УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Д. В. Бельский

Ин.-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of $C^1[-1,+\infty)$-solutions of the linear differential-functional equation $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + hx(t-1) + c\dot{x}(qt) + r\dot{x}(t-1)$ in a neighbourhood of the singular point $t = +\infty$.

Встановлено нові властивості $C^1[-1,+\infty)$-розв'язків лінійного диференціально-функціонального рівняння $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + hx(t-1) + c\dot{x}(qt) + r\dot{x}(t-1)$ в околі особливої точки $t = +\infty$.

В данной работе рассматривается начальная задача

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + hx(t-1) + c\dot{x}(qt) + r\dot{x}(t-1), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = g(t) \in C^1, \quad t \in [-1, 0], \tag{2}$$

где $\{a, b, c, h, r\} \subset R$, $0 < q < 1$, и относительно начальной функции $g(t)$ будем предполагать выполненным условие „склейки"

$$\dot{g}(0) = ag(0) + bg(0) + hg(-1) + c\dot{g}(0) + r\dot{g}(-1). \tag{3}$$

В настоящее время имеется ряд интересных результатов, касающихся свойств решений уравнения (1). Так, в [1] исследованы асимптотические свойства решений уравнения (1) при $h = c = r = 0$, в [2] установлены новые свойства решений этого уравнения при $a = h = c = r = 0$, в [3] получены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения (1) при $h = c = r = 0$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $h = r = 0$, $|c| > 1$, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] определены мажоранты для решений уравнения (1) при $h = r = 0$. Несмотря на изложенное и на широкие приложения, которые находят такие уравнения в различных областях науки и техники (см. [7] и приведенную в ней библиографию), многие вопросы теории линейных дифференциально-функциональных уравнений вида (1) изучены мало. Это прежде всего касается исследования асимптотических свойств решений задачи (1), (2) из класса $C^1[-1,+\infty)$ в окрестности особой точки $t = +\infty$. Поэтому основной целью настоящей работы является установление новых свойств $C^1[-1,+\infty)$-решений задачи (1), (2) при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов a, b, c, h, r.

Прежде чем исследовать асимптотические свойства решений, укажем достаточные условия существования решения начальной задачи.

Теорема 1. *Если $|c/q| < 1$ и начальная функция $g(t)$ удовлетворяет условию (3), то задача (1), (2) имеет единственное $C^1[-1,+\infty)$-решение.*

Доказательство. Сначала рассмотрим отрезок $t \in [-1,\nu]$, $0 < \nu < 1$, и запишем задачу (1), (2) в эквивалентной (в классе $C^1[-1,\nu]$-решений) интегральной форме

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{q}x(qt) + rg(t-1) + \left(1-\dfrac{c}{q}\right)g(0) - rg(-1) + \\ \qquad + \displaystyle\int\limits_0^t (ax(s)+bx(qs))\,ds + h\int\limits_0^t g(s-1)ds,\ t \in (0,\nu], \\ g(t) \in C^1,\ t \in [-1,0]. \end{cases} \tag{4}$$

Для доказательства существования решений задачи (4) применим метод последовательных приближений:

$$x_0(t) = \begin{cases} g(0) + g'(0)t, & t \in (0,\nu], \\ g(t), & t \in [-1,0], \end{cases}$$

$$x_m(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{q}x_{m-1}(qt) + rg(t-1) + \left(1-\dfrac{c}{q}\right)g(0) - rg(-1) + \\ \qquad + \displaystyle\int\limits_0^t (ax_{m-1}(s)+bx_{m-1}(qs))\,ds + h\int\limits_0^t g(s-1)ds, \quad t \in (0,\nu], \\ g(t), \quad t \in [-1,0], \\ \qquad m \geq 1. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку $x_0(t) \in C^1[-1,\nu]$ и начальная функция $g(t)$ удовлетворяет условию (3), то, рассуждая по индукции, можно показать, что $x_m(t) \in C^1[-1,\nu]$ при всех $m \geq 1$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы и достаточно малом ν существует единственное непрерывное решение. Действительно, поскольку $|c/q| < 1$, при достаточно малом ν имеем

$$\left|\frac{c}{q}\right| + (|a|+|b|)\nu < 1.$$

Далее, принимая во внимание (5), получаем

$$\sup_{t\in[-1,\nu]} |x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leqslant \left(\left|\frac{c}{q}\right| + (|a|+|b|)\,\nu\right) \sup_{t\in[-1,\nu]} |x_{m-1}(t) - x_{m-2}(t)|\,, \quad m \geq 2.$$

Последнее неравенство означает, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \sup\limits_{t\in[-1,\nu]} |x_m(t) - x_{m-1}(t)|$ сходится, а следовательно, и последовательность непрерывных функций $\{x_m(t)\}$ сходится равномерно на отрезке $[-1,\nu]$.

