УДК 515.165+514.763.85

ТРАНЗИТИВНІ ПОТОКИ НА ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ

О. А. Кадубовський

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: kadubovs@imath.kiev.ua

We consider smooth vector fields on closed oriantable surfaces with a fixed set of singularities and a finite number of separatrices none of which connects the equillibrium points. We prove that for an oriantable surface of genus g, $g \geq 2$, there exists a vector field that has a fixed set of singularities, which are degenerate saddles, and whose trajectory is everywhere dense in the surface.

Розглядаються гладкі векторні поля на замкнених орієнтованих поверхнях із фіксованим набором особливостей зі скінченним числом сепаратрис, серед яких немає тих, що з'єднують стани рівноваги. Встановлено, що на орієнтованій поверхні довільного роду $g \geq 2$ існує векторне поле з припустимим набором особливостей (вироджених сідел), яке має скрізь щільну на ній траєкторію.

1. Вступ. У даній статті розглядаються транзитивні потоки на замкнених орієнтованих поверхнях роду $g \geq 2$. Нагадаємо, що потік, заданий на многовиді M, називають транзитивним, якщо він має скрізь щільну на M траєкторію.

У роботах [1, 2] вивчались транзитивні потоки на зв'язних замкнених орієнтованих поверхнях M^2 роду $g > 1$. Автори запропонували топологічний інваріант — *гомотопічний клас обертання*, який є узагальненням числа обертання Пуанкаре. У цих термінах встановлено необхідні й достатні умови топологічної еквівалентності транзитивних потоків на M^2, що мають скінченне число станів рівноваги і не мають сепаратрис, що з'єднують стани рівноваги. Приклади побудов транзитивних потоків для поверхонь малого роду наведено в [3] (приклади 11, 12), [4, 5]. Проте залишилось нез'ясованим питання про існування транзитивних потоків із заданим набором індексів нерухомих точок. Саме цьому питанню й присвячено дану статтю.

Питання про реалізацію векторних полів із заданим набором особливостей на двовимірних многовидах досліджувались, наприклад, у роботах [6 – 8].

Будемо досліджувати питання про існування транзитивних потоків із припустимим набором особливостей — сідел — зі скінченним числом сепаратрис (серед яких немає тих, що з'єднують стани рівноваги) на замкнених орієнтованих поверхнях.

У роботі встановлено існування таких потоків на орієнтованих поверхнях довільного роду $g \geq 2$.

2. Допоміжні відомості про траєкторії на двовимірних многовидах. Нехай M — замкнена орієнтована поверхня. Позначимо через X_t, $t \in R$, гладкий потік на M, що породжується векторним полем $X \in \aleph^r(M)$.

Означення 1. *Траєкторією поля* X, *яка проходить через точку* $p \in M$, *називають множину* $\sigma(p) = \{X_t(p), t \in R\}$, ω-*граничною множиною* $\omega(p)$ *точки* $p \in M$ — *множину тих точок* $q \in M$, *для яких існує послідовність* $t_n \to \infty$ *така, що* $X_{t_n}(p) \to q$;

α-гранична множина точки $p \in M$ — це множина $\alpha(p) = \{q \in M \mid \exists\, t_n \to -\infty : X_{t_n}(p) \to \to q\}$.

Означення 2. *Нехай γ — траєкторія поля $X \in \aleph^r(M)$. Говорять, що γ — рекурентна траєкторія, якщо $\gamma \subset \omega(\gamma)$ або $\gamma \subset \alpha(\gamma)$.*

Означення 3. *Будемо говорити, що потік X_t на M належить класу T, якщо виконуються такі умови:*
1) потік X_t є транзитивним (має на M скрізь щільну траєкторію);
2) потік X_t має тільки скінченне число станів рівноваги і сепаратрис;
3) потік X_t не має сепаратрис, що з'єднують сідла.

Приклади потоків класу T неважко побудувати на довільній орієнтованій поверхні M роду $g \geq 2$, використовуючи транзитивні потоки на торі без станів рівноваги. Приклади транзитивних потоків на кренделі можна знайти, наприклад, в [3] (приклади 11, 12). Один із підходів до побудови потоку з класу T описано в [5].

Означення 4. *Патологічним сідлом називатимемо стан рівноваги, який має сектор гіперболічного типу та принаймні один сектор параболічного або еліптичного типу* [9].

Зауваження 1. З означення транзитивності випливає, що потоки класу T не мають джерел, стоків, замкнених траєкторій, сепаратрисних контурів та патологічних сідел.

