УДК 517.9

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

А. А. Покутний

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 03680, Киев, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6

For a linear nonhomogeneous differential equation in a Banach space, we find a criterion for existence of solutions that are bounded on the whole real axis with the assumption that the homogeneous equation admits exponential dichotomy on the half-axes. This result is a generalization of K. Palmer's lemma to the case of infinite dimensional spaces. We consider examples of countable systems of ordinary differential equations that have bounded solutions.

Отримано критерій існування обмежених на всій дійсній осі розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння у банаховому просторі за припущення, що однорідне рівняння допускає експоненціальну дихотомію на півосях. Даний результат є узагальненням леми К. Палмера на випадок нескінченновимірних просторів. Розглянуто приклади існування обмежених розв'язків зчисленних систем звичайних диференціальних систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

где оператор-функция $f(t)$ действует из $\mathbb{R}$ в банахово пространство $\mathbf{B}$: $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) :=$ $:= \{f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbf{B}, f(\cdot) \in C(\mathbb{R}), |||f||| = \sup\limits_{t \in R} \|f(t)\| < \infty\}$, $BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна [1, с. 141], $|||A||| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| < \infty$, а решение $x(t)$ уравнения

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + f(s))\, ds$$

непрерывно дифференцируемо в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнению (1) везде в $\mathbb{R}$. Поэтому ограниченное решение $x(t)$ уравнения (1) будем искать в банаховом пространстве $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, ограниченных со своей производной.

Найдем условия существования ограниченных на всей оси $\mathbb{R}$ решений $x(t) \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ уравнения (1) в предположении, что соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \tag{2}$$

допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях. В случае конечномерных пространств, когда $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$, эту проблему решает известная лемма К. Палмера [2, с. 245].

Как известно [1, с. 236], уравнение (2) допускает экспоненциальную дихотомию на интервале J, если существуют проектор $P (P^2 = P)$ и константы $K \geq 1, \alpha > 0$ такие, что для любых $t, s \in J$ справедливы оценки

$$\left\| U(t)PU^{-1}(s) \right\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\left\| U(t)(E-P)U^{-1}(s) \right\| \leq Ke^{\alpha(t-s)}, \quad s \geq t,$$

где $U(t) = U(t,0)$ — эволюционный оператор [1, с. 145] уравнения (2) такой, что

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = E \ - \ \text{единичный оператор.}$$

Здесь и в дальнейшем J один из интервалов: $J = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, $J = \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ или $J = \mathbb{R}_- = (-\infty; 0]$.

2. Основной результат. Рассмотрим задачу о существовании ограниченных на $\mathbb{R}$ решений дифференциального уравнения (1) в предположении, что однородное уравнение (2) допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ с проекторами P и Q соответственно, т. е. существуют проекторы $P (P^2 = P)$ и $Q (Q^2 = Q)$, константы $K_{1,2} \geq 1$, $\alpha_{1,2} > 0$ такие, что имеют место оценки:

для всех $t, s \in \mathbb{R}_+$

$$\left\| U(t)PU^{-1}(s) \right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\left\| U(t)(E-P)U^{-1}(s) \right\| \leq K_1 e^{\alpha_1(t-s)}, \quad s \geq t,$$

для всех $t, s \in \mathbb{R}_-$

$$\left\| U(t)QU^{-1}(s) \right\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\left\| U(t)(E-Q)U^{-1}(s) \right\| \leq K_2 e^{\alpha_2(t-s)}, \quad s \geq t.$$

Теорема. *Пусть однородное уравнение (2) допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ с проекторами P и Q соответственно. Если оператор*

$$D = P - (E - Q) : \mathbf{B} \to \mathbf{B}, \tag{3}$$

действующий из банахового пространства $\mathbf{B}$ в себя, является обобщенно-обратимым, то:

1) для того чтобы существовали ограниченные на всей действительной оси решения уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы оператор-функция $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *удовлетворяла условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, f(t)\, dt = 0; \tag{4}$$

2) при условии (4) ограниченные на всей оси решения системы (1) имеют вид

$$x(t,c) = U(t) P \mathcal{P}_{N(D)} c + (Gf)(t) \quad \forall\ c \in \mathbf{B}, \tag{5}$$

