УДК 517.9

КАНОНІЧНА РЕДУКЦІЯ НА КОДОТИЧНИХ СИМПЛЕКТИЧНИХ МНОГОВИДАХ ІЗ ГРУПОВОЮ ДІЄЮ ТА НА АСОЦІЙОВАНИХ ГОЛОВНИХ РОЗШАРУВАННЯХ ІЗ ЗВ'ЯЗНІСТЮ

Я. А. Прикарпатський

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
та AGH Univ. Sci. and Technol.
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Krakow, Poland
e-mail: yarchyk@imath.kiev.ua

We study properties of the canonic reduction method for cotangent symplectic manifolds with a group action. We exhibit a deep inner connection between the reduced symplectic structures with canonic connections on the associated principal fiber bundles.

Досліджуються властивості методу канонічної редукції на кодотичних симплектичних многовидах із груповою дією на них. Показано глибокий внутрішній зв'язок редукованих симплектичних структур із канонічними зв'язностями на асоційованих головних розшаруваннях.

1. Вступ. При дослідженні багатьох динамічних систем на канонічно-симплектичних многовидах, інваріантних відносно дії деякої групи симетрії, часто виникають додаткові структури, які виявляються важливими при їх глибшому аналізі. Зокрема, такою структурою є зв'язність на асоційованому головному розшаруванні, яка дає можливість більш детально вивчити властивості досліджуваної динамічної системи при її редукції на відповідні інваріантні підмноговиди та асоційовані з ними фактор-простори.

Питання, пов'язані з вивченням властивостей редукованих динамічних систем на симплектичних многовидах, були, зокрема, предметом досліджень у роботах [1, 2], в яких зв'язок симплектичної структури на редукованому просторі з наявною зв'язністю на головному розшаруванні був сформульований в явному вигляді. Інші аспекти динамічних систем, пов'язані з властивостями редукованих симплектичних структур, були предметом досліджень в [3, 4], де, зокрема, була описана в явному вигляді редукована симплектична структура в рамках класичної схеми Дірака та наведено ряд застосувань в нелінійній динаміці, в тому числі небесній.

У даному дослідженні редукованих симплектичних структур основним аспектом є аналіз зв'язку асоційованих структур зв'язності на головному розшаруванні та відповідних їм редукцій, а також їх застосування для дослідження тополого-геометричних властивостей динамічних систем із симетріями. Зокрема, ми конструюємо асоційовану форму зв'язності на головному розшаруванні і даємо її опис у термінах інтегральних многовидів гамільтонових динамічних систем на відповідних канонічних симплектичних многовидах, які мають застосування в різних задачах динаміки.

2. Метод канонічної редукції на кодотичних розшаруваннях із симетрією. Розглянемо деякий n-вимірний гладкий многовид M і кодотичне до нього розшарування $T^*(M)$. Оснастимо кодотичний простір $T^*(M)$ канонічною 1-формою Ліувілля $\mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)} \in$

$\in \Lambda^1(T^*(M))$, де

$$\mathrm{pr}_M : T^*(M) \to M$$

— канонічна проекція і, за визначенням,

$$\alpha^{(1)}(u) := \sum_{j=1}^{n} v_j \, du_j, \tag{2.1}$$

де $(u,v) \in T^*(M)$ — відповідні канонічні локальні координати на $T^*(M)$. Отже, будь-яка група дифеоморфізмів многовиду M, піднята природним чином до розшарування $T^*(M)$, залишає канонічну 1-форму $\mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(T^*(M))$ інваріантною. Зокрема, якщо на многовиді M задано гладку дію групи Лі G, то, очевидно, кожен елемент $a \in \mathcal{G}$, де $\mathcal{G}$ — алгебра Лі групи Лі G, генерує природним чином векторне поле $k_a \in \mathcal{T}(M)$. Окрім цього, оскільки групова дія на M

$$\varphi : G \times M \to M \tag{2.2}$$

породжує для кожного елемента $g \in G$ дифеоморфізм $\varphi_g \in \mathrm{Diff}\, M$, то цей дифеоморфізм природним чином піднімається до відповідного дифеоморфізму $\varphi_g^* \in \mathrm{Diff}\, T^*(M)$ кодотичного розшарування $T^*(M)$, який теж, очевидно, залишає канонічну 1-форму $\mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)} \in \in \Lambda^1(T^*(M))$ інваріантною. А саме, справджується рівність

$$\varphi_g^* \cdot \mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)} = \mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)} \tag{2.3}$$

для кожної 1-форми $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M)$. Як результат можна визначити на $T^*(M)$ відповідне векторне поле $K_a \in \mathcal{T}(T^*(M))$ для кожного елемента $a \in \mathcal{G}$. Тоді умову (2.3) можна записати як

$$L_{K_a}\mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)} = \mathrm{pr}_M^* L_{k_a}\alpha^{(1)} = 0$$

для всіх $a \in \mathcal{G}$, де L_{K_a} і L_{k_a} позначають звичайні похідні Лі відповідно на $\Lambda^1(T^*(M))$ і $\Lambda^1(M)$.

Канонічна симплектична структура на $T^*(M)$ визначається як

$$\omega^{(2)} := d\,\mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)} \tag{2.4}$$

і є, очевидно, інваріантною, тобто

$$L_{K_a}\omega^{(2)} = 0$$

для всіх $a \in \mathcal{G}$.