Далі під *сідлом* будемо розуміти стан рівноваги зі скінченним числом сепаратрис, усі сектори якого лише гіперболічного типу. Сідло будемо називати *виродженим*, якщо в нього входить (або виходить) більше двох сепаратрис.

Припустимі та реалізовані набори особливостей. Для кожного натурального n позначимо через $(n_1, \ldots, n_k) = (n_i)_n^k$ його зображення у вигляді суми k натуральних доданків, тобто таких, що $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Очевидно, що $1 \leq k \leq n$.

Означення 5. *Нехай M^2 — замкнена орієнтована поверхня роду $g \geq 2$, $\chi(M^2)$ — ейлерова характеристика. Набір $(n_i)_n^k$ будемо називати припустимим на M^2, якщо має місце рівність $k - n = \chi(M^2)$.*

Означення 6. *Набір $(n_i)_n^k$ будемо називати реалізованим на M^2, якщо на M^2 існує (гладке) векторне поле $X \in T$, у якого точно k критичних точок — сідел (у загальному випадку вироджених), причому $\operatorname{ind}(X, x_i) = 1 - n_i,\ i = 1, \ldots, k$.*

З теореми Пуанкаре – Хопфа випливає, що кожен реалізований набір є припустимим.

Нижче встановимо справедливість оберненого твердження, а саме, що кожен припустимий набір є реалізованим на замкненій орієнтованій поверхні.

3. Про існування транзитивних потоків із фіксованим набором особливостей.

Лема. *Нехай M — замкнена орієнтована поверхня роду $g \geq 2$, а $(n_i)_{k+2g-2}^k$ – припустимий на M набір. Тоді на M існує гладка функція g, яка має один максимум, один мінімум і k критичних точок $x_1, \ldots, x_k$ типу сідла (в загальному випадку вироджених), в деякому околі кожної з яких функція g неперервною заміною координат зводиться до вигляду $g = \operatorname{Re} z^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$.*

Доведення. Розглянемо на M функцію Морса f, яка має один максимум, один мінімум і $2g$ критичних точок $y_1, \ldots, y_{2g}$ індексу 1. Без втрати загальності можна вважати, що всі

y_i належать одному критичному рівню $f^{-1}(c)$. Якщо це не так, то за допомогою збурень даної функції Морса це завжди можна зробити.

Відомо [10, 11], що лінія рівня $\Gamma = f^{-1}(c)$ є зв'язним графом, порядок кожної з $2g$ вершин якого дорівнює чотирьом.

Розглянемо малі дискові околи D_i точок y_i. Кожен такий окіл є кругом, розбитим на 4 сектори (по черзі розфарбованих у чорний і білий колір), у внутрішності яких функція f набирає значення більше або менше c.

Ми стверджуємо, що якщо зафіксувати деяку точку y_i (для визначеності y_1), один із секторів відповідного круга D_i та напрям на колі цього диска і рухатись вздовж ребер графа $\Gamma = f^{-1}(c)$ (у відповідності з кольорами), то можна послідовно занумерувати всі критичні точки y_i.

Справедливість цього твердження випливає з того факту, що функція f має на M точно один максимум і один мінімум. Тоді очевидно, що, занумерувавши точки y_i вказаним способом, ми визначимо порядок сусідства точок y_i. У подальшому будемо вважати, що $y_1, \ldots, y_{2g}$ — саме такий порядок.

Розіб'ємо точки y_i на k послідовних груп

$$\Delta_1 = \{y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,n_1}\}, \Delta_2 = \{y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,n_2}\}, \ldots, \Delta_k = \{y_{k,1}, y_{k,2}, \ldots, y_{k,n_k}\}$$

по n_i в кожній, де $y_{1,p} = y_p,\ p = 1, \ldots, n_1, y_{j,p} = y_{n_j^*+p}, n_j^* = \sum_{i=1}^{j-1} n_i, j = 2, \ldots, k.$

Неважко встановити, що відрізки I_j лінії рівня, кінцями яких є точки $y_{j,1}$, y_{j,n_j}, $j = 1, \ldots, k$, попарно не перетинаються.

Нехай, далі, $\alpha_i : [0,1] \to f^{-1}(c)$ — кусково-гладкий шлях, який містить всі критичні точки з множини Δ_i, $i = 1, \ldots, k$. Для кожного $i = 1, \ldots, k$ визначимо відображення $\Psi_i : M \to M$, що задовольняє умови:

1) $\Psi_i\left(\alpha_i[0,1]\right)$ є точкою $x_i \in M$;

2) $\Psi\left(M \backslash \alpha_i[0,1]\right) \to M \backslash \{x_i\}$ є дифеоморфізмом.

