустимо, що виконується співвідношення (13). На підставі (30)

$$2x - g(x) + b < g_1(x)$$

і, отже,

$$2x + b - g_1(x) < g(x) \tag{31}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. Завдяки (29) і включенню $f \in \mathfrak{F}_s$

$$g(x) = x + f(x) \le x + f(0) + |f(x) - f(0)| \le x + f(0) + |x|.$$

Тому для всіх $x \ge 0$

$$g(x) \le 2x + f(0). \tag{32}$$

Із (31) і (32) випливає, що функція $g(x)$ має вигляд $g(x) = 2x + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \in \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$.

Таким чином, на підставі (29) справджується включення $I - f \in \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$, що суперечить другій умові леми.

Отже, випадок виконання співвідношення (13) неможливий.

Розглянемо випадок виконання співвідношень (12) і (26).

Використаємо співвідношення (30) при $x \ge 0$. Оскільки $g, g_1 \in \mathcal{B}_+$, то згідно з (29)

$$g(-x + g(x)) = -2x + g_2(x), \tag{33}$$

де функція $g_2(x) = g(x) + g_1(x)$ є елементом множини $\mathcal{B}_+$. Завдяки включенню $f \in \mathfrak{F}_s$ та (29) для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення $|g(x) - g(y)| \le |x - y|$. Тому на підставі (33) для деякої функції $g_3 \in \mathcal{B}_+$ $g(-x) = -2x + g_3(x)$. Звідси отримуємо

$$g(x) = 2x + g_4(x), \tag{34}$$

де $g_4(x) = g_3(-x)$, причому $g_4 \in \mathcal{B}_-$.

Із (29) і (34) випливає, що функція $I-f$ є елементом множини $\mathcal{B}_-$. Однак це на підставі строгого зростання функції $I-f$ на $\mathbb{R}$ суперечить другій умові леми.

Отже, випадок виконання співвідношення (12) також неможливий, якщо справджується (26).

Виконання співвідношень (12) і (27) також є неможливим. Справді, завдяки (12) і (30) $2x-g(x)+a > g_1(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому $g(x) < 2x+a-g_1(x)$ для $x \leq 0$. Використовуючи (29), отримуємо $x - f(x) > g_1(x) - a$ для $x \leq 0$. Оскільки функція $x - f(x)$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$ і $g_1 \in \mathcal{B}_-$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - f(x)) \neq -\infty$, що суперечить другій умові леми.

Таким чином, лему 5 доведено у випадку $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Тепер розглянемо випадок $\omega_1\omega_2 \neq 0$. Очевидно, що умови леми рівносильні відповідно умовам:

1) $f + s_{\omega_1} \in \mathfrak{F}_s \cup \mathfrak{F}_u$;

2) $R(I - (f + s_{\omega_1})) = \mathbb{R}$;

3) $R(I + (f + s_{\omega_1}))$ — необмежена множина і $R(I + (f + s_{\omega_1})) \neq \mathbb{R}$.

Тому, проводячи аналогічні міркування щодо функції $(f + s_{\omega_1}) \circ (f + s_{\omega_1})$, отримуємо співвідношення (9) і (10) при $\omega_1 = \omega_2$.

У випадку $\omega_1 \neq \omega_2$ завдяки рівності

$$(f + s_{\omega_2}) \circ (f + s_{\omega_1}) = (f + s_{\omega_1} + (s_{\omega_2} - s_{\omega_1})) \circ (f + s_{\omega_1})$$

(тоді $(f + s_{\omega_2}) \circ (f + s_{\omega_1})(x)) \equiv (f\,(f(x) + \omega_1) + \omega_1) + (\omega_2 - \omega_1))$ також справджуються співвідношення (9) і (10).

Лему 5 доведено.

Лема 6. *Нехай:*

1) $f \in \mathfrak{F}_s$;

2) $R(I - f) = \mathbb{R}$;

3) $R(I + f)$ *— необмежена множина, причому* $R(I + f) \neq \mathbb{R}$.

Тоді для довільного відрізка $[a, b]$ *справджується співвідношення*

$$\lim_{|x|\to+\infty} : \min_{\omega_1,\omega_2\in[a,b]} : (|x| - \max_{|t|\leq|x|} : |f(f(t) + \omega_1) + \omega_2|) = +\infty. \tag{35}$$

Доведення. На підставі леми 5 $R(I - f \circ f) = R(I + f \circ f) = \mathbb{R}$, а завдяки включенню $f \in \mathcal{F}_s$ справджується включення $f \circ f \in \mathcal{F}_s$. Тому за лемою 3

$$\lim_{|x|\to+\infty}(|x| - |f(f(x))|) = +\infty. \tag{36}$$

Оскільки $f \in \mathcal{F}_s$, то для довільних $x \in \mathbb{R}$, $\omega_1 \in \mathbb{R}$ і $\omega_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(f(x)) - (f(f(x) + \omega_1) + \omega_2)| \leq |f(f(x)) - f(f(x) + \omega_1)| + |\omega_2| \leq |\omega_1| + |\omega_2|.$$

Тому для $x \in \mathbb{R}$ і $\omega_1, \omega_2 \in [a, b]$

$$|x| - |f(f(x) + \omega_1) + \omega_2| \geq |x| - |f(f(x))| - |f(f(x)) - f(f(x) + \omega_1) + \omega_2| \geq$$

$$\geq |x| - |f(f(x))| - |\omega_1| - |\omega_2| \geq |x| - |f(f(x))| - 2\max\{|a|, |b|\}.$$

Звідси з урахуванням неперервності функції f та з (36) випливає співвідношення (35).

