УДК 517.956.4

БИФУРКАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Е. П. Белан

Таврич. нац. ун-т
Украина, 95007, Симферополь, ул. Ялтинская, 4

О. Б. Лыкова

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We investigate the Andronov – Hopf bifurcation of creation of a periodic solution from a spatially homogeneous stationary solution of the Neumann problem on a disk for a parabolic equation with a transformation of spatial variables in the case where the transformation is a composition of a rotation at a constant angle and a radial contraction. Under general assumptions we prove the existence of a rotating structure, find conditions for its orbital stability and construct its asymptotic form.

Досліджено біфуркацію Андронова – Хопфа народження періодичного розв'язку із просторово-однорідного стаціонарного розв'язку задачі Неймана на крузі для параболічного рівняння з перетворенням просторових змінних у випадку, коли це перетворення є композицією перетворень повороту на сталий кут і радіального стискання. При загальних припущеннях доведено теорему існування обертаючої структури, отримано умови її орбітальної стійкості та побудовано її асимптотичну форму.

Введение. Наблюдаемый в последнее время интерес к нелинейным оптическим системам с пространственными преобразованиями в двумерной обратной связи [1] вызван использованием этих систем в задачах оптической обработки информации. Богатый спектр локальных и нелокальных преобразований позволяет генерировать и визуально наблюдать процессы самоорганизации: пульсирующие волны, диссипативные структуры, ведущие центры, оптическую турбулентность. Такие структуры можно использовать для кодирования и хранения информации.

Возникновение световых структур в оптических системах с нелокальной обратной связью является следствием потери устойчивости некоторого пространственно-однородного светового режима в результате внесения возмущений в условия протекания процесса. Математической моделью этих систем является квазилинейное параболическое уравнение с преобразованием пространственных переменных [1]. Бифуркации Андронова – Хопфа указанного уравнения для круга и преобразованиям поворота на постоянный угол посвящены работы [2 – 4]. Бифуркационные периодические решения для произвольной области и общего невырожденного гладкого преобразования построены в работах [5 – 7]. Метод центральных многообразий использовался в работе [8] для исследования бифуркации рождения вращающихся структур в случае, когда преобразование круга является произведением радиального сжатия и поворота на постоянный угол. В настоящей работе для исследования этого случая развивается метод построения приближенных периодических по t решений, в котором одночастотный метод [9 – 11] используется в сочетании с формализмом построения центральных многообразий для систем, инвариантных относительно группы вращений окружности [12–16]. Следуя работам [17–21], указываются условия, при которых из существования приближенных периодических решений вытекает существование периодического решения. На этом пути получены результаты более общие, чем в работе авторов [8].

Статья состоит из четырех пунктов. В п. 1 решена задача о выделении пространственно однородной ветви стационарных решений исходной задачи, спектр устойчивости которой пересекает мнимую ось при некотором значении параметра. Второй пункт посвящен построению приближенных периодических решений, бифурцирующих из стационарной точки, — решений типа вращающихся структур. Теорема о существовании и асимптотической форме вращающейся структуры сформулирована и доказана в п. 3. В четвертом пункте доказана теорема об экспоненциальной орбитальной устойчивости вращающейся структуры.

1. Постановка задачи. На единичном круге S с центром в начале координат рассмотрим уравнение [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial S} = 0. \tag{1}$$

Здесь u — фаза световой волны, Δ — двумерный оператор Лапласа, $D > 0$ — эффективный коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \leq 1$ — видность (контрастность) интерференционной картины, $K > 0$ — коэффициент, пропорциональный интенсивности светового потока, $Qu(t, r, \theta) = u(t, \kappa r, \theta + h)$, где $0 < \kappa < 1$, $0 < h < \pi$, (r, θ) — полярные координаты на S, ν — единичная внутрення нормаль к границе S.

Пусть $H = L_2(S)$ — гильбертово пространство измеримых на S функций со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_S uv\,dx$$

и соответствующей нормой $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$; $H^l(S)$ — пространство Соболева измеримых на S функций со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_l = \frac{1}{\pi}\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant l}\int\limits_S \partial^\alpha u(x)\partial^\alpha v(x)\,dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, и соответствующей нормой $\|u\|_l = \langle u, u\rangle_l^{1/2}$. Обозначим $H^l = H^l(S) \cap \{\partial u/\partial\nu\big|_{\partial S} = 0\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Пространство H^l является пополнением пространства бесконечно дифференцируемых на S функций, удовлетворяющих условию $\partial u/\partial\nu\big|_{\partial S} = 0$, по норме $H^l(S)$.

Задаче (1) соответствует непрерывная полугруппа $\{S_t\}$, действующая в пространстве H [7–8].

Обозначим через $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ группу вращений окружности. Пусть $u(t, r, \theta)$ — решение задачи (1). Легко увидеть, что решением этой задачи является функция $u(t, r, \theta + \alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Следовательно, задача (1) S^1-эквивариантна.

В данной работе рассматриваются вопросы о существовании, асимптотической форме и устойчивости периодического решения задачи (1), бифурцирующего из пространственно-однородного состояния равновесия, т. е. решения уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{2}$$

Напомним, что при исследовании бифуркации рождения цикла интерес представляют и потеря устойчивости стационарными решениями, и приближенные формулы для рождающихся периодических решений малой амплитуды [22].