Для будь-якої гладкої функції $H \in D(T^*(M))$ визначено гамільтонове векторне поле $K_H \in \mathcal{T}$ таке, що

$$i_{K_H}\omega^{(2)} = -dH, \tag{2.5}$$

і, навпаки, оскільки симплектична 2-форма (2.4) є, очевидно, невиродженою. Як результат визначення (2.5) та виразу (2.4) легко знаходимо, що функція Гамільтона $H := H_K \in \in D(T^*(M))$ задається виразом

$$H_K = \mathrm{pr}_M^* \alpha^{(1)}(K_H) = \alpha^{(1)}(\mathrm{pr}_M^* K_H) = \alpha^{(1)}(k_H),$$

де $k_H \in \mathcal{T}(M)$ — відповідне векторне поле на многовиді M, підняття якого на розшарування $T^*(M)$ збігається з векторним полем $K_H \in \mathcal{T}(T^*(M))$. Якщо взяти $K_a \in \in \mathcal{T}(T^*(M))$ для $a \in \mathcal{G}$, то легко встановити, що відповідна функція Гамільтона

$$H_a = \alpha^{(1)}(k_a) = \mathrm{pr}_M^* \alpha^{(1)}(K_a)$$

для $a \in \mathcal{G}$ задає [1, 3] лінійне відображення моменту $l : T^*(M) \to \mathcal{G}^*$ за правилом

$$H_a := < l, a >, \tag{2.6}$$

де $< \cdot, \cdot >$ — відповідна згортка на $\mathcal{G}^* \times \mathcal{G}$. З визначення (2.6) випливає, що відображення моменту $l : T^*(M) \to \mathcal{G}^*$ є інваріантним відносно будь-якого інваріантного гамільтонового векторного поля $K \in \mathcal{T}(T^*(M))$. Справді,

$$L_K < l, a > = L_K H_a = -L_{K_a} H = 0,$$

оскільки функція Гамільтона $H \in D(T^*(M))$ є, за визначенням, інваріантною відносно дії будь-якого векторного поля $K_a \in \mathcal{T}(T^*(M))$, $a \in \mathcal{G}$.

Зафіксуємо тепер регулярне значення відображення моменту $l(u, v) = \xi \in \mathcal{G}^*$ і розглянемо відповідний підмноговид

$$\mathcal{M}_\xi := \{(u, v) \in T^*(M) : l(u, v) = \xi \in \mathcal{G}^*\}.$$

Базуючись на визначенні (2.1) та інваріантності 1-форми $\mathrm{pr}_M^* \alpha^{(1)} \in \Lambda^1(T^*(M))$ відносно дії групи Лі G на $T^*(M)$, можна записати такі рівності:

$$\begin{aligned} < l(g \circ (u, v)), a > &= \mathrm{pr}_M^* \alpha^{(1)}(K_a)(g \circ (u, v)) = \\ &= \mathrm{pr}_M^* \alpha^{(1)}(K_{Ad_{g^{-1}} a})(u, v) := < l(u, v), Ad_{g^{-1}} a > = \\ &= < Ad_{g^{-1}}^* l(u, v), a > \end{aligned} \tag{2.7}$$

для будь-якого $g \in G$ та всіх $a \in \mathcal{G}$ і $(u, v) \in T^*(M)$. Із (2.7) знаходимо, що для кожного $g \in G$ та всіх $(u, v) \in T^*(M)$

$$l(g \circ (u, v)) = Ad_{g^{-1}}^* l(u, v).$$

Це означає, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} T^*(M) & \xrightarrow{l} & \mathrm{G}^* \\ g \downarrow & & \downarrow Ad_{g^{-1}}^* \\ T^*(M) & \xrightarrow{l} & \mathrm{G}^* \end{array}$$

є комутативною для всіх елементів $g \in G$, а відповідна дія $g : T^*(M) \to T^*(M)$ називається еквіваріантною [1].

Позначимо через $G_\xi \subset G$ стабілізатор регулярного елемента $\xi \in \mathrm{G}^*$. Тоді, очевидно, природним чином визначено дію підгрупи Лі G_ξ на підмноговид $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$, яку вважатимемо вільною і власною. У відповідності з цією дією на $\mathcal{M}_\xi$ можна визначити [1, 3, 5–7] так званий редукований простір $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ взяттям фактора по дії підгрупи G_ξ на $\mathcal{M}_\xi$, тобто

$$\bar{\mathcal{M}}_\xi := \mathcal{M}_\xi / G_\xi. \tag{2.8}$$

Фактор-простір (2.8) індукує на собі симплектичну структуру $\bar{\omega}^{(2)}_\xi \in \Lambda^2(\bar{\mathcal{M}}_\xi)$, яка визначається таким чином:

$$\bar{\omega}^{(2)}_\xi(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = \omega^{(2)}_\xi(\eta_1, \eta_2), \tag{2.9}$$

де $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \in T(\bar{\mathcal{M}}_\xi)$ — довільні вектори, в які проектуються вектори $\eta_1, \eta_2 \in T(\mathcal{M}_\xi)$, задані в будь-якій точці $(u_\xi, v_\xi) \in \mathcal{M}_\xi$, що проектується однозначно в точку $\bar{\mu}_\xi \in \bar{\mathcal{M}}_\xi$ згідно з (2.8).