Последовательные приближения (5) удовлетворяют соотношениям

$$\dot{x}_0(t) = \begin{cases} \dot{g}(0), & t \in (0,\nu], \\ \dot{g}(t), & t \in [-1,0], \end{cases}$$

$$\dot{x}_m(t) = \begin{cases} ax_{m-1}(t) + bx_{m-1}(qt) + hx_{m-1}(t-1) + c\dot{x}_{m-1}(qt) + r\dot{x}_{m-1}(t-1), \quad t \in (0,\nu], \\ \dot{g}(t), \quad t \in [-1,0], \\ m \geq 1. \end{cases}$$

Отсюда в силу (5) имеем

$$\sup_{t\in[-1,\nu]} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}_{m-1}(t)| = \sup_{t\in(0,\nu]} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}_{m-1}(t)| \leq$$

$$\leq (|a|+|b|) \sup_{t\in[-1,\nu]} |x_{m-1}(t) - x_{m-2}(t)| + |c| \sup_{t\in[-1,\nu]} |\dot{x}_{m-1}(t) - \dot{x}_{m-2}(t)|\,, \quad (6)$$

$$m \geq 2.$$

Для сокращения записей введем обозначения

$$\alpha_m \overset{\text{df}}{=} \sup_{t\in[-1,\nu]} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}_{m-1}(t)|\,, \quad \beta_m \overset{\text{df}}{=} \sup_{t\in[-1,\nu]} |x_m(t) - x_{m-1}(t)|\,.$$

Тогда, продолжая оценку (6), находим

$$\alpha_m \leqslant (|a|+|b|)\beta_{m-1} + |c|\alpha_{m-1},$$

откуда следует

$$\sum_{m=1}^{n+1} \alpha_m - \alpha_1 \leqslant (|a|+|b|) \sum_{m=1}^{n} \beta_m + |c| \sum_{m=1}^{n+1} \alpha_m.$$

Учитывая, что $|c/q| < 1$, окончательно получаем

$$\sum_{m=1}^{n+1} \alpha_m \leqslant (1-|c|)^{-1} \left((|a|+|b|) \sum_{m=1}^{n} \beta_m + \alpha_1 \right).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \beta_m$ сходится, сходится также ряд $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \alpha_m$. Таким образом, последовательность $x_m(t)$ сходится к $C^1[-1,\nu]$-решению $x(t)$ задачи (1), (2) по норме:

$$\|x_m(t) - x(t)\| \overset{\text{df}}{=} \left(\sup_{t\in[-1,\nu]} |x_m(t) - x(t)| + \sup_{t\in[-1,\nu]} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}(t)| \right),$$

из чего следует существование и единственность $C^1[-1,\nu)$-решения задачи (1), (2). С помощью метода шагов это решение можно продолжить на отрезок $[-1,+\infty)$.

Теорема доказана.

Исследуем теперь вопрос об асимптотической устойчивости решений уравнения (1).

Теорема 2. *Если* $\{a,b,h,c,r\}\subset R$, $0<q<1$, $a<0$ *и*

$$\left|\frac{c}{q}\right|+|r|+|h+ar|\frac{1}{|a|}+\left|\frac{bq+ac}{q}\right|\frac{1}{|a|}<1,$$

то уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Любое $C^1(\min\{1,2q\},+\infty)$-решение уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$x(t)=\frac{c}{q}x(qt)+rx(t-1)+\left(x(2)-\frac{c}{q}x(2q)-rx(1)\right)e^{a(t-2)}+$$

$$+\frac{bq+ac}{q}\int\limits_2^t e^{a(t-s)}x(qs)ds+(h+ar)\int\limits_2^t e^{a(t-s)}x(s-1)ds,\quad t>2.$$