Согласно [23, 20] с ростом K количество сосуществующих корней этого уравнения неограниченно увеличивается, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и умирают старые. В связи с этим зафиксируем какую-нибудь непрерывную ветвь решений

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0 \tag{3}$$

уравнения (2), которая определена только на конечном промежутке изменения параметра K. Линеаризованную на состоянии равновесия (3) задачу (1) представим в виде

$$\dot{u} + \mathfrak{L}(K)u = 0, \tag{4}$$

где линейный оператор $\mathfrak{L}(K) : H \to H$ с областью определения H^2 задан формулой

$$\mathfrak{L}(K)v = -D\Delta v + v + \Lambda(K)Qv, \quad \Lambda(K) = \gamma \sin w(K). \tag{5}$$

Перейдем теперь к выбору бифуркационного значения параметра K. Решение этой задачи приводит, разумеется, к исследованию спектра оператора $\mathfrak{L}(K) : H \to H$. В этой связи отметим, что согласно [6] (лемма 3.1) оператор $\mathfrak{L}(K)$ имеет компактную резольвенту и, следовательно, спектр этого оператора дискретный. Воспользуемся методом разделения переменных для анализа спектра оператора $\mathfrak{L}(K)$. С этой целью рассмотрим гильбертово пространство $L_2([0,1], r)$ комплекснозначных измеримых на $[0,1]$ функций со скалярным произведением

$$\ll f, g \gg = \int\limits_0^1 r f(r)\overline{g}(r)\,dr.$$

Определим теперь линейный оператор $\mathfrak{A}_k(K)$, $k \in \mathbb{Z}$, равенством

$$\mathfrak{A}_k f = -D\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{df}{dr}\right) - \frac{k^2}{r^2}\,f\right] + f + \exp{(ikh)}\Lambda(K)\widehat{Q}f,$$

где $\widehat{Q}f(r) = f(\kappa r)$, и областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_k(K)) = \{f \in L_2([0,1], r) : \mathfrak{A}_k(K)f \in$ $\in L_2([0,1], r),\ f'(1) = 0\}$. Ясно, что $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_k(K))$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}$ и K из указанного выше промежутка. Поэтому обозначим $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_k(K)) = \mathfrak{D}$. Очевидно, что любая собственная функция оператора $\mathfrak{L}(K)$ представима в виде $\exp{(is\theta)}\Psi_s(K)$, где $s \in \mathbb{Z}$, а $\Psi_s(K)$ — собственная функция оператора $\mathfrak{A}_s(K)$.

Линейный оператор $\widehat{Q} : L_2([0,1], r) \to L_2([0,1], r)$ является, очевидно, ограниченным, причем $\|\widehat{Q}\| = \kappa^{-1}$. Сопряженный оператор $\widehat{Q}^* : L_2([0,1], r) \to L_2([0,1], r)$ определяется формулой

$$\widehat{Q}^* f(r) = \begin{cases} \kappa^{-2} f(\kappa^{-1} r), & 0 \le r \le \kappa, \\ 0, & \kappa < r \le 1. \end{cases}$$

Оператор $\mathfrak{A}_k^*(K)$, сопряженный оператору $\mathfrak{A}_k(K)$ и определенный равенством

$$\mathfrak{A}_k^*(K) f = -D \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - \frac{k^2}{r^2} f \right] + f + \exp(-ikh) \Lambda(K) \widehat{Q}^* f,$$

имеет область определения $\mathfrak{D}$.

Согласно [6] (лемма 3.2) спектр оператора $\mathfrak{L}(K)$ удовлетворяет условию $\sigma(\mathfrak{L}(K)) \subset$ $\subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \ge 1 - \kappa^{-1} |\Lambda(K)|\}$. Следовательно, при $|\Lambda(K)| < \kappa$ нулевое решение уравнения (4) экспоненциально устойчиво. Поэтому рассмотрим лишь те значения K, для которых $|\Lambda(K)| > \kappa$. Если $\Lambda(K) < -1$, то нулевое решение уравнения, очевидно, неустойчиво. Таким образом, интерес представляют значения K, для которых выполнено одно из условий: $-1 < \Lambda(K) < -\kappa$, $\kappa < \Lambda(K) < 1$, $\Lambda(K) > 1$. Далее предполагаем, что $\Lambda(K) > 1$. Проблема реализуемости этого условия исследована в работах [23, 20]. Условия же $-1 < \Lambda(K) < -\kappa$, $\kappa < \Lambda(K) < 1$ рассматривать здесь не будем (они заслуживают отдельного изучения).

Бифуркационное значения $\widehat{K}$ найдем из следующего условия (см. [13, 17, 6]).

Условие 1. *Существуют* $\widehat{K} > 0$, *целое* m, *вещественное* $\omega_0 \neq 0$, *функция* $J \in \mathfrak{D}$ *такие, что*

$$\mathfrak{L}(\widehat{K}) \exp(im\theta) J = -i\omega_0 \exp(im\theta) J. \tag{6}$$

Предположим, что $-i\omega_0$ *— простое собственное значение оператора* $\mathfrak{A}_m(\widehat{K})$; $-ni\omega_0 \overline{\in}$ $\overline{\in}\, \sigma(\mathfrak{A}_m(\widehat{K}))$, $n = 0, \pm 2, \ldots$.

В силу условия 1 существуют $\varepsilon_0 > 0$, функции $\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\widehat{K} - \varepsilon_0, \widehat{K} + \varepsilon_0)$ и $\tilde{J} \in \mathbb{C}^\infty((\widehat{K} -$ $-\varepsilon_0, \widehat{K} + \varepsilon_0), \mathfrak{D})$ такие, что для $K \in (\widehat{K} - \varepsilon_0, \widehat{K} + \varepsilon_0)$

$$\mathfrak{L}(K) \exp(im\,\theta) \tilde{J}(K) = -\lambda(K) \exp(im\theta) \tilde{J}(K), \quad \lambda(\widehat{K}) = i\omega_0, \quad \tilde{J}(\widehat{K}) = J. \tag{7}$$

Справедливо равенство [8]

$$\lambda(K) = i\omega_0 + \gamma(K \sin w(K) - \widehat{K} \sin \widehat{w}) \ll J^*, \widehat{Q}\, J \gg \exp(imh) + O(|K - \widehat{K}|^2). \tag{8}$$

Здесь $\widehat{w} = w(\widehat{K})$, J^* — собственная функция оператора $\mathfrak{A}_m^*(\widehat{K})$, соответствующая собственному значению $i\omega_0$ и нормированная условием $\ll J^*, J \gg = 1$. Очевидно,

$$\operatorname{Re} \lambda'(\widehat{K}) = \gamma(\sin w(\widehat{K}) + \widehat{K} \cos w'(\widehat{K})) \operatorname{Re}(\ll J^*, \widehat{Q} J \gg \exp(imh)). \tag{9}$$

Несложно указать условия, по крайней мере для малых $1 - \kappa$, при которых выполняется следующее условие.