Позначимо через $\pi_\xi : \mathcal{M}_\xi \to T^*(M)$ відповідне відображення вкладення в $T^*(M)$, а через $r_\xi : \mathcal{M}_\xi \to \bar{\mathcal{M}}_\xi$ відповідну редукцію на простір $\bar{\mathcal{M}}_\xi$. Тоді вираз (2.9) можна записати як рівність

$$r^*_\xi \bar{\omega}^{(2)}_\xi = \pi^*_\xi \omega^{(2)}, \tag{2.10}$$

визначену вже на векторах із дотичного простору $T^*(\mathcal{M}_\xi)$. Щоб встановити симплектичність 2-форми $\bar{\omega}^{(2)}_\xi \in \Lambda^2(\bar{\mathcal{M}}_\xi)$, скористаємося відповідною невиродженістю дужки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}^r_\xi$ на $\bar{\mathcal{M}}_\xi$. Для її обчислення використаємо конструкцію типу Дірака, задаючи функції на $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ як деякі G_ξ-інваріантні функції на підмноговиді $\mathcal{M}_\xi$. Тоді дужку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\xi$ таких функцій, що відповідає симплектичній структурі (2.4), можна обчислити як звичайну дужку Пуассона на $T^*(M)$, якщо довільним чином продовжити ці функції з підмноговиду $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$ на деякий окіл $U(\mathcal{M}_\xi) \subset T^*(M)$. Очевидно, що два такі розширення заданої функції на окіл $U(\mathcal{M}_\xi)$ відрізняються функцією, що анулюється на підмноговиді $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$. Відмінність відповідних гамільтонових полів таких двох різних розширень на $U(\mathcal{M}_\xi)$ повністю контролюється виконанням умов наступної леми (див. [1, 3, 6]).

Лема 2.1. *Нехай функція $f : U(\mathcal{M}_\xi) \to \mathbb{R}$ є гладкою й анулюється на $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$, тобто $f|_{\mathcal{M}_\xi} = 0$. Тоді відповідне гамільтонове векторне поле $K_f \in \mathcal{T}(U(\mathcal{M}_\xi))$ у кожній точці $(u_\xi, v_\xi) \in \mathcal{M}_\xi$ є дотичним до орбіти $\mathrm{Or}(G; (u_\xi, v_\xi))$.*

Доведення. Підмноговид $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$ визначається, очевидно, певним набором співвідношень типу

$$H_{a_i} = \bar{\xi}_i, \quad \bar{\xi}_i := <\xi, a_i>, \tag{2.11}$$

де $a_i \in \mathcal{G}$, $i = \overline{1, \dim\mathcal{G}}$, — деякий базис алгебри Лі $\mathcal{G}$, що випливає з означення (2.6). Оскільки функція $f : U(\mathcal{M}_\xi) \to \mathbb{R}$ анулюється на $\mathcal{M}_\xi$, то можна записати таку рівність:

$$f = \sum_{i=1}^{\dim\mathcal{G}} (H_{a_i} - \bar{\xi}_i) f_i,$$

де $f_i : U(\mathcal{M}_\xi) \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, \dim \mathcal{G}}$, — деякий набір функцій в околі $U(\mathcal{M}_\xi)$. Візьмемо довільний дотичний вектор $\eta \in T(\mathcal{M}_\xi)$ у точці $(u_\xi, v_\xi) \in \mathcal{M}_\xi$ і обчислимо вираз

$$
\begin{aligned}
< df(u_\xi, v_\xi), \eta(u_\xi, v_\xi) > &= \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{G}} < dH_{a_i}(u_\xi, v_\xi), \eta(u_\xi, v_\xi) > f_i(u_\xi, v_\xi) = \\
&= - \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{G}} \omega^{(2)}(K_{a_i}(u_\xi, v_\xi), \eta(u_\xi, v_\xi)) = \\
&= -\omega^{(2)} \left(\sum_{i=1}^{\dim \mathcal{G}} f_i(u_\xi, v_\xi) K_{a_i}(u_\xi, v_\xi), \eta(u_\xi, v_\xi) \right) = \\
&= - < i_{\left(\sum\limits_{s=1}^{\dim \mathcal{G}} f_s(u_\xi, v_\xi) K_{a_s}(u_\xi, v_\xi) \right)} \omega^{(2)}, \eta(u_\xi, v_\xi) > . \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

З довільності вектора $\eta \in T(\mathcal{M}_\xi)$ у точці $(u_\xi, v_\xi) \in \mathcal{M}_\xi$ з (2.12) випливає, що векторне поле

$$
K_f = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{G}} f_i \, K_{a_i},
$$

тобто $K_f \in T(\mathrm{Or}(\mathcal{G}))$, що й потрібно було встановити.