где

$$(G[f])(t) = U(t) \begin{cases} \int\limits_0^t PU^{-1}(s) f(s)\, ds - \int\limits_t^{\infty} (E-P) U^{-1}(s) f(s)\, ds + \\ \qquad + PD^- \left[\int\limits_0^{\infty} (E-P) U^{-1}(s) f(s)\, ds + \right. \\ \qquad \left. + \int\limits_{-\infty}^{0} QU^{-1}(s) f(s) ds \right], \quad t \geq 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{t} QU^{-1}(s) f(s)\, ds - \int\limits_t^{0} (E-Q) U^{-1}(s) f(s)\, ds + \\ \qquad + (E-Q) D^- \left[\int\limits_0^{\infty} (E-P) U^{-1}(s) f(s)\, ds + \right. \\ \qquad \left. + \int\limits_{-\infty}^{0} QU^{-1}(s) f(s)\, ds \right], \ t \leq 0, \end{cases}$$

— обобщенный оператор Грина задачи об ограниченных на всей оси $\mathbb{R}$ *решениях со следующими свойствами:*

$$(G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t)\, dt, \quad (LG[f])(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)} QU^{-1}(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(t)$, D^- *— обобщенно-обратный оператор к оператору* D, $\mathcal{P}_{N(D)}$ *и* $\mathcal{P}_{N(D^*)}$ *— проекторы, которые проектируют* $\mathbf{B}$ *на ядро* $N(D)$ *и коядро* $N(D^*)$ *оператора* D *соответственно.*

Доказательство. Ограниченные на полуосях решения уравнения (1) имеют вид

$$x(t,\xi) = \begin{cases} U(t)P\xi + \int\limits_0^t U(t)PU^{-1}(s)f(s)\,ds - \\ - \int\limits_t^\infty U(t)(E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds, t \geq 0, \\ U(t)(E-Q)\xi + \int\limits_{-\infty}^t U(t)QU^{-1}(s)f(s)\,ds - \\ - \int\limits_t^0 U(t)(E-Q)U^{-1}(s)f(s)ds, t \leq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Покажем, что таким образом определенные решения действительно ограничены на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$. Для этого оценим интегралы в (6):

$$\left\| \int\limits_0^t U(t)PU^{-1}(s)f(s)\,ds \right\| \leq \int\limits_0^t \left\|U(t)PU^{-1}(s)\right\| \|f(s)\|\,ds \leq$$

$$\leq |||f||| \int\limits_0^t K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\,ds = |||f|||K_1 e^{-\alpha_1 t}\left(\frac{e^{\alpha_1 t}-1}{\alpha_1}\right) =$$

$$= \frac{K_1}{\alpha_1}\left(1-e^{-\alpha_1 t}\right)|||f||| \quad \forall t \geq 0.$$

Аналогично показывается, что (6) определяет ограниченные решения и для $t \leq 0$.

Решения (6) будут ограничены на всей действительной оси $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда элемент ξ банахового пространства $\mathbf{B}$ удовлетворяет условию

$$x(0+,\xi) = x(0-,\xi).$$

Таким образом, элемент $\xi \in \mathbf{B}$ банахового пространства должен удовлетворять операторному уравнению

$$(P-(E-Q))\xi = \int\limits_0^\infty (E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^0 QU^{-1}(s)f(s)\,ds. \tag{7}$$

Поэтому уравнение (1) имеет ограниченные на всей действительной оси решения тогда и только тогда, когда $\xi \in \mathbf{B}$ является решением операторного уравнения (7). Поскольку, согласно условиям теоремы, существует обобщенно-обратный оператор D^- к оператору D, то [3, с. 138; 4, с. 26; 5, с. 145; 6, с. 19] необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (7) является следующее:

$$\mathcal{P}_{N(D^*)}\left\{\int_0^{\infty}(E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds+\int_{-\infty}^{0}QU^{-1}(s)f(s)\,ds\right\}=0. \tag{8}$$

Ограниченные на всей действительной оси решения уравнения (1) будут определяться из (6), в котором элемент $\xi \in \mathbf{B}$ имеет вид

$$\xi = D^-\left\{\int_0^{\infty}(E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds+\int_{-\infty}^{0}QU^{-1}(s)f(s)\,ds\right\}+\mathcal{P}_{N(D)}c \quad \forall\, c\in\mathbf{B}. \tag{9}$$

Поскольку $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$ [4, с. 33], то $P\mathcal{P}_{N(D)} = (E-Q)\mathcal{P}_{N(D)}$ и с учетом (9) ограниченные на $\mathbb{R}$ решения (6) системы (1) можно записать в виде (5). Аналогично, из того, что $\mathcal{P}_{N(D^*)}D = 0$, следует $\mathcal{P}_{N(D^*)}Q = \mathcal{P}_{N(D^*)}(E-P)$. Поэтому условие (8) эквивалентно одному из следующих:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{P}_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds=0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{P}_{N(D^*)}QU^{-1}(s)f(s)\,ds=0. \tag{10}$$

С учетом обозначений для оператора $H(t)$ условия (10) того, что $f\in R(L)$, принимают вид (4). Свойства обобщенного оператора Грина

$$(G[f])(0+0)-(G[f])(0-0)=\int_0^{\infty}\mathcal{P}_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\mathcal{P}_{N(D^*)}QU^{-1}(s)f(s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t)f(t)\,dt, \quad (LG[f])(t)=f(t), \quad t\in\mathbb{R},$$

непосредственно следуют из построения обобщенного оператора Грина.