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Нехай:*

1) $f \in \mathfrak{F}_u$;

2) $R(I - f) = \mathbb{R}$;

3) $R(I + f)$ *— необмежена множина, причому* $R(I + f) \neq \mathbb{R}$.

Тоді функція f *має обернену неперервну на* $\mathbb{R}$ *функцію* f^{-1}, *для якої*

$$\lim_{|x| \to +\infty} : \min_{\omega_1, \omega_2 \in [a,b]} : \left(|x| - \max_{|t| \le |x|} : \left| f^{-1}\left(f^{-1}\left(t - \omega_1\right) - \omega_2\right) \right| \right) = +\infty$$

для кожного відрізка $[a, b]$.

Доведення. Згідно з першими двома умовами леми функція f є строго монотонною і неперервною $\mathbb{R}$ і $R(f) = \mathbb{R}$. Тому ця функція має обернену неперервну функцію $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Завдяки першій умові леми $f^{-1} \in \mathcal{F}_s$. Оскільки $R(f^{-1}) = \mathbb{R}$, $I - f^{-1} = -(I - f)f^{-1}$ і $I + f^{-1} = (I + f)f^{-1}$, то $R\left(I - f^{-1}\right) = \mathbb{R}$ і множина $R\left(I + f^{-1}\right)$ є необмеженою, причому $R\left(I + f^{-1}\right) \neq \mathbb{R}$.

Отже, для функції f^{-1} виконуються умови леми 6. Тому

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(|x| - \left|f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\right|\right) = +\infty. \tag{37}$$

Оскільки $f^{-1} \in \mathcal{F}_s$, то для довільних $x \in \mathbb{R}$, $\omega_1 \in \mathbb{R}$ і $\omega_2 \in \mathbb{R}$

$$\left|f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) - f^{-1}\left(f^{-1}(x - \omega_1) - \omega_2\right)\right| \le |\omega_1| + |\omega_2|.$$

Звідси з урахуванням неперервності функції f^{-1} та із співвідношення (37) випливає твердження леми.

Лему 7 доведено.

6. Лема про нерухому точку неперервного відображення. Важливою для подальшого викладу матеріалу є така лема.

Лема 8. *Нехай* X *— метричний простір із метрикою* ρ, *для відображення* $H : X \to X$ *виконується співвідношення*

$$\rho(Hx, Hy) < \rho(x, y) \tag{38}$$

для всіх $x, y \in X$, *для яких* $x \neq y$, *і* x^* *— нерухома точка відображення* H^k, *де* $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

Тоді x^* *— єдина нерухома точка відображення* H.

Доведення. Нехай x^* — нерухома точка відображення $H^k : X \to X$, тобто

$$H^k x^* = x^*. \tag{39}$$

Тоді точка Hx^* також є нерухомою точкою відображення H^k. Справді,

$$H^k(Hx^*) = H\left(H^k x^*\right) x^* = Hx^*. \tag{40}$$

Якщо виконується співвідношення (38) і

$$Hx^* \neq x^*, \tag{41}$$

то завдяки (39) і (40)

$$\rho(Hx^*, x^*) = \rho\left(H^k Hx^*, H^k x^*\right) < \rho(Hx^*, x^*),$$

що суперечить (41).

Отже, $Hx^* = x^*$.

Нехай x^{**} — нерухома точка відображення H. Припустимо, що

$$x^{**} \neq x^*. \tag{42}$$

Із співвідношень

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(Hx^*, Hx^{**}) < \rho(x^*, x^{**}),$$

що справджуються завдяки нерівності (38), випливає хибність співвідношення (42).

Лему 8 доведено.

7. Періодичні розв'язки рівняння $\mathcal{D}x = h$. Позначимо через $\mathcal{P}_m$, де $m \in \mathbb{N}$, банахів простір усіх m-періодичних елементів простору l_∞ із нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_m}$, визначеною рівністю $\|x\|_{\mathcal{P}_m} = \|x\|_{l_\infty}$ $x \in \mathcal{P}_m$, а через $\mathcal{D}^{-1}h$, де $h \in l_\infty$, повний прообраз елемента h при відображенні $\mathcal{D}$.

Лема 9. *Нехай $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$.*

Тоді для кожного відрізка $[\alpha, \beta]$ існує такий відрізок $[a, b]$, що

$$(\mathcal{D}^{-1}h) \cap \{x \in \mathcal{P}_m : R(x) \subset [a, b]\} \neq \varnothing$$

для кожного $h \in \{y \in \mathcal{P}_m : R(y) \subset [\alpha, \beta]\}$.