Як наслідок з леми 2.1 отримуємо алгоритм обчислення редукованої дужки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\xi^r$ на просторі $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ згідно з означенням (2.10). А саме, вибираємо дві функції, що визначені на $\mathcal{M}_\xi$ та інваріантні відносно дії підгрупи G_ξ, і розширяємо їх довільним гладким чином на деяку відкриту область $U(\mathcal{M}_\xi) \subset T^*(M)$. Далі ми обчислюємо відповідні гамільтонові векторні поля на $T^*(M)$ та проектуємо їх на дотичний простір до $\mathcal{M}_\xi$, додаючи при потребі відповідні вектори, дотичні до орбіти $\mathrm{Or}(G)$. Отримані проекції не будуть, очевидно, залежати від вибраних розширень на область $U(\mathcal{M}_\xi) \subset T^*(M)$. Як результат отримуємо, що редукована дужка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\xi^r$ визначена однозначно через звуження початкової дужки Пуассона на $T^*(M)$. Із невиродженості останньої та функціональної незалежності базисних функцій (2.11) на підмноговиді $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$ випливає [7] невиродженість редукованої дужки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\xi^r$ на $\bar{\mathcal{M}}_\xi$. Як наслідок невиродженості знаходимо також, що розмірність редукованого простору $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ є парною. Враховуючи, зокрема, умову, що елемент $\xi \in \mathcal{G}^*$ є регулярним і розмірність алгебри Лі стабілізатора G_ξ є $\dim G_\xi$, легко встановлюємо, що $\dim \bar{\mathcal{M}}_\xi = \dim T^*(M) - 2\dim G_\xi$. Оскільки, за побудовою, $\dim T^*(M) = 2n$, встановлюємо парність редукованого простору $\bar{\mathcal{M}}_\xi$.

Для коректності алгоритму необхідно встановити існування відповідних проекцій гамільтонових векторних полів на дотичний простір $T(\mathcal{M}_\xi)$. Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2.1. *У кожній точці* $(u_\xi, v_\xi) \in \mathcal{M}_\xi$ *можна вибрати вектор* $V_f \in \mathrm{Or}(\mathcal{G})$ *такий, що* $K_f(u_\xi, v_\xi) + V_f(u_\xi, v_\xi) \in T_{(u_\xi, v_\xi)}(\mathcal{M}_\xi)$, *причому вектор* $V_f \in \mathrm{Or}(\mathcal{G})$ *визначається однозначно з точністю до вектора з орбіти* $\mathrm{Or}(\mathcal{G}_\xi)$.

Доведення. Зазначимо, що орбіта $\mathrm{Or}(\mathcal{G}; (u_\xi, v_\xi))$ через точку $(u_\xi, v_\xi) \in \mathcal{M}_\xi$ є завжди симплектично ортогональною до дотичного простору $T_{(u_\xi, v_\xi)}(\mathcal{M}_\xi)$. Справді, для будь-якого вектора $\eta \in T(\mathcal{M}_\xi)$ та $a \in \mathcal{G}$

$$\omega^{(2)}(\eta, K_a) = -i_{K_a}\omega^{(2)}(\eta) = dH_a(\eta) = 0,$$

оскільки підмноговид $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$ визначається рівністю $< \xi, a > = H_a$ для всіх $a \in \mathcal{G}$, тобто $dH_a = 0$ на $\mathcal{M}_\xi$. Отже, простір $T(\mathcal{M}_\xi) \cap \mathrm{Or}(\mathcal{G}) = \mathrm{Or}(\mathcal{G})$, оскільки $H_a \circ g_\xi = H_a$ для всіх $g_\xi \in G_\xi$, що випливає з інваріантності елемента $\xi \in \mathcal{G}^*$ відносно дії групи Лі G_ξ.

Нашим завданням тепер є розв'язання умови вкладення $K_f + V_f \in T(\mathcal{M}_\xi)$, або рівняння

$$\omega^{(2)}(K_f + V_f, K_a) = 0 \tag{2.13}$$

на многовиді $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$ для всіх $a \in \mathcal{G}$. Рівність (2.13) переписуємо у вигляді

$$K_a f = \omega^{(2)}(V_f, K_a) \tag{2.14}$$

на $\mathcal{M}_\xi$ для всіх $a \in \mathcal{G}$, причому 2-форма в правій частині (2.14), очевидно, залежить лише від елемента $\xi \in \mathcal{G}^*$. Враховуючи еквіваріантність групової дії на $T^*(M)$ та очевидну рівність

$$\omega^{(2)}(K_a, K_b) = \mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)}([K_a, K_b]) = -\mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)}(K_{[a,b]})$$

для всіх $a, b \in \mathcal{G}$, встановлюємо, що існує такий елемент $a_f \in \mathcal{G}$, що $V_f = K_{a_f} \in \mathrm{Or}(\mathcal{G})$ і

$$\begin{aligned}\omega^{(2)}(V_f, K_a) = \omega^{(2)}(K_{a_f}, K_a) = \mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)}([K_a, K_{a_f}]) = \\ = \mathrm{pr}_M^*\alpha^{(1)}(K_{[a_f,a]}) = H_{[a_f,a]} = < l, [a_f, a] > = \\ = < \xi, [a_f, a] > = < ad_{a_f}^*\xi, a >\end{aligned} \tag{2.15}$$