Теорема доказана.

В случае конечномерных пространств, когда $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$, из доказанной выше теоремы получим известный результат [7].

Примеры. Рассмотрим несколько примеров счетных систем дифференциальных уравнений, которые иллюстрируют рассмотренную выше теорему. Рассмотрим в пространстве ограниченных числовых последовательностей m [6, с. 25; 8] систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+f(t) \tag{11}$$

с оператором $A(t)$ в виде счетномерной матрицы, которая при каждом действительном значении t действует в банаховом пространстве $\mathbf{B} = m$, норма в котором определяется следующим образом:

$$|||A|||_{\mathbf{B}} = \sup_{t\in\mathbb{R}, i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}(t)| < \infty.$$

Здесь

$$x(t) = \operatorname{col}\{x_1(t), x_2(t), \ldots x_k(t), \ldots\} \in BC^1(\mathbb{R}, m),$$

$$f(t) = \operatorname{col}\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t), \ldots\} \in BC(\mathbb{R}, m)$$

— счетные вектор-столбцы.

1. Рассмотрим систему (11) с оператором

$$A(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \operatorname{th} t & 0 & 0 \end{matrix}}^{k} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & \operatorname{th} t & 0 \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \operatorname{th} t \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & -\operatorname{th} t & \ldots \\ \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что определенный выше оператор $A(t)$ принадлежит этому пространству. Действительно,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} < 2 \Rightarrow |||A||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |a_{ij}(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{th} t < +\infty \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Эволюционный оператор системы (11), (12) имеет вид

$$U(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} (e^t+e^{-t})/2 & 0 & 0 \end{matrix}}^{k} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & (e^t+e^{-t})/2 & 0 \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & (e^t+e^{-t})/2 \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 2/(e^t+e^{-t}) & \ldots \\ \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

обратный к $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2/(e^t+e^{-t}) & 0 & 0 \end{matrix}}^{k} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & 0 \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 2/(e^t+e^{-t}) \end{matrix} & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & (e^t+e^{-t})/2 & \ldots \\ \begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

и соответствующая однородная система экспоненциально дихотомична на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ с проекторами

$$P = \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

и

$$Q = \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{1 \qquad 0 \qquad \dots}^{k}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

соответственно. Таким образом, имеем

$$D = P - (E - Q) = 0, \quad \mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D^*)} = E,$$

а так как $\dim [\mathcal{P}_{N(D^*)} Q] = k$, то оператор $\mathcal{P}_{N(D^*)} Q$ конечномерный:

$$H(t) = [\mathcal{P}_{N(D^*)} Q] U^{-1}(t) = \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{1 \qquad 0 \qquad \dots}^{k}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) U^{-1}(t) = \operatorname{diag}\{H_k(t), 0\},$$

где

$$H_k(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t + e^{-t}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2/(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}$$

— $(k \times k)$-мерная матрица.

Согласно теореме 1, для того чтобы существовали ограниченные на всей прямой решения системы (11), (12), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_k(t) f(t)\, dt = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{e^t + e^{-t}}\, dt = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)}{e^t + e^{-t}}\, dt = 0. \end{array} \right.$$

Таким образом, для того чтобы система (11), (12) имела ограниченные на всей оси решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись ровно k условий, остальные же функции $f_i(t)$ при всех $i \geq k+1$ можно выбирать произвольным образом из класса $BC(\mathbb{R}, m)$. При этом система (11), (12) имеет счетное число линейно независимых ограниченных решений. Например, в качестве вектор-функции f из класса $BC(\mathbb{R}, m)$ можно выбрать произвольную вектор-функцию, у которой первые k компонент являются нечетными функциями.