Условие 2. $\operatorname{Re}\lambda'(\widehat{K}) > 0$.

Перейдем теперь от параметра K к параметру μ согласно равенству $K = \widehat{K} + \mu$. С целью сокращения обозначений положим $\mathfrak{L}(K+\mu) = \mathfrak{L}(\mu)$, $w(\widehat{K}+\mu) = w(\mu)$, $\lambda(\widehat{K} + +\mu) = \lambda(\mu)$. Выполним в уравнении (1) преобразование $u = w(\mu) + v$. В результате в пространстве H получим уравнение

$$\dot{v} + \mathfrak{L}(\mu)v = \mathfrak{R}(Qv, \mu), \tag{10}$$

где $\mathfrak{R}(v,\mu) = K\gamma[\cos(w(\mu)+v) - \cos w(\mu) + v\sin w(\mu)]$.

2. Приближенные вращающиеся структуры. В соответствии с одночастотным методом [9–11] и формализмом построения центральных многообразий S^1-эквивариантных уравнений [8] будем строить решения уравнения (10) в виде

$$v = z\exp(im\theta)J + \overline{z}\exp(-im\theta)\overline{J} + \sigma(z\exp(im\theta), \overline{z}\exp(-im\theta), r, \mu), \tag{11}$$

где z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + c_1(\mu)z^2\overline{z} + \ldots. \tag{12}$$

Подставим (11), (12) в уравнение (10) и в полученном равенстве выполним замену $z\exp(im\theta) \to z$, $\overline{z}\exp(-im\theta) \to \overline{z}$. Затем представим $\sigma = \sigma(z,\overline{z},r,\mu)$ в виде $\sigma = \sigma_2 + +\sigma_3 + \ldots$, где σ_k, $k = 2,3,\ldots,$ — форма порядка k относительно $z, \overline{z}$. В результате относительно коэффициентов квадратичной формы

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\,\sigma_{20}z^2 + \sigma_{11}z\overline{z} + \frac{1}{2}\,\sigma_{02}\overline{z}^2, \tag{13}$$

положив $\mu = 0$, получим уравнения

$$(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})\sigma_{20} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\exp(2imh)\widehat{Q}J^2, \quad \mathfrak{A}_0\sigma_{11} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\widehat{Q}(J\overline{J}). \tag{14}$$

Согласно условию 1 эти уравнения однозначно разрешимы:

$$\sigma_{20} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\exp(2imh)(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}\,J^2, \quad \sigma_{11} = -\widehat{K}\,\gamma\,\cos\,\widehat{w}\,\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J}). \tag{15}$$

Очевидно, $\sigma_{02} = \overline{\sigma}_{20}$. Полагая теперь

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}\,\sigma_{30}z^3 + \frac{1}{2!}\,\sigma_{21}z^2\overline{z} + \frac{1}{2!}\,\sigma_{12}z\overline{z}^2 + \frac{1}{3}\,\sigma_{03}\overline{z}^3$$

и рассуждая, как и выше, относительно коэффициентов формы σ_3 получаем линейные неоднородные уравнения. Согласно условию 1 уравнения относительно $\sigma_{30}0$, σ_{03} однозначно разрешимы. Рассмотрим теперь уравнение относительно σ_{21} :

$$(i\omega_0 + \mathfrak{A}_m)\sigma_{21} + c_1(0)J = -\frac{1}{2}\,\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\exp(imh)\widehat{Q}(2J\sigma_{11} + \overline{J}\sigma_{20}) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\widehat{K}\gamma\sin\widehat{w}\exp(imh)\widehat{Q}(J^2\overline{J}). \tag{16}$$

Из условия 1 следует, что линейное одномерное пространство $\mathrm{Span}\{J\}$ является пространством решений линейного однородного уравнения, соответствующего линейному неоднородному уравнению (16). Следовательно, для разрешимости уравнения (16) необходимо и достаточно, чтобы $\ll J^*, g \gg = 0$, где g — его неоднородность. Учитывая равенство (15), отсюда для $c_1 = c_1(0)$ находим

$$c_1 = \frac{1}{2}\exp(imh) \ll J^*, \widehat{\Lambda}\widehat{Q}(\overline{J}\,J^2) + (\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2(2\widehat{Q}\,J\mathfrak{A}_0{}^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J}) + \\ + \exp(2imh)\widehat{Q}(\overline{J}(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}J^2)) \gg . \tag{17}$$

Затем из уравнения (16) находим σ_{21} в том же виде, что и его неоднородность. Ясно, что при указанном выборе c_1 уравнение относительно σ_{21} имеет решение $\sigma_{21} = \overline{\sigma}_{12}$. Предположим далее, что выполнено следующее условие.

Условие 3. $\mathrm{Re}\, c_1 < 0$.

Отметим, что в работе [24] получены условия, при которых это неравенство имеет место для тонкого кругового кольца. В сингулярном случае ($D \ll 1$) условие 1 выполняется [23, 20, 21].