Відображення Ψ_1 тотожне на доповненні малому околу критичного рівня $f^{-1}(c)$. Тоді за теоремою 2.7 [12] функція $g_1 = f \circ \Psi_1^{-1}(x_1)$ є гладкою функцією, яка відрізняється від f лише в малому околі критичного рівня $f^{-1}(c)$ і має в цьому околі одну (вироджену) критичну точку x_1 і всі критичні точки y_i, за винятком точок із Δ_1.

Застосувавши вказану техніку до функції g_1, побудуємо функцію g_2, яка відрізняється від g_1 лише в малому околі критичного рівня і має в цьому околі дві (вироджені) критичні точки x_1, x_2 та всі критичні точки y_i, за винятком точок із $\Delta_1 \bigcup \Delta_2$.

Таким чином, застосувавши описану вище техніку k разів, на M можна побудувати гладку функцію $g = g_k$, що задовольняє умови леми.

Той факт, що функція g в деякому околі кожної з критичних точок $x_1, ..., x_k$ (що не є локальними максимумами або мінімумами) неперервною заміною координат зводиться до вигляду $g = \operatorname{Re} z^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, випливає з роботи [13].

Теорема. *На замкненій орієнтованій поверхні роду $g \geq 2$ кожен припустимий набір $(n_i)_{k+2g-2}^k$ є реалізованим.*

I. Розглянемо замкнену орієнтовану поверхню N_{g-1}^2 роду $g - 1 \geq 1$.

Згідно з лемою існує гладка функція $f : N_{g-1}^2 \to R^1$ з одним максимумом, одним мінімумом і k (виродженими) критичними точками $x_1, \ldots, x_k$ типу сідла, в достатньо малому околі кожної з яких (x_i) функція f неперервною заміною координат зводиться до вигляду $f = \operatorname{Re} z^i$, $i = 1, \ldots, k$.

Далі, за даною функцією f побудуємо векторне поле X градієнта. Побудоване векторне поле має $k+2$ точки спокою: одне джерело, один стік, k сідел x_i і не має сепаратрис, що з'єднують сідла. Справедливість останнього випливає з властивостей поля градієнта і того факту, що всі сідла належать одному критичному рівню.

Нехай C_1 і C_2 — ортогональні полю X кола, що обмежують диски D_1, D_2, які містять відповідно джерело і стік. Виріжемо з N^2_{g-1} вказані диски та ототожнимо кола C_1 і C_2 за допомогою необхідного дифеоморфізму h. Ця операція еквівалентна приклеюванню ручки до поверхні N^2_{g-1}. В результаті отримаємо замкнену поверхню M роду g.

Нехай $\overline{X}$ — гладке поле, породжене на M полем X у відповідності зі зробленим ототожненням (за допомогою дифеоморфізму h) кіл C_1 і C_2. Гладкість $\overline{X}$ досягається в результаті застосування так званих „комірців". При цьому ототожнення повинно бути таким, щоб поле $\overline{X}$ мало особливості лише в точках x_i.

Таким чином, з припущення, що необхідний дифеоморфізм існує, на M побудовано векторне поле $\overline{X}$, яке має k точок спокою x_i (сідел, в загальному випадку вироджених). За побудовою індекс Пуанкаре кожної з критичних точок x_i поля $\overline{X}$ дорівнює $\operatorname{ind}(\overline{X}, x_i) = 1 - n_i$. Більш того, $\sum_{i=1}^{k}(1-n_i) = \chi(N^2_{g-1}) - 2 = 2 - 2(g-1) - 2 = 2 - 2g$, що збігається з ейлеровою характеристикою поверхні M.

Нагадаємо [13], що індекс Пуанкаре сідлової критичної точки x поля Y визначається співвідношенням $\operatorname{ind}(Y, x) = 1 - r$, де r — число сепаратрис, які входять (або виходять) у x.

II. Нижче встановимо, що дифеоморфізм h можна вибрати так, що кожна регулярна траєкторія поля $\overline{X}$ буде щільною в M. Оскільки кожна регулярна траєкторія перетинає коло C_1, то достатньо показати, що перетин будь-якої регулярної траєкторії з C_1 є щільним у C_1.

З того, що немає сепаратрис, які з'єднують стани рівноваги, випливає, що сепаратриси сідел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ перетинають кожне з кіл C_1 і C_2 в $n = k + 2g - 2$ точках (у подальшому — в точках $A_1, \ldots, A_n$ і $B_1, \ldots, B_n$ відповідно).