на $\mathcal{M}_\xi$ для всіх $a \in \mathcal{G}$. Оскільки $ad_{a_f}^*\xi = 0$ для будь-якого $a_f \in \mathcal{G}_\xi$, то права частина (2.15) визначає на фактор-просторі $\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi$ невироджену кососиметричну форму, якій відповідає канонічний ізоморфізм $\hat{\xi} : \mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi \to (\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi)^*$, де, за визначенням,

$$< \hat{\xi}(\tilde{a}), \tilde{b} > := < \xi, [a, b] > \tag{2.16}$$

для будь-яких $\tilde{a}$ і $\tilde{b} \in \mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi$ із відповідними представниками a і $b \in \mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi$. Далі, внаслідок того, що функція $f : \mathcal{M}_\xi \to \mathbb{R}$ є G_ξ-інваріантною на $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$, права частина (2.14) визначає елемент $\lambda_f \in (\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi)^*$ за допомогою рівності

$$\lambda_f : \tilde{a} = -K_a f$$

для всіх $a \in \mathcal{G}$. Враховуючи тепер вирази (2.15) і (2.16), знаходимо, що існує елемент

$$\tilde{a}_f = \tilde{\xi}^{-1} \circ \lambda_f \in \mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi.$$

Оскільки елементу $\tilde{a}_f \in \mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi$ відповідає елемент $a_f(\mathrm{mod}\, \mathcal{G}_\xi) \in \mathcal{G}$, який однозначно генерує локально векторне поле $K_{a_f} \in \mathrm{Or}(\mathcal{G})$, то з рівності $V_f = K_{a_f} \in \mathrm{Or}(\mathcal{G})$ на $\mathcal{M}_\xi$ встановлюємо справедливість теореми.

Нехай тепер дві функції $f_1, f_2 \in D(\mathcal{M}_\xi)$ є G_ξ-інваріантними. Тоді їх редукована дужка Пуассона $\{f_1, f_2\}_\xi^r$ на $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ визначається за правилом

$$\{f_1, f_2\}_\xi^r := -\omega^{(2)}(K_{f_1} + V_{f_1}, K_{f_2} + V_{f_2}) = \{f_1, f_2\} + \omega^{(2)}(V_{f_1}, V_{f_2}), \tag{2.17}$$

де ми скористалися тотожностями на $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$

$$\omega^{(2)}(K_{f_1} + V_{f_1}, V_{f_2}) = 0 = \omega^{(2)}(K_{f_2} + V_{f_2}, V_{f_1}),$$

що є простими наслідками з рівності (2.13) на $\mathcal{M}_\xi$. З урахуванням, зокрема, виразу (2.15) формула (2.17) набирає вигляду

$$\{f_1, f_2\}_\xi^r = \{f_1, f_2\} + \frac{1}{2}(V_{f_1} f_2 - V_{f_2} f_1), \tag{2.18}$$

де $f_1, f_2 \in D(U(\mathcal{M}_\xi))$ — будь-які гладкі розширення на область $U(\mathcal{M}_\xi)$ раніше заданих G_ξ-інваріантних функцій. Отже, справедливою є наступна теорема.

Теорема 2.2. *Редукована дужка Пуассона двох функцій на фактор-просторі $\bar{\mathcal{M}}_\xi = \mathcal{M}_\xi / G_\xi$ обчислюється за допомогою будь-яких їх гладких розширень до функцій на відкритому околі $U(\mathcal{M}_\xi)$ згідно з формулою типу Дірака (2.18).*

3. Метод канонічної редукції на головних розшаруваннях із структурною групою як групою симетрії. Нехай G_ξ — підгрупа Лі деякої групи Лі G з одиничним елементом $e \in G_\xi$ і відповідною алгеброю Лі $\mathcal{G}_\xi \simeq T_e(G_\xi)$. Розглянемо тепер [8] головний розшарований простір $p : M \to N$ з базою N і структурною групою G_ξ, яка діє на M згідно з (2.2), тобто $G_\xi \times M \to M$. А саме, для кожного $g \in G_\xi$ існує дифеоморфізм $\varphi_g : M \to M$, який генерує для кожного фіксованого елемента $U \in M$ відображення $\hat{u} : G_\xi \to M$, де $\hat{u}(g) := \varphi_g(u)$ для всіх $g \in G_\xi$. Окрім цього, згідно з властивостями головного розшарування $p : M \to N$, фактор-простір $M/G_\xi \simeq N$.

Однією з головних структур на головному розшаруванні $p : M \to N$ є задання на многовиді M зв'язності $\Gamma(\mathcal{A})$ за допомогою такого морфізму $\mathcal{A} : (T(M), \varphi_{g,*}) \to (\mathcal{G}, Ad_{g^{-1}})$, що відповідне відображення $\hat{u}_*(e) : \mathcal{G}_\xi \to T_u(M)$ є лівим оберненим до відображення $\hat{u}_*(e) : \mathcal{G}_\xi \to T_u(M)$, тобто

$$\mathcal{A}(u)\hat{u}_*(e) = 1, \quad \hat{u}^*(e)\mathcal{A}^*(u) = 1 \tag{3.1}$$

для всіх $u \in M$.

Як і раніше, відображення $\varphi_g^* : T^*(M) \to T^*(M)$ є відповідним підняттям відображення $\varphi_g : M \to M$ для будь-якого елемента $g \in G$. Якщо $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ є стандартною G-інваріантною канонічною 1-формою Ліувілля на M, то відповідне відображення моменту $l : T^*(M) \to \mathcal{G}^*$ можна задати у вигляді

$$l\left(\alpha^{(1)}(u)\right) = \hat{u}^*(e)\alpha^{(1)}(u) \tag{3.2}$$

для всіх $u \in M$.