Доведення. Зафіксуємо довільні відрізок $[\alpha, \beta]$ і елемент

$$h \in \{y \in \mathcal{P}_m : R(y) \subset [\alpha, \beta]\}.$$

Нехай $f \in \mathfrak{F}_1$ і $R(I + f) = \mathbb{R}$. На підставі леми 3 і неперервності функції f на $\mathbb{R}$ існує такий відрізок $[a, b]$, що $a \leq f(x) + c \leq b$ для всіх $x \in [a, b]$ і $c \in [\alpha, \beta]$. Тому обмежена, замкнена й опукла множина

$$\Omega_m = \{y \in \mathcal{P}_m : a \leq y(n) \leq b \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{Z}\} \tag{43}$$

є інваріантною відносно оператора A, що діє у просторі $\mathcal{P}_m$ і визначається рівністю

$$(Ax)(n) = f(x(n-1)) + h(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{44}$$

Цей оператор цілком неперервний, оскільки неперервною є функція f, а банахів простір $\mathcal{P}_m$ скінченновимірний. Отже, виконано всі умови теореми Шаудера про нерухому точку

[3]. Тому оператор A має нерухому точку $x^* \in \Omega_m$, яка, очевидно, є елементом множини $\mathcal{D}^{-1}h$.

Таким чином, лему 9 доведено у випадку, коли $f \in \mathfrak{F}_1$ і $R(I+f)=\mathbb{R}$.

Нехай тепер $f \in \mathfrak{F}_1$ і $R(I+f) \neq \mathbb{R}$. На підставі леми 6 і неперервності функції f на $\mathbb{R}$ існує такий відрізок $[a,b]$, що $a \leq f(f(x)+c_1)+c_2 \leq b$ для всіх $c_1,\, c_2 \in [\alpha,\beta]$ і $x \in [a,b]$. Тому визначена рівністю (43) обмежена, замкнена й опукла множина Ω_m є інваріантною відносно оператора A^2, що діє у просторі $\mathcal{P}_m$ і завдяки (44) визначається рівністю

$$(A^2x)(n) = f(f(x(n-2))+h(n-2))+h(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тут $x \in \mathcal{P}_m$. Оператор A^2 цілком неперервний, оскільки неперервною є функція f, а банахів простір $\mathcal{P}_m$ скінченновимірний. Отже, виконано умови теореми Шаудера про нерухому точку. Тому оператор A^2 має нерухому точку $x^* \in \Omega_m$. Завдяки включенню $f \in \mathfrak{F}_s$ для A виконується співвідношення $\|Ax-Ay\|_{\mathcal{P}_m} < \|x-y\|_{\mathcal{P}_m}$ для всіх $x,\, y \in \mathcal{P}_m$, для яких $x \neq y$. За лемою 8 точка $x^* \in \Omega_m$ є нерухомою точкою й для оператора A. Ця точка, очевидно, є елементом множини $\mathcal{D}^{-1}h$.

Таким чином, лему 9 доведено й у випадку, коли $f \in \mathfrak{F}_1$ і $R(I+f) \neq \mathbb{R}$.

Тепер розглянемо випадок, коли $f \in \mathfrak{F}_2$ і $R(I+f)=\mathbb{R}$. Завдяки умовам леми функція f є строго монотонною і тому має обернену строго монотонну неперервну функцію f^{-1}, для якої $R\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}$. На підставі леми 4 існує відрізок $[a,b]$ такий, що $a \leq f^{-1}(x-c) \leq b$ для всіх $c \in [\alpha,\beta]$ і $x \in [a,b]$. Тому розглянута раніше обмежена, замкнена й опукла множина Ω_m є інваріантною відносно оператора B, що діє у просторі $\mathcal{P}_m$ і визначається рівністю

$$(Bx)(n) = f^{-1}\left(x(n+1)-h(n)\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{45}$$

Цей оператор цілком неперервний, оскільки неперервною є функція f^{-1}, а банахів простір $\mathcal{P}_m$ скінченновимірний. Отже, виконано всі умови теореми Шаудера про нерухому точку. Тому оператор B має нерухому точку $x^* \in \Omega_m$, яка, очевидно, є елементом множини $\mathcal{D}^{-1}h$.

Таким чином, лему 9 доведено й у випадку, коли $f \in \mathfrak{F}_2$ і $R(I+f)=\mathbb{R}$.