Нехай X_t — потік, породжений векторним полем X на N^2_{g-1}. Тоді можна визначити відображення наслідування $P : C_1 \to C_2$, яке кожній точці $p \in C_1 \setminus (A_1, \ldots, A_n)$ ставить у відповідність точку $q = P(p)$, в якій додатна траєкторія точки p (вперше) перетне C_2.

Нехай $A_i x_j$ — відрізок сепаратриси, що входить у сідло x_j. Оскільки поверхня орієнтована, то можна задати циклічний порядок (наприклад, проти руху годинникової стрілки) на відрізках $L_{1,j}, \ldots, L_{n_j,j}$ $(L'_{1,j}, \ldots, L'_{n_j,j})$ сепаратрис, що входять (виходять) в x_j. Можна вважати, що $L_{1,j} \subset A_i x_j$. У зв'язку з цим у подальшому будемо вважати, що $L'_{1,j} \subset x_j B_i$, де $B_i \in C_2$.

Іншими словами, ми довизначили відображення P для точок сепаратрис, а саме $P(A_j) = B_j$. Зауважимо, що обрана орієнтація на поверхні природним чином встановлює циклічний порядок точок A_i на колі C_1 та точок B_j на колі C_2. Саме такий циклічний порядок і будемо розуміти в подальшому.

За побудовою відображення P є бієктивним, неперервним в обидва боки та має розрив лише в скінченному числі точок, а саме, в точках $A_1, \ldots, A_n$ сепаратрис $L_1, \ldots, L_n$. Більш того, відображення $P : C_1 \to C_2$ неперервне зліва в точках A_i, а відображення $P^{-1} : C_2 \to C_1$ — справа в точках B_i.

Нехай $\overline{C_1}$ $(\overline{C_2})$ — коло в R^2 одиничного радіуса з n точками $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ $(\overline{B_1}, \ldots, \overline{B_n})$

на ньому, які є вершинами правильного n-кутника. Нехай, далі, φ_1 — гомеоморфізм (що зберігає орієнтацію) кола C_1 на $\overline{C_1}$, при якому $\varphi_1(A_i) = \overline{A_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Аналогічно визначимо φ_2 як відображення C_2 на $\overline{C_2}$. Очевидно, що на кожному з кіл $\overline{C_1}$ і $\overline{C_2}$ циклічний порядок точок $\overline{A_i} = \varphi_1(A_i)$ і $\overline{B_i} = \varphi_2(B_i)$ такий самий, як порядок їх прообразів на C_1 і C_2 відповідно.

Розглянемо відображення $\overline{P} : \overline{C_1} \to \overline{C_2}$, індуковане відображенням $P : C_1 \to C_2$. Оскільки відображення P задається комбінаторно, то можна вважати, що відображення $\overline{P}$ зберігає довжини інтервалів (локально ізометричне), тобто образом інтервалу з $\overline{C_1}$ довжини L є не більш ніж скінченне число інтервалів з $\overline{C_2}$, сума довжин яких дорівнює L. Тому відображення $\varphi_2 : C_2 \to \overline{C_2}$ слід визначити як

$$\varphi_2 = \overline{P} \circ \varphi_1 \circ P^{-1}.$$

Нехай α — точка з $\overline{C_1}$, яка визначається центральним кутом α (в напрямку проти годинникової стрілки відносно точки $\overline{A_1}$), і $\beta = \overline{P}(\alpha)$ — точка на $\overline{C_2}$, що визначається центральним кутом β (в напрямку проти годинникової стрілки відносно точки $\overline{B_1}$). Визначимо відображення $\gamma : \overline{C_2} \to \overline{C_2}$ за правилом

$$\gamma(\beta) = \beta + \varepsilon + i\,\frac{2\pi}{n}, \quad \beta \in \left[\frac{2\pi(i-1)}{n}, \frac{2\pi i}{n}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

де ε, $\dfrac{\varepsilon}{\pi}$ — ірраціональні числа, $\varepsilon > 0$ — як завгодно мале.