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + c_1 z^2\overline{z},$$

которое является нормальной формой бифуркации Андронова – Хопфа. В силу условий 2, 3 при $\mu < 0$ нулевое решение этого уравнения является устойчивым. При $\mu > 0$ рассматриваемое уравнение имеет бифурцирующее из нуля периодическое решение, которое с точностью порядка $\mu^{3/2}$ удовлетворяет равенству

$$z = \mu_1^{1/2}\exp(i\widehat{\omega}(\mu)t), \\ \mu_1 = \mu\mathrm{Re}\,\lambda'(0)(-\mathrm{Re}\,c_1)^{-1}, \quad \widehat{\omega}(\mu) = \mathrm{Im}\,\lambda(\mu) + \mu_1\mathrm{Im}\,c_1\,\mathrm{Re}\,\lambda'(0). \tag{18}$$

В силу равенств (11), (13), (15), (18) уравнение (10) имеет приближенное по невязке порядка $\mu^{3/2}$ (в метрике H) периодическое по t решение $\widehat{v} = \widehat{v}(\eta, r, \mu)$, $\eta = \widehat{\omega}(\mu)t + m\theta$, где

$$\widehat{v} = 2\mu_1^{1/2}\mathrm{Re}\,\exp(i\eta)J + \\ + \mu_1\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})\left[\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J}) + \mathrm{Re}\exp(2i(\eta + mh))(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}J^2\right]. \tag{19}$$

Следовательно, решение уравнения (10) типа вращающейся структуры следует искать в виде

$$v = \sum_{s=1}^{\infty}\mu^{s/2}v_s(\eta, r), \quad \eta = \omega(\mu)t + m\theta, \quad \omega(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty}\mu^s\omega_s. \tag{20}$$

Ясно, что коэффициенты разложений функций $v(\mu) \in H^2, \omega(\mu) \in \mathbb{R}$ должны быть определены из уравнения

$$\omega \frac{\partial v}{\partial \eta} - D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right] + v + \Lambda(\mu)Q_m v = \mathfrak{R}(Q_m v, \mu), \tag{21}$$

где $Q_m v(\eta, r) = v(\eta + mh, \kappa r)$.

3. Существование вращающейся структуры. Описанный выше формализм построения периодической структуры уравнения (10) обосновывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1–3. Тогда существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что для* $0 < \mu < \mu_0$ *уравнение (10) имеет периодическое по* t *решение* $v^* = v^*(\eta, r, \mu)$, $\eta = \omega(\mu)t + m\theta$. *Имеет место равенство*

$$v^*(\eta, r, \mu) = \widehat{v}(\eta, r, \mu) + O(\mu^{3/2}), \quad \omega(\mu) = \widehat{\omega}(\mu) + O(\mu^2),$$

где $\widehat{\omega}(\mu), \widehat{v}(\mu)$ *определены равенствами (18) и (19) соответственно.*

Доказательство. В уравнении (10) положим $v = v(\eta, r, \mu) = v(\omega(\mu)t + m\theta, r, \mu)$. В результате относительно v в пространстве H^2 получим уравнение (21), которое в силу изложенного имеет при $\omega(\mu) = \widehat{\omega}(\mu)$ приближенное по невязке порядка $\mu^{3/2}$ решение $\widehat{v}(\eta, r, \mu)$. Преобразование $v = \widehat{v} + \xi$ приводит уравнение (21) к виду

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = F(\xi, \eta, r, \mu, \delta), \tag{22}$$

где

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = \widehat{\omega}\frac{\partial \xi}{\partial \eta} - D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2}\right] + \xi + \Lambda(\mu)Q_m\xi$$

$$+ \left(\mu_1^{1/2} g_1 + \mu_1 g_2 + \mu_1^{3/2} g_3\right) Q_m\xi, \tag{23}$$

функции g_1, g_2 удовлетворяют равенствам

$$g_1 = \widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp(i\eta_1)\widehat{Q}J + \text{к. с.}), \quad \eta_1 = \eta + mh, \tag{24}$$

$$g_2 = -\frac{1}{2}\widehat{\Lambda}(\exp(i\eta_1)\widehat{Q}J + \text{к. с.})^2 -$$

$$- (\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2\left[\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J}) + \operatorname{Re}\exp(i2\eta_1)(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}J^2\right], \tag{25}$$

а функция $g_3 = g_3(\eta, r, \mu) \in H^2(S)$ является аналитической функцией аргумента $\mu^{1/2}$ при $0 < \mu < \mu_0$. Функцию F в уравнении (22) представим в виде

$$F(\xi, \eta, r, \mu, \delta) = \delta\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \eta}\right) + f_0(\eta, r, \mu) + f_2(\xi, \eta, r, \mu), \quad \delta = \widehat{\omega} - \omega. \tag{26}$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\|f_0\| < d\mu^{3/2}, \tag{27}$$

где d не зависит от μ и его точное значение несущественно. Функция $f_2(\cdot, \eta, r, \mu) : H^2 \to \to H$, $f_2(0, \eta, r, \mu) = 0$, $\partial_\xi f_2(0, \eta, r, \mu) = 0$, удовлетворяет условию

$$\|f_2(\xi_1, \eta, r, \mu) - f_2(\xi_2, \eta, r, \mu)\| < d \max(\|\xi_1\|_2, \|\xi_2\|_2)\|\xi_1 - \|\xi_2\|. \tag{28}$$

Здесь и далее символ d используется в том же смысле, что и в неравенстве (27).