Тепер розглянемо випадок, коли $f \in \mathfrak{F}_2$ і $R(I+f) \neq \mathbb{R}$. У цьому випадку функція f має обернену неперервну функцію f^{-1}, для якої $R\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}$. На підставі леми 7 існує відрізок $[a,b]$ такий, що $a \leq f^{-1}\left(f^{-1}(x-c_1)-c_2\right) \leq b$ для всіх $c_1,\, c_2 \in [\alpha,\beta]$ і $x \in [a,b]$. Тому розглянута раніше обмежена, замкнена й опукла множина Ω_m інваріантна відносно оператора B^2, що діє у просторі $\mathcal{P}_m$ і завдяки (45) визначається рівністю

$$(B^2x)(n) = f^{-1}\left(f^{-1}(x(n+2)-h(n+1))-h(n)\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Цей оператор цілком неперервний, оскільки неперервною є функція f^{-1}, а банахів простір $\mathcal{P}_m$ скінченновимірний. Отже, виконано всі умови теореми Шаудера про нерухому точку. Тому B^2 має нерухому точку $x^* \in \Omega_m$. Завдяки включенню $f \in \mathfrak{F}_u$ для B виконується співвідношення $\|Bx-By\|_{\mathcal{P}_m} < \|x-y\|_{\mathcal{P}_m}$ для всіх $x,\, y \in \mathcal{P}_m$, для яких $x \neq y$. За лемою 8 точка $x^* \in \Omega_m$ є нерухомою точкою й для оператора B. Ця точка, очевидно, є елементом множини $\mathcal{D}^{-1}h$.

Таким чином, лему 9 доведено й у випадку, коли $f \in \mathfrak{F}_2$ і $R(I+f) \neq \mathbb{R}$.

Лему 9 доведено.

З лем 8 і 9 випливає наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. *Тоді для кожного елемента* $h \in \mathcal{P}_m$ *рівняння* $\mathcal{D}x = h$ *має єдиний розв'язок* $x \in \mathcal{P}_m$.

8. Умови виконання рівності $R(\mathcal{D}) = l_\infty$. Спочатку наведемо одне допоміжне твердження.

Лема 10. *Для кожної обмеженої послідовності* (x_k) *елементів простору* l_∞ *існують такі строго зростаюча послідовність* (k_l) *натуральних чисел і елемент* $x \in l_\infty$, *що*

$$x_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} x \quad \textit{при} \quad l \to \infty$$

і

$$\|x\|_{l_\infty} \leq \sup_{k \geq 1} \|x_k\|_{l_\infty}. \tag{46}$$

Доведення. Нехай $[t]$— ціла частина числа t. Розглянемо числа $n_k = (-1)^k [k/2]$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$. На підставі обмеженості множини $\{x_k \in l_\infty : k \in \mathbb{N}\}$ існують збіжні числові послідовності

$$x_{k_{1,1}}(n_1), x_{k_{1,2}}(n_1), \ldots, x_{k_{1,m}}(n_1), \ldots,$$

$$x_{k_{2,1}}(n_2), x_{k_{2,2}}(n_2), \ldots, x_{k_{2,m}}(n_2), \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{k_{m,1}}(n_m), x_{k_{m,2}}(n_m), \ldots, x_{k_{m,m}}(n_m), \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

для яких послідовності $(k_{l,p})_{p \geq 1}$, $l \in \mathbb{N}$, є строго зростаючими і для $l \in \mathbb{N}$

$$\{k_{l,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{k_{l+1,p} : p \in \mathbb{N}\}. \tag{47}$$

Позначимо через a_m границю $\lim\limits_{p \to \infty} x_{k_{m,p}}(n_m)$, а через x елемент простору l_∞, для якого $x(n_m) = a_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Із (47) випливає, що $k_{q,q} \in \{k_{m,p} : p \in \mathbb{N}\}$ для $q \geq m$ і $m \in \mathbb{N}$. Тому послідовність $x_{k_{1,1}}(n), x_{k_{2,2}}(n), \ldots, x_{k_{q,q}}(n), \ldots$ є збіжною для кожного $n \in \mathbb{N}$ і, отже, $x_{k_{q,q}} \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} x$ при $q \to \infty$.

Нерівність (46) випливає з того, що для всіх $m \in \mathbb{N}$

$$x(n_m) = \lim_{p \to \infty} x_{k_{m,p}}(n_m) \quad \text{і} \quad |x(n_m)| \leq \sup_{p \geq 1} |x_{k_{m,p}}(n_m)|.$$

Лему 10 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$.

Тоді

$$R(\mathcal{D}) = l_\infty \tag{48}$$

і для кожного числа $H > 0$ існує число $M > 0$ таке, що

$$\left(\mathcal{D}^{-1}h\right) \cap \{x \in l_\infty : \|x\|_{l_\infty} \le M\} \ne \varnothing$$

для всіх $h \in \{y \in l_\infty : \|y\|_{l_\infty} \le H\}$.