Нехай $D = \left\{ i\,\frac{2\pi}{n} \,\middle|\, i = 1, \ldots, n \right\} = \left\{ \overline{A}_i \,\middle|\, i = 1, \ldots, n \right\}$. Визначимо відображення $\psi : \overline{C_1} \to \overline{C_1}$ таким чином:

$$\psi = \overline{P}^{\,-1} \circ \gamma \circ \overline{P}(\alpha).$$

Далі, нехай $\theta_+(\alpha) = \{\psi^m(\alpha) |\, m \geq 0\}$ — додатна ψ-півтраєкторія точки $\alpha \in \overline{C_1}$, а $\theta_-(\alpha) = \{\psi^m(\alpha) |\, m \leq 0\}$ — її від'ємна ψ-траєкторія.

Ми стверджуємо, що перетин довільної регулярної $\overline{X}$-траєкторії з C_1 (що проходить через точку $p \in C_1$) є щільним у C_1 тоді і лише тоді, коли додатна (від'ємна) ψ-траєкторія точки $\alpha = \varphi_1(p)$ щільна в $\overline{C_1}$.

Справді, якщо $\theta_+(\alpha) \cap D \neq \varnothing$, то $\varphi_1^{-1}(\alpha)$ належить стійкому многовиду сідла, а якщо $\theta_-(\alpha) \cap D \neq \varnothing$ — нестійкому. Якщо ж $\theta_+(\alpha) \cap D = \varnothing$ і $\theta_+(\alpha)$ щільна в $\overline{C_1}$, то додатна $\overline{X}$-траєкторія точки $\varphi_1^{-1}(\alpha)$ є щільною в C_1. Аналогічно для від'ємних ψ і $\overline{X}$-траєкторій.

Встановимо деякі властивості відображення $\psi : \overline{C_1} \to \overline{C_1}$:

1) відображення ψ є бієктивним і має розрив лише в скінченному числі точок (в точках множини D);

2) ψ зберігає довжини відрізків, тобто образом інтервалу довжини L є не більш ніж скінченне число інтервалів, сума довжин яких дорівнює L;

3) ψ не має періодичних траєкторій;

4) будь-яка траєкторія відображення ψ має з множиною D не більше однієї спільної точки.

Справедливість властивостей 1 і 2 випливає з властивостей відображень $\overline{P}$ і γ.

Покажемо справедливість властивості 3 (властивість 4 доводиться аналогічно).

Припустимо обернене, а саме, що для деякої точки $x \in \overline{C_1} \setminus D$ існує таке $m \in Z$, що $\psi^m(x) = x$. Це означає, що $\overline{P}^{\,-m} \circ \gamma^m \circ \overline{P}^{\,m}(x) = x$. Звідси маємо $\gamma^{\,m} \circ \overline{P}^{\,m}(x) = \overline{P}^{\,m}(x)$. Оскільки $\overline{P}^{\,m}(x) = \beta \in \overline{C_2}$, то з останнього випливає, що $\gamma^{\,m}(\beta) = \beta$, тобто відображення $\gamma : \overline{C_2} \to \overline{C_2}$ має періодичну траєкторію, чого не може бути, оскільки число ε/π є ірраціональним.

Згідно з ідеями із [14] та на підставі міркувань з [3] (приклад 12) для відображення ψ кола в себе з властивостями $1-4$, доведення того факту, що кожна додатна (від'ємна) ψ-траєкторія точки $\alpha \in \overline{C_1}$ є щільною в $\overline{C_1}$, буде випливати зі справедливості встановлених нижче тверджень.

Твердження 1. *Якщо $F \subset \overline{C_1}$ — таке об'єднання скінченного числа замкнених інтервалів, що $\psi(F) = F$, то $F = \overline{C_1}$.*

Доведення проведемо методом від супротивного.

Нехай $F = \bigcup_{i=0}^{k}[a_i, b_i]$, $F \neq \overline{C_1}$, і $\alpha \in \overline{C_1}$ — гранична точка F. Оскільки $\psi(F) = F$, а звуження ψ на $\overline{C_1} \setminus D$ є гомеоморфізмом, то $\psi^{-1}(\alpha)$ або є граничною точкою множини F (кінець деякого інтервалу $[a_i, b_i]$), або належить D.

Якщо $\psi^{-1}(\alpha) \notin D$, то, здійснюючи „від'ємні" ітерації, обов'язково при деякому k отримаємо точку $\delta = \psi^{-k}(\alpha) \in D$. Для цього достатньо взяти $k = 2m + 1$.

Справді, якщо кожна з $2m$ попередніх ітерацій давала точку, що є кінцем деякого з m інтервалів множини F, то $(2m + 1)$-ша ітерація не може збігтися з кінцем одного з інтервалів множини F. Якщо припустити обернене, то буде випливати, що ψ має періодичну траєкторію, чого не може бути за властивістю 3.