При исследовании вопроса о разрешимости относительно $\delta \in \mathbb{R}$, $\xi \in H^2$ уравнения (22) используется спектральная задача

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in H. \tag{29}$$

Рассмотрим соответствующую ей невозмущенную задачу

$$\mathfrak{B}(0)\xi = \omega_0 \frac{\partial \xi}{\partial \eta} - D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2}\right] + \xi + \widehat{\Lambda} Q_m \xi = \lambda\xi, \quad \xi \in H.$$

В силу условия 1 ядро оператора $\mathfrak{B}(0) : H \to H$ является двумерным, причем $\operatorname{Ker}\mathfrak{B}(0) = = \operatorname{Span}\{\operatorname{Re}\exp(i\eta)J, \operatorname{Im}\exp(i\eta)J\}$. Таким образом, нуль является двукратным собственным значением оператора $\mathfrak{B}(0)$. Снова используя условие 1, приходим к заключению, что остальные собственные значения оператора $\mathfrak{B}(0)$ отделены от нуля. Поэтому ограничимся анализом задачи (29) для значений λ из окрестности нуля. Поскольку с точностью порядка μ справедливо равенство

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi^0 = 0, \tag{30}$$

где

$$\xi^0 = \operatorname{Im}\left(\exp(i\eta)J + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}\exp(2i(\eta + mh))(2i\omega_1 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}(J^2)\right), \tag{31}$$

для анализа задачи (29) при малых λ применим следующий метод. Положим

$$\xi = \beta_1 \exp(i\eta)J + \beta_2 \exp(-i\eta)\overline{J} + \mu_1^{1/2}\xi_1 + \mu_1\xi_2 + \ldots, \tag{32}$$

$$\lambda = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_1^2 + \ldots, \tag{33}$$

подставим эти равенства в (29) и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\mu_1^{1/2}$. В результате относительно $\xi_1, \xi_2, \ldots$ получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений. Легко убедиться в том, что решением уравнения

$$\mathfrak{B}(0)\xi_1 = (\beta_1 \exp(i\eta)\widehat{Q}J + \beta_2 \exp(-i\eta)\widehat{Q}\overline{J})g_1,$$

где g_1 удовлетворяет равенству (24), является функция

$$\xi_1 = \widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\beta_1 \exp(2i(\eta+mh))(2i\omega_0+\mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}(J^2)+$$

$$+\beta_2 \exp(-2i(\eta+mh))(-2i\omega_0+\overline{\mathfrak{A}}_{2m})^{-1}\widehat{Q}(\overline{J}^2)+(\beta_1+\beta_2)\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J})). \qquad (34)$$

Рассмотрим теперь уравнение относительно ξ_2 :

$$\mathfrak{B}(0)\xi_2 = (\beta_1\exp(i\eta_1)\widehat{Q}J+\beta_2\exp(-i\eta_1)\widehat{Q\overline{J}})g_2-(Q_m\xi_1)g_1-i\operatorname{Im}c_1(\beta_1\exp(i\eta)J-$$

$$-\beta_2\exp(-i\eta)\overline{J})-(\beta_1\exp(i\eta_1)\widehat{Q}J+\beta_2\exp(-i\eta_1)\widehat{Q}\,\overline{J})\left(\operatorname{Re}\lambda'(0)(\operatorname{Re}c_1)^{-1}\right)^{-1}+$$

$$+\lambda_1(\beta_1\exp(i\eta)J+\beta_2\exp(-i\eta)\overline{J}),$$

где g_2 удовлетворяет равенству (25). Из условия разрешимости этого уравнения следует, что $(\beta_1,\beta_2)^T$ — собственный вектор матрицы

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 \\ \overline{c}_1 & \overline{c}_1 \end{pmatrix},$$

а λ_1 — соответствующее собственное значение. Собственным векторам $(1,-1)^T$, $(c_1,\overline{c}_1)^T$ этой матрицы соответствуют собственные значения 0 и $2\operatorname{Re}c_1$ соответственно. Соответствующий анализ спектральной задачи

$$\mathfrak{B}^*(\mu)\zeta = \lambda\zeta, \quad \zeta\in H,$$

для малых λ приводит к матрице M^*. Отсюда, в частности, следует, что с точностью порядка $\mu^{1/2}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{B}^*(\mu)\zeta_0 = 0,$$

где $\zeta_0 = \operatorname{Im}(c_1\exp(-i\eta)J^*)$.

Введем теперь оператор $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)$ согласно формуле

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi = \mathfrak{B}(\mu)\left(\xi-\frac{\langle\xi^0,\xi\rangle}{\|\xi^0\|^2}\xi^0\right) \qquad (35)$$

и рассмотрим спектральную задачу

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi = \lambda\xi, \quad \xi\in H.$$

По определению $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi^0 = 0$. В силу приближенного равенства (30) спектральные свойства оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)$ при малых μ аналогичны таковым для оператора $\mathfrak{B}(\mu)$. Следовательно, существует функция $\xi^1\in H^2$ такая, что

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi^1 = (-2\mu_1\operatorname{Re}c_1+O(\mu^2))\xi^1.$$

При этом с точностью порядка μ справедливо равенство

$$\xi^1 = \mathrm{Re}\,(c_1(\exp{(i\eta)}J + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}(\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J}) + \exp{(2i(\eta+mh))}(2i\omega_1 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}(J^2)).$$

Существует также функция $\zeta^0 \in H^2$, удовлетворяющая равенству

$$\zeta^0 = \mathrm{Re}\, c_1^{-1}\mathrm{Im}\,(c_1 \exp{(-i\eta)}J^*) + O(\mu^2)$$

и такая, что $\widehat{\mathfrak{B}}^*(\mu)\zeta^0 = 0, \quad \langle \zeta^0, \xi^0\rangle = 1.$

Обозначим $M_1 = \mathrm{Span}\{\xi^1\}$. Пусть H разложено по спектральному множеству $\{0, -2\mu\mathrm{Re}\, c_1 + O(\mu^2)\}$ оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)$, т. е.