Доведення. Зафіксуємо довільні число $H > 0$ й елемент $h \in l_\infty$, для яких $\|h\|_{l_\infty} \le H$. Кожному натуральному числу m поставимо у відповідність елемент h_m простору $\mathcal{P}_m$, для якого $h_m(n) = h(n)$, $n \in [[(1-m)/2], [(m-1)/2]] \cap \mathbb{Z}$. Зауважимо, що множина $[[(1-m)/2], [(m-1)/2]] \cap \mathbb{Z}$ містить m елементів, для всіх $m \in \mathbb{N}$ $R(h_m) \subset [-H, H]$ і

$$h_m \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} h \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{49}$$

На підставі леми 3 існують число $M > 0$ та елементи $y_m \in \mathcal{P}_m$, $m \ge 1$, для яких

$$R(y_m) \subset [-M, M] \tag{50}$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$ і

$$y_m(n+1) - f(y_m(n)) = h_m(n) \tag{51}$$

для всіх $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Завдяки лемі 10 та (50) існують такі строго зростаюча послідовність $(m_k)_{k \ge 1}$ натуральних чисел і елемент $y \in l_\infty$, що

$$y_{m_k} \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} y \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

і $\|y\|_{l_\infty} \le M$. Звідси, із співвідношень (49), (51) і неперервності функції f випливає

$$y(n+1) - f(y(n)) = h(n)$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$. З довільності вибору елемента $h \in l_\infty$ випливає твердження теореми.

Теорему 2 доведено.

9. Доведення теореми 1. Спочатку доведемо імплікацію 1) $\Rightarrow$ 2).

Нехай $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Тоді згідно з теоремою 2 $R(\mathcal{D}) = l_\infty$. Розглянемо довільний елемент $h \in l_\infty$. Покажемо, що різницеве рівняння

$$x(n+1) = f(x(n)) - h(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{52}$$

має єдиний у просторі l_∞ розв'язок (тоді з довільності вибору $h \in l_\infty$ випливатиме, що відображення $\mathcal{D}$ має обернене відображення).

Нехай u і y — обмежені розв'язки рівняння (52). Тоді

$$|u(n+1) - y(n+1)| = |f(u(n)) - f(y(n))|, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{53}$$

Припустимо, що $u(n^*) \neq y(n^*)$ для деякого $n^* \in \mathbb{Z}$. Тоді на підставі (53)

$$|u(n) - y(n)| > |u(n+1) - y(n+1)|, \quad n \leq n^* - 1, \tag{54}$$

якщо $f \in \mathfrak{F}_s$, і

$$|u(n) - y(n)| < |u(n+1) - y(n+1)|, \quad n \geq n^*, \tag{55}$$

якщо $f \in \mathfrak{F}_u$. У випадку виконання співвідношення (54) завдяки лемі 1, співвідношенню (53) та обмеженості множини $R(u) \cup R(y)$ існує число $q \in (0,1)$ таке, що

$$q|u(n) - y(n)| \geq |u(n+1) - y(n+1)|, \quad n \leq n^* - 1.$$

Аналогічно у випадку виконання співвідношення (55) на підставі леми 2 існує число $Q >$ > 1, для якого

$$Q|u(n) - y(n)| \leq |u(n+1) - y(n+1)|, \quad n \geq n^*.$$

Кожне з останніх двох співвідношень суперечить співвідношенню

$$|u(n) - y(n)| \leq \|u - y\|_{l_\infty} < +\infty, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, припущення, що $u(n^*) \neq y(n^*)$ для деякого $n^* \in \mathbb{N}$, є хибним. Тому $u = y$ (рівняння (52) має єдиний обмежений розв'язок) і відображення $\mathcal{D}$ є оборотним.

Покажемо неперервність відображення $\mathcal{D}^{-1} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$.

Припустимо, що відображення $\mathcal{D}^{-1}$ не є неперервним. Тоді існують елементи $h, h_k \in$ $\in l_\infty, k \in \mathbb{N}$, і число $\mu \in (0, +\infty)$ такі, що

$$\lim_{k\to\infty} \|h - h_k\|_{l_\infty} = 0 \tag{56}$$

і для $x = \mathcal{D}^{-1}h,\ x_k = \mathcal{D}^{-1}h_k,\ k \in \mathbb{N}$, виконується співвідношення

$$\mu \leq \|x - x_k\|_{l_\infty} < +\infty, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{57}$$

За теоремою 2 існує відрізок $[a,b]$, для якого

$$R(x) \bigcup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R(x_k) \right) \subset [a,b]. \tag{58}$$

Розглянемо випадок, коли $f \in \mathfrak{F}_s$. Згідно з лемою 1 існує таке число $q \in (0,1)$, що

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \tag{59}$$

для всіх $x, y \in [a,b]$, для яких $|x - y| \geq \mu/4$. Виберемо таке число $\delta \in (0, 1/4)$, щоб

$$1 - \delta > q. \tag{60}$$

З (56) випливає, що існує число $k_1 \in \mathbb{N}$, для якого

$$\|h - h_{k_1}\|_{l_\infty} \leq \frac{\delta\mu}{2}. \tag{61}$$

Тоді завдяки (57) для деякого $n^* \in \mathbb{N}$

$$\frac{\mu}{2} < |x(n^*) - x_{k_1}(n^*)|. \tag{62}$$

Очевидно, що

$$|x(n+1) - x_{k_1}(n+1)| \leq |f(x(n)) - f(x_{k_1}(n))| + |h(n) - h_{k_1}(n)|, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{63}$$