У випадку додатних ітерацій точки α існує деяке натуральне q таке, що $\psi^{-q}(\alpha) \in D$. Отже, існують натуральні k та q такі, що $\psi^{k+q}(\delta) \in D$, де $\delta = \psi^{-k}(\alpha)$.

Але ж останнє суперечить властивості 3 відображення ψ. Таким чином, $F = \overline{C_1}$.

Твердження 2. *Для довільного замкненого інтервалу $I \subset \overline{C_1}$ існує натуральне m таке, що $\overline{C_1} = \bigcup_{i=0}^{m} \psi^{-i}(I)$.*

Доведення. Оскільки I при необхідності можна зменшити, то будемо вважати, що $I \cap D = \varnothing$ а кінці I не належать траєкторіям точок із D. Нехай $B = (\partial I) \cup D$, де (∂I) — граничні точки інтервалу. При кожному $x \in B$ покладемо

$$\rho(x) = \begin{cases} +\infty, & \psi^m(x) \notin \operatorname{int} I \ \forall\, m > 0, \\ \min\{m > 0 : \ \psi^m(x) \in \operatorname{int} I\}. & \end{cases}$$

Тоді I можна подати у вигляді об'єднання $I = \cup_{i=0}^{n} I_j$, де I_j — такі замкнені інтервали з внутрішностями, які не перетинаються, що

$$\bigcup_{i=1}^{n} \partial I_i = (\partial I) \bigcup \{\psi^{\rho(x)} : x \in B, \rho(x) < \infty\}.$$

1. Для кожного j покладемо $n_j = \min\{m > 0 : \ \psi^{-m}(x) \cap I \neq \varnothing\}$ і покажемо, що n_j є скінченним.

Припустимо, що це не так. Тоді для будь-яких n, m таких, що $0 \le n < m$, виконується умова $\psi^{-m}(\operatorname{int} I_j) \bigcap \psi^{-n}(\operatorname{int} I_j) = \varnothing$. Справді, якщо припустити, що існує пара $0 \le n < m$, для якої $\psi^{-m}(\operatorname{int} I_j) \bigcap \psi^{-n}(\operatorname{int} I_j) \neq \varnothing$, то з цього буде випливати, що $\psi^{-(n-m)}(\operatorname{int} I_j) \bigcap$

$\bigcap \operatorname{int} I_j \neq \varnothing$. Оскільки $\operatorname{int} I_j \subset \operatorname{int} I$, то з останнього та визначення n_j випливає, що $n_j = m - n$, а тому є скінченним.

Однак не всі множини $\psi^{-i}(\operatorname{int} I_j)$, $i = 1, 2, \ldots$, попарно не перетинаються, тому що довжина кожної з них (які є об'єднанням скінченного числа інтервалів: відкритих, замкнених або напіввідкритих і ще, можливо, скінченного числа точок) дорівнює довжині інтервалу I_j.

Таким чином, n_j є скінченним. Більш того, методом від супротивного можна встановити, що множини $\operatorname{int} I_j,\ \psi^{-1}(\operatorname{int} I_j), \ldots, \psi^{-(n_j-1)}(\operatorname{int} I_j)$ попарно не перетинаються.

2. Переконаємось у тому, що всі ці множини належать відрізкам, на яких ψ^{-1} є гомеоморфізмом, так що ці множини і $\psi^{-n_j}(\operatorname{int} I_j)$ є відкритими інтервалами.

Для $\operatorname{int} I_j$ це вірно (весь $\operatorname{int} I_j$ належить такому відрізку). Нехай це так для $\psi^{-i}(\operatorname{int} I_j)$ при всіх $i = 0, \ldots, h-1$, а $\psi^{-h}(\operatorname{int} I_j)$ не належить такому відрізку ($1 \leq h \leq n_j$). Останнє можливе лише в тому випадку, коли $\psi^{-h}(\operatorname{int} I_j)$ містить точку вигляду $\psi(d)$, $d \in D$. Тоді $\psi^{h+1}(d) \in \operatorname{int} I_j \subset \operatorname{int} I$ и $\rho(d) \leq h+1$.

Якщо припустити, що $\rho(d) = h+1$, то з цього буде випливати, що точка $\psi^{\rho(d)}(d)$ належить внутрішності I_j. Але це суперечить означенню інтервалів I_j.