$$H = \mathrm{Ker}\,(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1 \oplus M_2.$$

Очевидно, уравнение

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi = g, \quad g \in H, \tag{36}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда $\langle\zeta^0, g\rangle = 0$. В этом случае существует единственное решение $\mathfrak{K}g \in H^2$ этого уравнения такое, что $\langle \mathfrak{K}g, \xi^0\rangle = 0$. Ясно, что имеют место следующие оценки:

$$\|\mathfrak{K}g\|_2 < d\|g\|, \quad g \in M_2, \tag{37}$$

$$\|\mathfrak{K}g\|_2 < \frac{d}{\mu}\|g\|_H, \quad g \in M_1. \tag{38}$$

Пусть $\widehat{P}$ — проектор в пространстве H на $\mathrm{Ker}\,(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1$. Анализ построения функции $\hat{v}$ приводит к неравенству

$$\|\widehat{P}f_0(\cdot,\mu)\| < d\mu^{5/2}. \tag{39}$$

Рассмотрим уравнение (22). Заменим в нем $\mathfrak{B}$ на $\widehat{\mathfrak{B}}$. Эту замену учтем и в правой части, обозначив ее $\widehat{F}$. Отметим, что согласно проведенному выше анализу

$$\|\mathfrak{B}(\mu)\xi^0\| < d\mu, \quad \|\widehat{P}\mathfrak{B}(\mu)\xi^0\| < d\mu^{3/2}. \tag{40}$$

Рассмотрим в пространстве H^2 уравнение

$$\xi - \mathfrak{K}(\widehat{F}(\xi,\mu,\delta) - \langle\zeta^0, \widehat{F}(\xi,\mu,\delta)\rangle\xi^0) = 0. \tag{41}$$

Теперь видим, что примененный к этому уравнению метод последовательных приближений с нулевой начальной точкой приводит к сходящейся в H^2 последовательности равномерно по μ, δ в области $0 \le \mu \le \mu_0$, $|\delta| \le d\mu^{3/2}$. Предел этой последовательности $\xi^*(\mu,\delta)$ является решением уравнения (41) и удовлетворяет оценке

$$\|\xi^*(\mu,\delta)\|_2 < d\mu^{3/2}. \tag{42}$$

Функция $\xi^*(\mu,\delta)$ непрерывно дифференцируема в области $0 \le \mu \le \mu_0$, $|\delta| \le d\mu^{3/2}$. Согласно (28) существует единственное решение уравнения (41), удовлетворяющее и неравенству (42), и условию $\langle \zeta^0, \xi^* \rangle = 0$. По построению $\xi^*(\mu,\delta)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = F(\xi,\eta,r,\mu,\delta) - D(\mu,\delta),$$

где $D(\mu,\delta) = \langle \zeta^0, \widehat{F}(\xi^*,\eta,r,\mu,\delta)\rangle$.

Итак, вопрос о разрешимости уравнения (21) сводится к вопросу о разрешимости относительно δ уравнения

$$D(\mu,\delta) = 0.$$

Это уравнение в силу равенств (19), (26), (31) неравенств (27), (39), (40), (42) допускает представление в виде

$$D(\mu,\delta) = \mu_1^{1/2}(\delta + \mu^{3/2} l(\mu^{1/2},\delta)) = 0, \tag{43}$$

где $l(\mu^{1/2},\delta)$ — непрерывно дифференцируемая функция в области $0 < \mu < \mu_0$, $|\delta| < d\mu_0^{3/2}$. Отсюда в силу теоремы о неявной функции следует существование непрерывно дифференцируемого относительно $\mu^{1/2}$ при $0 < \mu < \mu_0$ решения $\delta(\mu)$ уравнения (43), которое удовлетворяет неравенству

$$|\delta(\mu)| < d\mu^{3/2}.$$

Следовательно, $\xi^*(\mu,\delta(\mu))$ — решение уравнения (21) при $\omega(\mu) = \widehat{\omega}(\mu) + \delta(\mu)$ и $0 < \mu < \mu_0$.

Теорема доказана.

4. Устойчивость вращающейся структуры. Вопрос об устойчивости построенного выше решения уравнения (10) рассмотрим при следующем условии.

Условие 4. *Пусть:*

1) существует одна и только одна пара простых собственных значений $-\lambda(0)$, $-\overline{\lambda}(0)$ *оператора* $\mathfrak{L}(0)$ *такая, что* $\lambda(0) = i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$;

2) $\sigma(\mathfrak{L}(0))/\{-\lambda(0), -\overline{\lambda}(0)\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.

С помощью принципа сведения [25, 26] вопрос об устойчивости вращающейся волны v^* уравнения (10) при выполнении условий 1, 3, 4 был исследован в работе авторов [8]. Ниже для исследования на устойчивость решения v^* используется метод, основанный на анализе линеаризованного в окрестности v^* уравнения (10) [25] (теорема 8.2.3).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1, 3, 4. Тогда периодическое по* t *решение* v^* *уравнения (10) является экспоненциально орбитально устойчивым.*

Доказательство. Исследуем на устойчивость в пространстве H уравнение

$$\dot{\xi} + \mathfrak{L}(\mu)\xi = \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Qv^*,\mu)Q\xi, \tag{44}$$