Зазначимо, що структура головного розшарування $p : M \to N$ має властивість точності ланцюжка відображень

$$0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\hat{u}_*(e)} T_u(M) \xrightarrow{p_*(u)} T_{p(u)}(N) \to 0,$$

тобто

$$p_*(u)\hat{u}_*(e) = 0, \quad \hat{u}^*(e)p^*(u) = 0 \tag{3.3}$$

для всіх $u \in M$. Справді, оскільки фактор-простір $M/G_\xi \simeq N$, то при дії $\varphi_g : M \to M$, $g \in G_\xi$, орбіта точки $u \in M$ проектується в єдину точку $p(u) \in N$, яка є сталою, а це означає, що $p_*(u)\hat{u}_*(e) = 0$. Друга рівність в (3.3) є відповідним спряженням до першої і відповідає точності ланцюжка відображень

$$0 \leftarrow \mathcal{G} \xleftarrow{\hat{u}^*(e)} T^*_u(M) \xleftarrow{p^*(u)} T^*_{p(u)}(N) \leftarrow 0 \tag{3.4}$$

для всіх $u \in M$.

Поєднуючи умову (3.2) із (3.4), легко встановлюємо, що вираз

$$[1 - \mathcal{A}^*(u)\hat{u}^*(e)]\,\alpha^{(1)}(u) \in \operatorname{rank} p^*(u), \tag{3.5}$$

або, завдяки (3.4),

$$\hat{u}^*(e)\,[1 - \mathcal{A}^*(u)\hat{u}^*(e)]\,\alpha^{(1)}(u) = 0$$

для всіх $u \in M$. Вираз (3.5), зокрема, означає, згідно з точністю відображень (3.3), що існує обернене відображення $(p^*(u))^{-1}$ на образі $p^*(u)T^*_{p(u)}(N) \subset T^*_u(M)$, оскільки відображення $p^*(u) : T^*_{p(u)}(N) \to T^*_u(M)$ є ін'єктивним для всіх $u \in M$. Таким чином, для кожного $u \in M$ і $g \in G_\xi$ можна визначити морфізм $p_{\mathcal{A}} : (T^*(M), \varphi^*_g) \to (T^*(N), \mathrm{id})$ за допомогою виразу

$$p_{\mathcal{A}}(u) : \alpha^{(1)}(u) \to (p^*(u))^{-1}\,[1 - \mathcal{A}^*(u)\hat{u}^*(e)]\,\alpha^{(1)}(e). \tag{3.6}$$

Ґрунтуючись на визначенні (3.6), можна легко перевірити, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} T^*(M) & \xrightarrow{p_{\mathcal{A}}} & T^*(N) \\ \mathrm{pr}_M \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_N \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array} \tag{3.7}$$

є комутативною, тобто

$$p \circ \mathrm{pr}_M = \mathrm{pr}_N \circ p_{\mathcal{A}}.$$

Нехай тепер елемент $\xi \in \mathcal{G}^*$ вибрано інваріантним відносно дії підгрупи Лі G_ξ і регулярним для відображення моменту (3.2), де

$$\hat{u}^*(e)\alpha^{(1)}(u) = \xi$$

для певних $\alpha^{(1)} \in T^*(M)$ та $u \in M$. Як і раніше, побудуємо множину елементів $\{\alpha^{(1)} \in T^*(M) : \hat{u}^*(e)\alpha^{(1)}(u) = g \in \mathcal{G}^*,\ u \in M\} = \mathcal{M}_\xi$ і задамо на ній індуковане відображення

$$p_{\mathcal{A}}^{\xi} : \mathcal{M}_\xi \to T^*(N), \tag{3.8}$$

де для всіх $(u, \alpha^{(1)}(u)) \in \mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$, за визначенням,

$$p_{\mathcal{A}}^{\xi}(u)\alpha^{(1)}(u) = p_{\mathcal{A}}(u)\alpha^{(1)}(u).$$

Покладемо, що стабілізатор елемента $\xi \in \mathcal{G}^*$, тобто підгрупа Лі G_ξ, діє на підмножині $\mathcal{M}_\xi \in T^*(M)$ вільно та власно, так що редукований простір $\bar{\mathcal{M}}_\xi := \mathcal{M}_\xi / G_\xi$ є симплектичним, як було встановлено в попередньому пункті. При цьому, очевидно, симплектична структура $\bar{\omega}_\xi^{(2)} \in \Lambda^2(\bar{\mathcal{M}}_\xi)$ на $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ задовольняє канонічне співвідношення (2.10), тобто

$$r_\xi^* \bar{\omega}_\xi^{(2)} = \pi_\xi^* d(\mathrm{pr}_M^* \alpha^{(1)}). \tag{3.9}$$