Тому на підставі включення $f \in \mathfrak{F}_s$ та нерівностей (61) і (62)

$$\frac{\mu}{2} < |x(n^*) - x_{k_1}(n^*)| \leq |x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)| + \frac{\delta\mu}{2}.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{\mu}{4} < |x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)|.$$

Далі, завдяки (59) і (63)

$$|x(n^*) - x_{k_1}(n^*)| \leq q|x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)| + \frac{\delta\mu}{2}.$$

Тоді на підставі (62)

$$(1-\delta)\frac{\mu}{2} \leq q|x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)|$$

і з урахуванням (60)

$$\frac{\mu}{2} < |x(n^* - 1) - x_{k_1}(n^* - 1)|. \tag{64}$$

Отже, якщо для деякого числа $n^* \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення (62), то виконується і співвідношення (64). Звідси випливає, що

$$\frac{\mu}{2} < |x(n) - x_{k_1}(n)|, \quad n \leq n^*.$$

На підставі останньої нерівності, а також співвідношень (59) і (63) отримуємо

$$|x(n) - x_{k_1}(n)| \leq q|x(n-1) - x_{k_1}(n-1)| + \frac{\delta\mu}{2}, \quad n \leq n^*.$$

Таким чином,

$$|x(n-1) - x_{k_1}(n-1)| \geq q^{-1}\left(|x(n) - x_{k_1}(n)| - \frac{\delta\mu}{2}\right), \quad n \leq n^*,$$

і тому

$$b - a \geq |x(n^* - m) - x_{k_1}(n^* - m)| \geq q^{-m}|x(n^*) - x_{k_1}(n^*)| -$$

$$- \frac{\delta\mu}{2} \left(q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-m}\right), \quad m \in \mathbb{N},$$

якщо врахувати (58), тобто

$$b - a \geq |x(n^* - m) - x_{k_1}(n^* - m)| \geq \frac{\mu\delta q}{2(1-q)} + \frac{\mu(1-q-\delta)}{2(1-q)}\, q^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

Однак співвідношення (65) не може виконуватись, оскільки $\dfrac{1-q-\delta}{1-q} > 0$ (на підставі (60)) і $\lim\limits_{m\to+\infty} q^{-m} = +\infty$.

Отже, припущення про те, що відображення $\mathcal{D}^{-1}$ не є неперервним (у випадку $f \in \mathfrak{F}_s$), є хибним.

Теперь розглянемо випадок, коли $f \in \mathfrak{F}_u$.

На підставі леми 2 існує число $Q > 1$ таке, що

$$|f(x) - f(y)| \geq Q|x - y| \tag{66}$$

для всіх $x, y \in [a, b]$, для яких $|x - y| \geq \dfrac{\mu}{4}$. Виберемо довільне число $\delta \in (0, Q-1)$. Завдяки (56) і (57) існують числа $k_2 \in \mathbb{N}$ і $n^* \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$\|h - h_{k_2}\|_{l_\infty} \leq \frac{\delta\mu}{2}, \tag{67}$$

і

$$|x(n^*) - x_{k_2}(n^*)| > \frac{\mu}{2}. \tag{68}$$

Оскільки

$$|x(n+1) - x_{k_2}(n+1)| \geq |f(x(n)) - f(x_{k_2}(n))| - |h(n) - h_{k_2}(n)|, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{69}$$

і $Q - \delta > 1$, то на підставі (66) – (68)

$$|x(n^*+1) - x_{k_2}(n^*+1)| \geq Q|x(n^*) - x_{k_2}(n^*)| - \frac{\delta\mu}{2} > \frac{Q\mu}{2} - \frac{\delta\mu}{2} = \frac{\mu}{2}(Q - \delta) > \frac{\mu}{2}.$$

Таким чином, якщо для $n^* \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення (68), то справедливим є співвідношення

$$|x(n^*+1) - x_{k_2}(n^*+1)| > \frac{\mu}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$|x(n) - x_{k_2}(n)| > \frac{\mu}{2}, \quad n \geq n^*.$$

На підставі останньої нерівності та співвідношень (66), (67) і (69) отримуємо

$$|x(n+1) - x_{k_2}(n+1)| \geq Q|x(n) - x_{k_2}(n)| - \frac{\delta\mu}{2}, \quad n \geq n^*.$$

Тому

$$b - a \geq |x(n^* + m) - x_{k_2}(n^* + m)| \geq Q^m |x(n^*) - x_{k_2}(n^*)| -$$

$$- \frac{\delta\mu}{2} \left(1 + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}\right), \quad m \in \mathbb{N},$$

якщо врахувати (58), тобто для $m \in \mathbb{N}$

$$b - a \geq |x(n^* + m) - x_{k_2}(n^* + m)| \geq \frac{\delta\mu}{2(Q-1)} + \frac{\mu(Q - 1 - \delta)}{2(Q-1)}\, Q^m.$$

А це неможливо, оскільки $\dfrac{1 - Q - \delta}{1 - Q} > 0$ і $\lim\limits_{m \to +\infty} Q^m = +\infty$.