полученное линеаризацией уравнения (10) в окрестности решения v^*. Перейдем с этой целью от этого уравнения к его галеркинской аппроксимации. Предположим, что для каждого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ существует полная ортонормированная в $L_2([0,1], r)$ система собственных функций $J_{k,s}$, $s = 1, 2, \ldots$, оператора $\mathfrak{A}_k(0)$, упорядоченная по возрастанию вещественных частей соответствующих им собственных значений. Итак, пусть

$$\mathfrak{A}_k(0) J_{k,s} = -\lambda_{k,s} J_{k,s}, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что система функций $\{\exp(ik\theta) J_{k,s}(r),\ k \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots\}$ образует в пространстве H полную ортонормированную систему. Пусть $J^*_{k,s}$, $s = 1, 2, \ldots$, — система собственных функций оператора $\mathfrak{A}^*_k(0)$ такая, что $\ll J^*_{k,s}, J_{k,l} \gg = \delta_{s,l}$, где $\delta_{s,l}$ — символ Кронекера. Если $\kappa = 1$, то система функций с указанными свойствами, очевидно, существует. Введем в пространстве H ортопроектор $\tilde{P} : H \to H$:

$$\tilde{P}\xi = \sum_{-k_0}^{k_0} \sum_{s=1}^{s_0} P_{k,s}\xi, \quad P_{k,s}\xi = \xi_{k,s} \exp(ik\theta) J_{k,s}, \quad \xi_{k,s} = \langle \exp(ik\theta) J^*_{k,s}, \xi \rangle,$$

где k_0, s_0 будут выбраны ниже. Положим в уравнении (44) $\xi = \tilde{P}\xi + (I - \tilde{P})\xi$, где I — единичный оператор. В полученной относительно $\tilde{P}\xi$, $(I - \tilde{P})\xi$ системе уравнений положим $(I - \tilde{P})\xi = 0$. В результате получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{\xi}_{k,s} = \lambda_{k,s}\xi_{k,s} + P_{k,s}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Qv^*, \mu) \sum_{-k_0}^{k_0} \sum_{s=0}^{s_0} Q(P_{k,s}\xi), \quad k = 0, 1, \ldots, k_0,\ s = 0, 1, \ldots, s_0. \tag{45}$$

Здесь $\lambda_{k,s} = \lambda_{k,s}(\mu)$, $\xi_{-k,s} = \overline{\xi}_{k,s}$, $k = 0, 1, \ldots, k_0$. Согласно условию 4 критическими переменными в этой системе являются только переменные $\xi_{m,1}$, $\overline{\xi}_{m,1}$. Будем считать, что $J_{m,1} = J$, где функция J удовлетворяет равенству (6). Используя (19) и равенство

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(u, 0)}{\partial u} = \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg}(\widehat{w}) u - \frac{1}{2}\widehat{\Lambda} u^2 + o(u^2),$$

убеждаемся, что с точностью до слагаемых, которые не влияют на характер устойчивости системы (45), критическая переменная $\xi_{m,1}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{m,1} = \lambda(\mu)\xi_{m,1} + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w}) \Bigg(\sum_{s=1}^{s_0} \exp(i(\omega t + mh)) \ll J^*, \widehat{Q}(J J_{0,s}) \gg \xi_{0,s} + \\
+ \exp(-i(\omega t - mh)) \ll J^*, \widehat{Q}(\overline{J} J_{2m,s}) \gg \xi_{2m,s} \Bigg) + \\
+ \mu_1 \Bigg((\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w}))^2 \exp(imh) \ll J^*, \widehat{Q}(J \mathfrak{A}_0^{-1} \widehat{Q}(J\overline{J})) \gg \xi_{m,1} + \\
+ \exp(i(2\omega t + mh)) \ll J^*, \widehat{Q}\left(\overline{J}(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}(\widehat{Q}J^2) + \frac{1}{2}\widehat{\Lambda}\widehat{Q}(J^2\overline{J}) \right) \gg \overline{\xi}_{m,1} \Bigg).
\end{aligned} \tag{46}$$

Здесь использовано равенство $\lambda_{m,1}(\mu) = \lambda(\mu)$ и обозначение $\omega = \omega(\mu)$. Рассмотрим теперь уравнения относительно некритических переменных $\xi_{0,s},\ \xi_{2m,s},\ s = 0, 1, \ldots$. Эти переменные удовлетворяют с точностью порядка μ уравнениям

$$\dot{\xi}_{0,s} = \lambda_{0,s}\xi_{0,s} + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})(\exp(i\omega t)\overline{\xi}_{m,1} + \exp(-i\omega t)\xi_{m,1}) \ll J^*_{0,s}, \widehat{Q}(J\overline{J}) \gg, \tag{47}$$

$$\dot{\xi}_{2m,s} = \lambda_{2m,s}\xi_{2m,s} + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})\exp(i(\omega t + 2mh))\xi_{m,1} \ll J^*_{2m,s}, \widehat{Q}(J\overline{J}) \gg . \tag{48}$$

Преобразование

$$\xi_{m,1} = \eta + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})\Bigg(\sum_{s=1}^{s_0}\exp(i(\omega t + mh)) \ll J^*, \widehat{Q}(JJ_{0,s}) \gg (\lambda_{0,s}(0))^{-1}\xi_{0,s} +$$

$$+\ \exp(-i(\omega t - mh)) \ll J^*, \widehat{Q}(\overline{J}J_{2m,s}) \gg (2i\omega_0 + \lambda_{2m,s}(0))^{-1}\xi_{2m,s}\Bigg)$$

в силу уравнений (47), (48) и равенств

$$\ll J^*, \widehat{Q}(\overline{J}(\mathfrak{A}_0)^{-1}(\widehat{Q}(J\overline{J}))) \gg =$$

$$= \sum_{s=1}^{s_0} \ll J^*, \widehat{Q}(JJ_{0,s}) \gg\ll J^*_{0,s}, \widehat{Q}(J\overline{J}) \gg (\lambda_{0,s}(0))^{-1} + r_1(s_0),$$

$$\ll J^*, \widehat{Q}(\overline{J}(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}(J^2)) \gg =$$

$$= \sum_{s=1}^{s_0} \ll J^*, \widehat{Q}(JJ_{2m,s}) \gg\ll J^*_{2m,s}, \widehat{Q}(J^2) \gg (2i\omega_0 + \lambda_{2m,s}(0))^{-1} + r_2(s_0)$$