Припустимо тепер, що $\rho(d) < h+1$. Тоді для точки $x = \psi^{h+1}(d)$ маємо $x \in \operatorname{int} I_j$ і $\psi^{-(h+1-\rho(d))}(x) = \psi^{\rho(d)}(d) \in \operatorname{int} I_j$. Але число $m = h+1-\rho(d)$ є таким, що $0 < m < n_j$ (тому що $h \leq n_j$ і $\rho(d) \geq 1$) і $\psi^{-m}(\operatorname{int} I_j) \cap \operatorname{int} I_j \neq \varnothing$. Останнє суперечить означенню величини n_j.

3. Далі покажемо, що $\psi^{-n_j}(\operatorname{int} I_j) \subset I$.

Припустимо обернене. Тоді відкритий інтервал $\psi^{-n_j}(\operatorname{int} I_j)$ має точку $x \in \partial I$, оскільки $\psi^{-n_j}(\operatorname{int} I_j) \cap I \neq \varnothing$. З означення числа n_j випливає, що $\psi^i(x) \notin I,\ i = 1, \ldots, n_j$, а точка $\psi^{n_j}(x)$ належить $\operatorname{int} I_j \subset \operatorname{int} I$. Оскільки $x \in B$, то $n_j = \rho(x)$.

Але точка $\psi^{n_j}(x) = \psi^{\rho(x)}(x)$ не може належати внутрішності I_j з тих же причин, з яких це неможливо для точок $\psi^{\rho(d)}(d)$.

4. Покладемо

$$F = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=0}^{n_j-1} \overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)}$$

і доведемо, що $\psi^{-1}F \subset F$. Для цього достатньо показати, що при всіх k, j (що розглядаються) має місце включення $\psi^{-1}\overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)} \subset F$.

4.1. Перевіримо, що при даних k, j $\psi^{-1}\overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)} = \overline{\psi^{-k-1}(\operatorname{int} I_j)}$, за винятком того випадку, коли правий кінець I_j є точкою вигляду $\psi^{\rho(d)}(d)$, $d \in D$, і $k = \rho(d) - 1$. У цьому випадку $\psi^{-1}\overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)} = \overline{\psi^{-k-1}(\operatorname{int} I_j)} \bigcup \{d\}$.

Раніше встановлено, що $\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)$, $k = 1, \ldots, n_j$, є відкритими інтервалами, які переходять один в інший гомеоморфно (під дією ψ) зі збереженням орієнтації.

Нехай, далі, $\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j) = (x, y)$ і $0 \leq k < n_j$. Тоді

$$\psi^{-1}\overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)} = \psi^{-1}(x) \cup \psi^{-k-1}(\operatorname{int} I_j) \cup \psi^{-1}(y).$$

Але будь-яка точка з $\operatorname{int} I_j$ має такий правий півокіл, на якому ψ є гомеоморфізмом, що зберігає орієнтацію. Тому $\psi^{-1}(x) \subset \overline{\psi^{-1}(x, y)} = \overline{\psi^{-k-1}(\operatorname{int} I_j)}$. Аналогічно $\psi^{-1}(y) \subset \overline{\psi^{-1}(x, y)}$, якщо y має окіл з такою властивістю.

Подібного півоколу немає лише в тому випадку, коли $y = \psi(d)$, $d \in D$. Тоді праві кінці $\psi^{-i}(\operatorname{int} I_j)$ при $i = 1, \ldots, k$ є $\psi^{k-i}(y)$ — вони вже не можуть потрапити в D і, як окремий випадок, правим кінцем інтервалу $\operatorname{int} I_j$ є точка $z = \psi^{k+1}(d)$. Він не збігається з правим кінцем I (який не належить $\cup\psi^i(D)$), а тому міститься в $\operatorname{int} I_j$. Отже, $\rho(d) \leq h + 1$.

Якщо припустити, що $\rho(d) < h{+}1$, то з цього випливатиме, що $\psi^{\rho(d)-k-1}(z) = \psi^{\rho(d)}(d) \in \in \operatorname{int} I_j$, причому $0 < k + 1 - \rho(d) < n_j$. Але це суперечить означенню n_j: оскільки ψ^{-1} є неперервним у точках $\psi^{-1}(z)$, $0 \leq i < k$, то в $\psi^{-(k+1-\rho(d))}(\operatorname{int} I_j)$ містяться точки, як завгодно близькі до $\psi^{\rho(d)-k-1}(z)$.

У розглянутому випадку (коли $k + 1 = \rho(d)$ і т. д.) z не може бути правим кінцем I, а тому є лівим кінцем деякого I_h.