Отже, припущення про те, що відображення $\mathcal{D}^{-1}$ не є неперервним, є хибним і у випадку $f \in \mathfrak{F}_u$. Тому відображення $\mathcal{D}^{-1} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ неперервне.

Таким чином, імплікацію 1) $\Rightarrow$ 2) доведено.

Доведемо імплікацію 2) $\Rightarrow$ 4).

Нехай відображення $\mathcal{D}$ має обернене неперервне відображення. На підставі неперервності відображення $\mathcal{D} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ та очевидної рівності $\mathcal{D}T^m = T^m\mathcal{D}$, $m \in \mathbb{Z}$, для кожного майже періодичного елемента $x \in \mathcal{A}Pl_\infty$ справджується рівність $\mathcal{D}\mathrm{cl}_{l_\infty}\{T^m x : m \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{cl}_{l_\infty}\{T^m \mathcal{D}x : m \in \mathbb{Z}\}$, тобто простір $\mathcal{A}Pl_\infty$ є інваріантним щодо відображення $\mathcal{D}$. Тому для оператора $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$ можна розглядати задачу про його оборотність.

Оскільки образ компактної множини при неперервному відображенні компактний [4], то $\mathcal{D}\mathrm{cl}_{l_\infty}\{T^m h : m \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{K}_{l_\infty}$ для кожного елемента $h \in \mathcal{A}Pl_\infty$. Враховуючи також те, що на підставі рівності $\mathcal{D}^{-1}T^m = T^m\mathcal{D}^{-1}$, $m \in \mathbb{Z}$, та неперервності оператора $\mathcal{D}^{-1}$ $\mathcal{D}^{-1}\mathrm{cl}_{l_\infty}\{T^m y : m \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{cl}_{l_\infty}\{T^m\mathcal{D}^{-1}y : m \in \mathbb{Z}\}$, де $y \in \mathcal{A}Pl_\infty$, отримуємо, що $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{A}Pl_\infty \subset \mathcal{A}Pl_\infty$.

Отже, оператор $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$ на підставі неперервності оператора $\mathcal{D}^{-1} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ має обернений неперервний оператор, тобто імплікацію 2) $\Rightarrow$ 4) доведено.

Очевидно, що 3) $\Rightarrow$ 4).

Доведемо імплікацію 4) $\Rightarrow$ 1).

Нехай оператор $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$ має обернений неперервний оператор. Розглянемо рівняння

$$y(n+1) = f(y(n)) - c, \quad n \in \mathbb{R}, \tag{70}$$

і

$$x(n) = f(x(n)) - c, \quad n \in \mathbb{R}, \tag{71}$$

в яких $c \in \mathbb{R}$. Кожний сталий розв'язок рівняння (71) є розв'язком рівняння (70). А оскільки згідно з оборотністю оператора $\mathcal{D}$ рівняння (70) має єдиний розв'язок $y \in l_\infty$, то рівняння (71) також матиме єдиний сталий розв'язок. На підставі цього та довільності $c \in \mathbb{R}$ справджується рівність $R(I - f) = \mathbb{R}$, а функція $I - f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ має обернену. З неперервності функції $(I - f)^{-1}$ (за неперервністю відображення $\mathcal{D}^{-1}$) випливає, що функція $I - f$ є строго монотонною на $\mathbb{R}$ і, отже, функція f є неперервною на $\mathbb{R}$.

Доведемо, що $f \in \mathfrak{F}_s \cup \mathfrak{F}_u$.

Припустимо, що це включення не справджується. У цьому випадку на підставі неперервності функції f існують такі точки $x^*,\ y^* \in \mathbb{R}$, $x^* \neq y^*$, що

$$|f(x^*) - f(y^*)| = |x^* - y^*|.$$

Із цієї рівності випливає

$$f(x^*) - x^* = f(y^*) - y^* \tag{72}$$

або

$$f(x^*) - y^* = f(y^*) - x^*. \tag{73}$$

Рівність (72), очевидно, суперечить існуванню для функції $I - f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ оберненої функції.

Рівність (73) суперечить оборотності відображення $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$. Справді, завдяки (73) $x^* = f(y^*) + d$ і $y^* = f(x^*) + d$, де $d = x^* - f(y^*) = y^* - f(x^*)$. Тому

$$x_1 = x_1(n) = \begin{cases} x^*, & \text{якщо } n \text{ -- парне число,} \\ y^*, & \text{якщо } n \text{ -- непарне число,} \end{cases}$$

і

$$x_2 = x_2(n) = \begin{cases} y^*, & \text{якщо } n \text{ -- парне число,} \\ x^*, & \text{якщо } n \text{ -- непарне число,} \end{cases}$$

є розв'язками різницевого рівняння

$$x(n+1) = f(x(n)) + d,$$

що суперечить оборотності $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$, оскільки $x_1 \neq x_2$.

Отже, $f \in \mathfrak{F}_s \cup \mathfrak{F}_u$ і $R(I - f) = \mathbb{R}$.

Покажемо, що множина $R(I + f)$ є необмеженою.