приводит уравнение (46) с точностью порядка $\mu^{3/2}$ к виду

$$\dot{\eta} = \lambda(\mu)\eta + \mu_1\big((\exp(imh) \ll J^*, -\widehat{\Lambda}\widehat{Q}(J^2\overline{J}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w}))^2\exp(2imh)\widehat{Q}(\overline{J}(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}(J^2) \gg) +$$

$$+ \exp(i(2\omega t + mh)) \ll J^*, \widehat{Q}(J\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J})) \gg -r_1(s_0))\eta +$$

$$+ \Big(\exp(i(2\omega t + mh)) \ll J^*, \frac{1}{2}\widehat{\Lambda}\widehat{Q}(J^2\overline{J}) +$$

$$+ (\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w}))^2\exp(2imh)\widehat{Q}(J\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J})) + \widehat{Q}(\overline{J}\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J^2)) \gg -r_2(s_0)\Big)\overline{\eta}. \tag{49}$$

Уравнение (49), рассматриваемое совместно с соответствующим ему комплексно-сопряженным уравнением, определяет с точностью порядка $\mu^{3/2}$ систему (45) на ее двумерном критическом инвариантном многообразии. Выполним теперь в уравнении (49) преобразование

$$\eta \to \eta \exp\left(-i\omega(\mu)t\right), \; \overline{\eta} \to \overline{\eta} \exp\left(i\omega(\mu)t\right).$$

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, которая членами порядка $\mu^{3/2}$, $\mu r_1(s_0)$, $\mu r_2(s_0)$ отличается от системы с постоянными коэффициентами. Очевидно, что при соответствующем выборе s_0 устойчивость полученной матрицы коэффициентов указанной системы, а следовательно, и устойчивость уравнения (44) определяются матрицей

$$\mu_1 \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}\lambda'(0)(1+i\chi) & -\operatorname{Re}\lambda'(0)(1-i\chi) \\ -\operatorname{Re}\lambda'(0)(1+i\chi) & -\operatorname{Re}\lambda'(0)(1-i\chi) \end{pmatrix},$$

где $\chi = \dfrac{\operatorname{Im} c_1}{\operatorname{Re} c_1}$. Согласно условию 2 отсюда следует, что v^* является экспоненциально орбитально устойчивым решением уравнения (10).

Теорема доказана.

Заключение. В данной работе метод исследования бифурцирующих из стационарного решения периодических решений для нелинейных сред с малой диффузией [18] (см. также [19–21] использован при общих условиях бифуркации Андронова–Хопфа для параболической задачи с преобразованием поворота-сжатия пространственных переменных. Метод опирается на развитую в указанных работах технику построения приближенных бифурцирующих периодических решений. В настоящей статье с этой целью используется одночастотный метод [9–11] в сочетании с формализмом построения центральных многообразий для уравнений, инвариантных относительно группы вращений окружности. Основным результатом работы является теорема 1 о существовании и асимптотической форме вращающейся структуры, рождающейся из стационарного пространственно-однородного решения исходной задачи. Теорема 1 примыкает к результатам [5, 6] по исследованию бифуркации Андронова–Хопфа для общих параболических задач с преобразованным аргументом. Теорема 2 об устойчивости вращающейся структуры была сформулирована и доказана авторами в работе [8]. В приведенном в настоящей статье новом доказательстве использованы подходы, которые были инициированы работой [18] и успешно развиваются для исследования автоволновых процессов в нелинейных средах с малой диффузией [19, 20]. Для исследования орбитальной устойчивости вращающейся структуры применяется принцип сведения в теории устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [26] и метод Галеркина.

Авторы признательны рецензенту за полезные замечания и советы.

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.

2. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Мат. моделирование. — 1993. — **5**, № 4. — С. 106–119.

3. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics / Ed. Rajarshi Roy. (Proc. SPIE-2039). — 1993. — P. 342–351.

4. *Белан Е. П.* Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом // Динамические системы. — 2000. — Вып.16. — С. 160 – 167.

5. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. — 1998. — **12**, № 2. — P. 261 – 278.

6. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 1998. — **34**, № 10. — С. 1394 – 1401.

7. *Белан Е. П.* О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Учен. зап. Таврич. нац. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2002. — № 2. — С. 11 – 23.

8. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравнения. — 2004. — **40**, № 10. — С. 1348 – 1357.

9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1969.

10. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.

11. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. — Киев: Вища шк., 1976.

12. *Ruelle D.* Bifurcations in the presence of a symmetry group // Arch.Ration. Mech. and Anal. — 1973. — **51**, № 2. — P. 136 – 152.

13. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.

14. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Соврем. направления математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. — 1985. — **5**. — С. 5 – 218.

15. *Kuznetzov Y. A.* Elements of applied bifurcation theory. — New York: Springer, 1998.

16. *Белан Е. П.* О бифуркации бегущих волн в сингулярно возмущенной параболической задаче с преобразованным аргументом // Динамические системы. — 2001. — Вып. 17. — С. 179 – 184.

17. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.

18. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. — 1986. — **130**, вып. 4. — С. 488 – 499.

19. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004.

20. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005.

21. *Белан Е. П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. — 2005. — **1**, № 1. — С. 3 – 34.

22. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.

23. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теорет. и мат. физика. — 2004. — **140**, № 1. — С. 14 – 28.

24. *Белан Е. П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравнения. — 2004. — **40**, № 5. — С. 645 – 654.

25. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.

26. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — **28**, № 6. — С. 1297 – 1324.

Получено 16.09.2005