Оскільки фактор-простори $M/G_\xi \simeq N$ і $T^*(M)/G_\xi \simeq T^*(N)$, то цікаво розглянути зв'язок симплектичних структур на редукованому просторі $\bar{\mathcal{M}}_\xi := \mathcal{M}_\xi / G_\xi$ і на просторі $(p^*(u))^{-1}\mathcal{M}_\xi \subset T^*(N)$. З цією метою покажемо, що має місце наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай задано головне розшарування $p : M \to N$ із структурною підгрупою Лі G_ξ групи Лі G, зв'язністю $\Gamma(\mathcal{A})$ та G_ξ-інваріантним елементом $\xi \in \mathcal{G}^*$. Тоді кожна така зв'язність $\Gamma(\mathcal{A})$ породжує симплектоморфізм $\nu_\xi : \bar{\mathcal{M}}_\xi \to p^*(\mathcal{M}_\xi)$ між редукованим простором $\bar{\mathcal{M}}_\xi := \mathcal{M}_\xi / G_\xi$ і підпростором $(p^*(\mathcal{M}_\xi) \subset T^*(N)$. Більш того, справджується рівність*

$$p_{\mathcal{A}}^* \left(d\left(\mathrm{pr}_N^* \beta^{(1)}\right) + \mathrm{pr}_N^* \Omega_\xi^{(2)} \right) = \pi_\xi^* d\left(\mathrm{pr}_M^* \alpha^{(1)}\right), \tag{3.10}$$

де $\beta^{(1)} \in \Lambda^1(N)$ і $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ — відповідні канонічні 1-форми Ліувілля і $\Omega_\xi^{(2)} := \,:= < \Omega^{(2)}, \xi >$ — ξ-компонента відповідної 2-форми кривизни $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(N) \otimes \mathcal{G}$ зв'язності $\Gamma(\mathcal{A})$.

Доведення. Завдяки умові (3.10) на підмноговиді $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$ можна записати

$$p^*(u)p_{\mathcal{A}}^{\xi}(\alpha^{(1)}(u)) := p^*(u)\beta^{(1)}(p(u)) = \alpha^{(1)}(u) - \mathcal{A}^*(u)\hat{u}^*(e)\alpha^{(1)}(u), \tag{3.11}$$

де $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ і $\beta^{(1)} \in \Lambda^1(N)$ — відповідні канонічні 1-форми Ліувілля, $\left(u, \alpha^{(1)}(u)\right) \in \,\in \mathcal{M}_\xi$. Із (3.11) знаходимо

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(u) &:= (p_{\mathcal{A}}^{\xi})^{-1}\beta^{(1)}(p(u)) = p^*(u)\beta^{(1)}(p(u)) + \mathcal{A}^*(u)\hat{u}^*(e)\alpha^{(1)}(u) = \\ &= p^*(u)\beta^{(1)}(p(u)) + < \mathcal{A}(u), \xi > \end{aligned} \tag{3.12}$$

для всіх $\left(u, \alpha^{(1)}(u)\right) \in \mathcal{M}_\xi$. Врахуємо тепер, що згідно з комутативністю діаграми (3.7) на $T^*(N)$ має місце індукована рівність

$$\mathrm{pr}_M^* \cdot p^* = p_{\mathcal{A}}^* \cdot \mathrm{pr}_N^*. \tag{3.13}$$

Отже, із (3.12) та (3.13) отримуємо, що на підмноговиді $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^*_{M_\xi}\alpha^{(1)}(u) &= \mathrm{pr}^*_{M_\xi}p^*(u)\beta^{(1)}(p(u)) + \mathrm{pr}^*_{M_\xi} < \mathcal{A}(u), \xi > = \\ &= \left(p^\xi_{\mathcal{A}}\right)^* \cdot \mathrm{pr}^*_N + \mathrm{pr}^*_{M_\xi} < \mathcal{A}(u), \xi >, \qquad (3.14)\end{aligned}$$

де, за визначенням, $u \in M_\xi := \mathrm{pr}_M \mathcal{M}_\xi$. Оскільки симплектична структура $\pi^*_\xi \omega^{(2)} = d\,\mathrm{pr}^*_{m_\xi}\alpha^{(1)} \in \Lambda^2(\mathcal{M}_\xi)$, з (3.14) при $\sigma^{(2)} := d\,\mathrm{pr}^*_N\beta^{(1)} \in \Lambda^2(T^*(N))$ отримуємо

$$\begin{aligned}\pi^*_\xi\omega^{(2)} &= (p^\xi_{\mathcal{A}})^* d\left(\mathrm{pr}^*_N\beta^{(1)}\right) + \mathrm{pr}^*_{M_\xi} < d\mathcal{A}, \xi > = \\ &= \left(p^\xi_{\mathcal{A}}\right)^* \sigma^{(2)} + \mathrm{pr}^*_{M_\xi} < d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A}, \xi > - \\ &\quad - \mathrm{pr}^*_{M_\xi} < [\mathcal{A}, \mathcal{A}], \xi > = \left(p^\xi_{\mathcal{A}}\right)^* \sigma^{(2)} + \mathrm{pr}^*_{M_\xi} < p^*\Omega^{(2)}, \xi > = \\ &= \left(p^\xi_{\mathcal{A}}\right)^* \left(\sigma^{(2)} + \mathrm{pr}^*_N \cdot \Omega^{(2)}_\xi\right). \qquad (3.15)\end{aligned}$$