Припустимо, що існує таке число $\gamma > 0$, що

$$R(I + f) \subset [-\gamma, \gamma]. \tag{74}$$

Розглянемо різницеве рівняння

$$x(n+1) = f(x(n)) + h(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{75}$$

Завдяки (74) функцію $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = -x+g(x)$, де $g(x)$ — неперервна на $\mathbb{R}$ функція, для якої для всіх $x \in \mathbb{R}$ $|g(x)| \leq \gamma$. Тому рівняння (75) можна подати у вигляді

$$x(n+1) = -x(n) + g(x(n)) + h(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{76}$$

Зафіксуємо довільне число $c < -\gamma$. Будемо вважати, що

$$h(n) = (-1)^n c, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{77}$$

Використаємо відображення $\mathcal{S} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{S}x)(n) = (-1)^n x(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{78}$$

З урахуванням (77) і (78) рівняння (76) набирає вигляду

$$(-1)^{n+1}(\mathcal{S}x)(n+1) = -(-1)^n(\mathcal{S}x)(n) + g\left((-1)^n(\mathcal{S}x)(n)\right) + (-1)^n c, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Після спрощень отримуємо

$$(\mathcal{S}x)(n+1) - (\mathcal{S}x)(n) = (-1)^{n+1} g\left((-1)^n(\mathcal{S}x)(n)\right) + |c|, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{79}$$

Звідси випливає, що $(\mathcal{S}x)(n+1)-(\mathcal{S}x)(n) \geq |c|-\gamma > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Тому $\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathcal{S}x)(n) = +\infty$ і завдяки (77) рівняння (76) не має обмеженого розв'язку.

Таким чином, відображення $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$ не є оборотним, а припущення про виконання співвідношення (74) є хибним.

Отже, з того, що відображення $\mathcal{D}|_{\mathcal{A}Pl_\infty} : \mathcal{A}Pl_\infty \longrightarrow \mathcal{A}Pl_\infty$ має обернене неперервне відображення, випливає включення $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$, тобто імплікацію 4) $\Rightarrow$ 1) доведено.

Доведемо імплікацію 2) $\Rightarrow$ 3). Нехай відображення $\mathcal{D}$ має обернене неперервне відображення $\mathcal{D}^{-1}$. Покажемо, що відображення $\mathcal{D}^{-1}$ є c-неперервним.

Розглянемо довільні елементи $h, h_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$h_k \xrightarrow{\text{лок.}, \, l_\infty} h \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{80}$$

Нехай $x = \mathcal{D}^{-1}h$ і $x_k = \mathcal{D}^{-1}h_k$, $k \in \mathbb{N}$. Покажемо, що

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, \, l_\infty} x \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{81}$$

Припустимо, що співвідношення (81) не виконується, тобто для деяких чисел $n^* \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$ і $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, виконується нерівність

$$|x_{k_l}(n^*) - x(n^*)| \geq \mu, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{82}$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що числа k_l, $l \in \mathbb{N}$, є такими, що

$$x_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, \, l_\infty} z \quad \text{при} \quad l \to \infty \tag{83}$$

для деякого елемента $z \in l_\infty$. Такий елемент за лемою 10 існує, оскільки 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 4) і 4) $\Rightarrow$ 1), тобто $f \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$, і на підставі (80) та теореми 2 $\sup\limits_{l \in \mathbb{N}} \|x_{k_l}\|_{l_\infty} < +\infty$. З (80), (83) і c-неперервності відображення $\mathcal{D}$ випливає, що $\mathcal{D}z = h$. Ця рівність суперечить оборотності оператора $\mathcal{D}$, оскільки $\mathcal{D}x = h$ і на підставі (82) $\|x - z\|_{l_\infty} \geq \mu$.

Таким чином, припущення, що співвідношення (81) не виконується, є хибним. Тому неперервне відображення $\mathcal{D}^{-1}$ є c-неперервним.

Отже, імплікацію 2) $\Rightarrow$ 3) доведено.

Оскільки 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 4), 4) $\Rightarrow$ 1), 2) $\Rightarrow$ 3) і 3) $\Rightarrow$ 4), то перші чотири твердження теореми є рівносильними.

Імплікація 1) $\Rightarrow$ 5) є наслідком імплікації 1) $\Rightarrow$ 2) та теореми 2.

Імплікації 5) $\Rightarrow$ 6) і 6) $\Rightarrow$ 7) є наслідками відповідно імплікацій 2) $\Rightarrow$ 3) і 3) $\Rightarrow$ 4), а також обмеженості оператора $\mathcal{D}^{-1}$.

Імплікація 7) $\Rightarrow$ 4) є тривіальною.

Оскільки також 4) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4), то всі твердження теореми є рівносильними.

Теорему 1 доведено.

1. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. — Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2005. — 233 с.

2. *Schauder J.* Die Fixpunktsatz in Funktionalräume // Stud. Math. — 1930. — **2**. — P. 171–180.

3. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с.

4. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. — Минск: Изд-во "Университетское", 1984. — 352 с.

Одержано 11.10.2005