2. Рассмотрим счетную систему (11) с оператором

$$A(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{\mathrm{th}\ t \quad\quad 0}^{k} & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 \quad\quad -\mathrm{th}\ t & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots \quad\quad \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \quad\quad 0 & -\mathrm{th}\ t & \ldots & \ldots \\ 0 \quad\quad 0 & 0 & \mathrm{th}\ t & \ldots \\ \ldots \quad\quad \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Эволюционный оператор

$$U(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{2/(e^t+e^{-t}) \quad 0 \quad 0}^{k} & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 2/(e^t+e^{-t}) \quad 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad 2/(e^t+e^{-t}) & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & (e^t+e^{-t})/2 & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

обратный к $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{(e^t+e^{-t})/2 \quad 0 \quad 0}^{k} & \ldots & \ldots \\ 0 \quad (e^t+e^{-t})/2 \quad 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad (e^t+e^{-t})/2 & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

и соответствующая однородная система экспоненциально дихотомична на полуосях $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ с проекторами

$$P = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0}^{k} & \ldots & \ldots \\ \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 1 & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 & 0 & \ldots \\ 0 \quad 0 & 0 & \ldots \\ \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

и

$$Q = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad 0 \quad \ldots}^{k} & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ 0 \quad \ldots \quad 0 & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 & \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

соответственно. Таким образом, имеем

$$D = P - (E - Q) = 0, \quad \mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D^*)} = E,$$

а оператор $\mathcal{P}_{N(D^*)}Q$ в этом случае бесконечномерный. Поэтому

$$H(t) = [\mathcal{P}_{N(D^*)}Q]U^{-1}(t) = \operatorname{diag}\{\overbrace{0, \ldots, 0}^{k},\ 2/(e^t + e^{-t}), \ldots, 2/(e^t + e^{-t}), \ldots\}.$$

Следовательно, условие разрешимости имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_i(t)}{e^t + e^{-t}}\,dt = 0, \quad i \geq k + 1. \tag{14}$$

Итак, для того чтобы система (11), (13) имела ограниченные на всей оси решения, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_i(t)$ при всех $i \geq k + 1$ удовлетворяли, в отличие от предыдущего примера, счетному числу условий (14); функции $f_i(t)$ при всех $i < k+1$ можно выбирать произвольным образом из класса $BC(\mathbb{R}, m)$. В этом случае система (11), (13) будет иметь k линейно независимых ограниченных на всей оси решений ($\dim[P\mathcal{P}_{N(D)}] = k$).

3. Рассмотрим в **B** счетную систему (11), в которой

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{th} t & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \operatorname{th} t & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Эволюционный оператор

$$U(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t + e^{-t}) & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & (e^t + e^{-t})/2 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

обратный к $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} (e^t + e^{-t})/2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 2/(e^t + e^{-t}) & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & e^t & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

и соответствующая однородная система экспоненциально дихотомична на полуосях $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ с проекторами

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$D = P - (E - Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = D^*,$$

$\dim N(D) = \dim N(D^*) = 2$ и оператор D есть нетеров и, более того, фредгольмов. Проекторы на нуль-пространства оператора D и сопряженного к нему определяются следующим образом:

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{N(D^*)},$$

в этом случае

$$P\mathcal{P}_{N(D)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{и поэтому} \quad \dim(\mathcal{P}_{N(D^*)}Q) = 1.$$

Условие разрешимости запишется так: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(t)}{e^t + e^{-t}}\,dt = 0$. В этом случае для существования ограниченных на всей оси решений системы уравнений (11), (15) необходимо и достаточно, чтобы у вектор-функции $f \in BC(\mathbb{R})$ только вторая компонента удовлетворяла условию разрешимости, а все остальные были произвольными. При этом система (11), (15) будет иметь однопараметрическую семью ограниченных на всей действительной оси решений.

4. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{B}$ систему дифференциальных уравнений (1) со счетной матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{th} t & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \operatorname{th} t & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\operatorname{th} t & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{th} t & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Легко видеть, что в этом случае эволюционный оператор

$$U(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t+e^{-t}) & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (e^t+e^{-t})/2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

обратный к $U(t)$ оператор

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} (e^t+e^{-t})/2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (e^t+e^{-t})/2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и соответствующая однородная система экспоненциально дихотомична на полуосях $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ с проекторами

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $D = P-(E-Q) = 0 = D^*$, $\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D^*)} = E$. В этом случае оператор $\mathcal{P}_{N(D^*)}Q$ бесконечномерный. Поэтому условие разрешимости принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_i(t)}{e^t+e^{-t}}\,dt = 0, \quad i = 2n, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, в этом случае имеем счетное количество условий, необходимых и достаточных для существования ограниченных на всей действительной оси решений системы (11), (16), и при выполнении этих условий система будет иметь счетную семью линейно независимых решений.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
2. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. — 1984. — **55**. — P. 225 – 256.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов — Кишинев: Штиинца, 1973. — 423 с.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1978. — 218 с.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
7. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. — 1999. — **2**, № 1. — P. 3 – 10.
8. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 306 с.

Получено 01.02.2005