Рассмотрим начальную задачу

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{q}x(qt)+rx(t-1)+\left(x(2)-\dfrac{c}{q}x(2q)-rx(1)\right)e^{a(t-2)}+\\ \qquad+\dfrac{bq+ac}{q}\displaystyle\int\limits_2^t e^{a(t-s)}x(qs)ds+(h+ar)\int\limits_2^t e^{a(t-s)}x(s-1)ds,\quad t>2,\\ g(t),\quad t\in[\min\{1,2q\},2],\end{cases}\tag{7}$$

где $g(t)$ — некоторая функция из класса $C[\min\{1,2q\},2]$, и исследуем ее с помощью метода последовательных приближений, которые определим соотношениями

$$x_0(t)=\begin{cases}0,\quad t\geq 3,\\ g(2)(3-t),\quad 2<t<3,\\ g(t),\quad \min\{1,2q\}\leq t\leq 2,\end{cases}$$

$$x_m(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{q}x_{m-1}(qt)+rx_{m-1}(t-1)+\left(g(2)-\dfrac{c}{q}g(2q)-rg(1)\right)e^{a(t-2)}+\\ \quad+\dfrac{bq+ac}{q}\displaystyle\int\limits_2^t e^{a(t-s)}x_{m-1}(qs)ds+(h+ar)\int\limits_2^t e^{a(t-s)}x_{m-1}(s-1)ds,\quad t>2,\\ g(t),\quad t\in[\min\{1,\ 2q\},\ 2],\\ \qquad m\geq 1.\end{cases}\tag{8}$$

В силу (8) при $t \geq \max\{4, 3q^{-1}\} \stackrel{\mathrm{df}}{=} t_1$ имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)| = |x_1(t)| = \Bigg|\left(g(2) - \frac{c}{q}\, g(2q) - rg(1)\right) e^{a(t-2)} +$$

$$+ \frac{bq + ac}{q} \int\limits_2^{t_1} e^{a(t-s)}\, x_0(qs)ds +$$

$$+ (h + ar) \int\limits_2^{t_1} e^{a(t-s)}\, x_0(s-1)ds\Bigg| = K_1 e^{at},$$

где

$$K_1 = \Bigg|\left(g(2) - \frac{c}{q}\, g(2q) - rg(1\right) e^{-2a} + \frac{bq + ac}{q} \int\limits_2^{t_1} e^{-as}\, x_{m-1}(qs)ds +$$

$$+ (h + ar) \int\limits_2^{t_1} e^{-as}\, x_{m-1}(s-1)ds\Bigg|.$$

Тогда $|x_1(t) - x_0(t)| \leq Ke^{at}$, $t \geq \min\{1, 2q\}$, где K — некоторая константа.

Поскольку $a < 0$, при $t > 2$ находим

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \left|\frac{c}{q}\right| |x_1(qt) - x_0(qt)| + |r|\, |x_1(t-1) - x_0(t-1)| +$$

$$+ |h + ar| \int\limits_2^{t} e^{a(t-s)} |x_1(s-1) - x_0(s-1)| ds +$$

$$+ \left|\frac{bq + ac}{q}\right| \int\limits_2^{t} e^{a(t-s)} |x_1(qs) - x_0(qs)| ds \leq$$

$$\leq \left|\frac{c}{q}\right| Ke^{aqt} + |r| Ke^{a(t-1)} + |h + ar| \int\limits_2^{t} e^{a(t-s)} Ke^{a(s-1)}\, ds +$$

$$+ \left|\frac{bq + ac}{q}\right| \int\limits_2^{t} e^{a(t-s)} Ke^{aqs}\, ds \leq$$

$$\leq \left|\frac{c}{q}\right| Ke^{aqt} + |r|e^{-a}\, Ke^{at} + |h+ar|e^{-a}\, e^{at}K(t-2) +$$

$$+ \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{a(q-1)}\, Ke^{aqt} \leq$$

$$\leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + |r|e^{-a} + |h+ar|e^{-a}e^{a(1-q)t}(t-2) + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{a(q-1)}\right) Ke^{aqt} \leq$$

$$\leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + |r|e^{-a} + |h+ar|e^{-a} \sup_{t>2}\left(e^{a(1-q)t}(t-2)\right) +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{a(q-1)}\right) Ke^{aqt} \stackrel{\mathrm{df}}{=} K_1\, e^{aqt}.$$