При виведенні (3.15) ми скористалися тим, що

$$< [\mathcal{A}, \mathcal{A}], \xi > (\eta_1, \eta_2) = < [\mathcal{A}(\eta_1), \mathcal{A}(\eta_2)], \xi > = < \xi, ad_{\mathcal{A}(\eta_1)}, \mathcal{A}(\eta_2) > = < ad^*_{\mathcal{A}(\eta_1)}\xi, \mathcal{A}(\eta_2) >$$

для всіх $\eta_1, \eta_2 \in T(M)$, оскільки $ad^*_a\xi = 0$ для всіх $a \in \mathcal{G}_\xi$ і $\mathcal{A}(\eta_1), \mathcal{A}(\eta_2) \in \mathcal{G}_\xi$ за умовою інваріантності елемента $\xi \in \mathcal{G}^*$, а також визначенням 2-форми кривизни $\Omega^{(2)} := d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A}$. При цьому було враховано, що 2-форма $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(N)$, тобто ефективно залежить лише від точок базового многовиду N.

Для відображення $p^\xi_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_\xi \to p^*(\mathcal{M}_\xi) \subset T^*(N)$ виконується умова (3.15), еквівалентна умові (3.10). З іншого боку, враховуючи рівність (3.9), знаходимо

$$r^*_\xi\bar{\omega}^{(2)}_\xi = \left(p^\xi_{\mathcal{A}}\right)^* \left(\sigma^{(2)} + \mathrm{pr}^*_N\Omega^{(2)}_\xi\right)$$

для всіх $(u, \lambda^{(1)}(u)) \in \mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$, причому, за побудовою відображення (3.8), проекція $\mathrm{pr}_N : T^*(N) \to N$ повинна бути обмеженою на підмноговид $\mathcal{N}_\xi := (p^*)^{-1}(\mathcal{M}_\xi) \subset T^*(N)$. Це означає, що редукований простір $\bar{\mathcal{M}}_\xi = \mathcal{M}_\xi/G_\xi$ з симплектичною структурою $\bar{\omega}^{(2)}_\xi \in \Lambda^2(\bar{\mathcal{M}}_\xi)$ є симплектоморфним до підмноговиду $\mathcal{N}_\xi = (p^*)^{-1}(\mathcal{M}_\xi) \subset T^*(N)$ із симплектичною структурою $\left(\sigma^{(2)} + \mathrm{pr}^*_{N_\xi}\Omega^{(2)}_\xi\right) \in \Lambda^2(\mathcal{N}_\xi)$, де, за визначенням, $N_\xi = p_N \circ \mathcal{N}_\xi \subset N$. Тим самим теорему доведено.

Щодо теореми 3.1 актуальним є питання, коли редукований простір $\bar{\mathcal{M}}_\xi$ буде симплектоморфним дотичному многовиду $T^*(N)$, тобто в термінах теореми 3.1 виконано умову

$$(p^*)^{-1}\mathcal{M}_\xi = T^*(N).$$

Якщо вибрати елемент $\xi \in \mathcal{G}^*$ так, що виконується додаткова умова $\xi \in \mathcal{G}^*_\xi$, де $\mathcal{G}_\xi$ — стабілізатор елемента $\xi \in \mathcal{G}^*$, то завдяки умові, що фактор-простір $M/G_\xi \simeq N$ і образ орбіти

$\mathrm{Or}(G_\xi; u)$ при сюр'єктивному відображенні $p : M \to N$ збігається з точкою $p(u) \in N$ для будь-якої точки $u \in M$, встановлюємо, що підмноговид $\mathcal{M}_\xi \subset T^*(M)$ є G_ξ-інваріантним. Це означає, що $\mathcal{M}_\xi = \{(u, \alpha_\xi^{(1)}(u)) \in T^*(M) : u \in M\}$ для деяких 1-форм $\alpha_\xi^{(1)} \in T^*(M)$, що задовольняють умову (3.2) у вигляді

$$\hat{u}^*(e)\alpha_\xi^{(1)}(u) = \xi$$

для всіх $u \in M$. Оскільки відображення $p : M \to N$ є сюр'єктивним, то встановлено симплектоморфізм простору $\left(T^*(N), \sigma^{(2)} + \mathrm{pr}_N^* \Omega_\xi^{(2)}\right)$ на редукований простір $\left(\bar{\mathcal{M}}_\xi, \bar{\omega}_\xi^{(2)}\right)$.

1. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. — Addison-Wesley, USA, 1978. — 806 p.
2. *Kummer J.* On the construction of the reduced phase space of a Hamiltonian system with symmetry // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — **30**, № 2. — P. 261–281.
3. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебраїчні аспекти цілком інтегровних систем та їх збурень // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **41**. — 237 с.
4. *Satzer J.(jr.).* Canonical reduction of mechanical systems invariant under abelian group action with an application to celestial dynamics // Indiana Univ. Math. J. — 1977. — **26,** № 5. — P. 951–976.
5. *Zakrzewski S.* Induced representations and induced Hamilton actions // J. Geom. and Phys. — 1986 — **3,** № 2. — P. 211–219.
6. *Prykarpatsky A. K., Mykytiuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds. — Netherlands: Kluwer Acad.Publ., 1998. — 554 p.
7. *Фоменко А. Т.* Дополнительные главы дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1983. — 252 с.
8. *Годбийон В.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1998. — 188 с.

Одержано 06.12.2004