Покажемо, що $\rho(d) \leq n_h$. Припустимо, що $\rho(d) - n_h > 0$. Вже відомо, що $\psi^{-n_h}(\operatorname{int} I_j) \subset \subset I$, а оскільки ψ^{-1} є скрізь неперервним справа, то $\psi^{-n_h}(z) \in \psi^{-n_h}(\operatorname{int} I_j) \subset I$.

Але $\psi{-}n_h(z) = \psi^{\rho(d)-n_h}(d) \notin \partial I$, тому $\psi^{\rho(d)-n_h}(d) \in \operatorname{int} I$, що суперечить означенню $\rho(d)$.

Підсумовуючи викладене, приходимо до висновку, що $d \in \bigcup_{k=0}^{n_h} \overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_h)}$ та при $0 \leq \leq k < n_j$

$$\psi^{-1}\overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)} \subset \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{n_j} \overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)} \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{n_h} \overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_h)} \right).$$

Таким чином,

$$\psi^{-1}(F) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=0}^{n_j} \overline{\psi^{-k}(\operatorname{int} I_j)} = F \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \overline{\psi^{-n_j}(\operatorname{int} I_j)} \right).$$

Але $\psi^{-n_j}(\operatorname{int} I_j) \subset I$, $\overline{\psi^{-n_j}(\operatorname{int} I_j)} \subset I$, так що $\psi^{-1}(F) \subset F \bigcup I$. Оскільки $I = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\operatorname{int} I_j} \subset \subset F$, то $\psi^{-1}F \subset F$. Звідси випливає, що $F \subset \psi(F)$. Оскільки F є об'єднанням скінченного числа замкнених інтервалів, то з властивостей ψ випливає, що і $\psi(F)$ є об'єднанням скінченного числа інтервалів, можливо не лише замкнених, але й напіввідкритих або відкритих. Якщо припустити, що $\psi(F) \backslash F \neq \varnothing$, то множина $\psi(F) \backslash F$ повинна мати внутрішні точки, що неможливо, тому що ψ зберігає довжини інтервалів. Таким чином, $\psi(F) = F$. Згідно з твердженням 1 маємо $F = \overline{C_1}$.

Оскільки твердження про те, що додатна траєкторія точки $\alpha \in \overline{C_1}$ потрапляє у відрізок I, є еквівалентним тому, що $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{m} \psi^{-i}(I)$, то з твердження 2 випливає, що $\theta_+(\alpha)$ є щільною в $\overline{C_1}$ при будь-якому $\alpha \in \overline{C_1}$. Доведення щільності $\theta_-(\alpha)$ аналогічне.

4. Висновки. З'ясовано питання про існування транзитивних потоків на замкнених орієнтованих поверхнях із заданим набором індексів нерухомих точок (сідел), що задовольняють теорему Пуанкаре – Хопфа.

У процесі розв'язання вказаної задачі розроблено техніку побудови транзитивного потоку (з припустимим набором особливостей) на орієнтованій поверхні довільного роду $g \geq 2$.

1. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. — 1986. — **41**, № 1. — С. 149 – 169.

2. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем) // Мат. сб. — 1973. — **90(132)**, № 3. — С. 372 – 402.
3. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение. — М.: Мир, 1986. — 301 с.
4. *Блохин А. А.* Гладкие эргодические потоки на поверхностях // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1972. — **27**. — С. 113 – 128.
5. *Sacker R. J., Sell J. R.* On the existance of periodic solutions on 2-manifolds // J. Different. Equat. — 1972. — **11**, № 3. — P. 449 – 463.
6. *Пришляк А. О.* Векторные поля с заданным набором особых точек // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 10. — С. 1373 – 1384.
7. *Гирик Е. А.* О существовании векторных полей с заданным набором особенностей на двумерном замкнутом ориентируемом многообразии // Там же. — 1993. — **46**, № 12. — С. 1706 – 1709.
8. *Poltavets D. N.* Cherry vector fields on the torus T^2 // Meth. Funct. Anal. and Top. — 1996. — **2**, № 2. — P. 94 – 98.
9. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966. — 568 с.
10. *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 5. — С. 687 – 700.
11. *Кадубовський О. А.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // Там же. — 2006. — **58**, № 3. — С. 343 – 351.
12. *Takens F.* The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik – Sehnirelman category // Invent. math. — 1968. — **6**. — P. 197 – 244.
13. *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface // Top. and Appl. — 2002. — **119**. — P. 257 – 267.
14. *Keane M.* Interval exchange transformatins // Math. Z. — 1975. — **141**, № 5. — S. 25 – 31.

Одержано 30.01.2006