Аналогично при $t > 2$ имеем

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq \left|\frac{c}{q}\right|\, |x_2(qt) - x_1(qt)| + |r|\, |x_2(t-1) - x_1(t-1)| +$$

$$+ |h+ar| \int 2te^{a(t-s)} |x_2(s-1) - x_1(s-1)| ds +$$

$$+ \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \int\limits_2^t e^{a(t-s)}\, |x_2(qs) - x_1(qs)|\, ds \leq$$

$$\leq \left|\frac{c}{q}\right| K_1\, e^{aq^2 t} + |r| K_1\, e^{aq(t-1)} + |h+ar| \int\limits_2^t e^{a(t-s)} K_1 e^{aq(s-1)} ds +$$

$$+ \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \int\limits_2^t e^{a(t-s)} K_1 e^{aq^2 s} ds \leq$$

$$\leq \left|\frac{c}{q}\right| K_1\, e^{aq^2 t} + |r| K_1\, e^{-aq}\, e^{aqt} + |h+ar| K_1\, e^{-aq} \frac{1}{a(q-1)}\, e^{aqt} +$$

$$+ \left|\frac{bq+ac}{q}\right| K_1\, \frac{1}{a(q^2-1)}\, e^{aq^2 t} \leq$$

$$\leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + |r|e^{-aq} + |h+ar|e^{-aq}\frac{1}{a(q-1)} + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{a(q^2-1)}\right) K_1\, e^{aq^2 t} \stackrel{\text{df}}{=} K_2 e^{aq^2 t}.$$

Продолжая процесс и рассуждая по индукции, получаем

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq K_m e^{aq^m t}, \quad t > 2, \tag{9}$$

где

$$K_m = \left(\left|\frac{c}{q}\right| + |r|e^{-aq^{m-1}} + |h+ar|e^{-aq^{m-1}}\frac{1}{a(q^{m-1}-1)} + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{a(q^m-1)}\right) K_{m-1}, \quad m \geq 2,$$

$$K_1 = \left(\left|\frac{c}{q}\right| + |r|e^{-a} + |h+ar|e^{-a}\sup_{t>2}\left(e^{a(1-q)t}(t-2)\right) + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{a(q-1)}\right) K, \quad K_0 = K.$$

Поскольку

$$\left|\frac{c}{q}\right| + |r| + |h+ar|\frac{1}{|a|} + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{|a|} < 1,$$

непосредственно из (9) следует, что последовательность непрерывных функций $\{x_m(t)\}$ равномерно сходится при $t \in [\min\{1, 2q\}, +\infty)$ к непрерывному решению уравнения (7), которое стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Легко показать, что решение уравнения (7) единственно. Действительно, пусть существует еще одно решение $y(t)$. Тогда в силу условий теоремы очевидное неравенство

$$\sup_{t \geq \min\{1,2q\}} |x(t) - y(t)| \leq \left(\left|\frac{c}{q}\right| + |r| + |h+ar|\,\frac{1}{|a|} + \left|\frac{bq+ac}{q}\right| \frac{1}{|a|}\right) \times$$

$$\times \sup_{t \geq \min\{1,2q\}} |x(t) - y(t)|$$

приводит к противоречию.

Множество $C^1(\min\{1, 2q\}, +\infty)$-решений уравнения (1) является подмножеством множества решений задачи (7) при различных „начальных” функциях $g(t)$ из класса $C[\min\{1, 2q\}, 2]$. Следовательно, решения уравнения (1) стремятся к нулю, когда $t \to +\infty$.

Далее, так как величина множителя в изложенных выше рассуждениях зависит лишь от величины $\sup\limits_{t\in[\min\{1,2q\},2]}|g(t)|$, имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения.

Теорема доказана.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.
2. *De Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. Math. — 1953. — **15**. — P. 449–464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. — 1971. — **243**. — P. 249–254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 325 с.
5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1592–1601.
6. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 1. — С. 48–52.
7. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. — 267 p.

Получено 21.11.2005