УДК 517.928

УСЕРЕДНЕННЯ ПОЧАТКОВОЇ ТА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ КОЛИВНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Р. І. Петришин, Т. М. Сопронюк

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2

We give a new classification of fixed moments of the impulsive effect, including the uniform, functional, limited, quantitatively limited moments. A number of results that were obtained earlier for oscillating systems with uniform and limited moments of the impulsive effect has been transfered to similar systems with functional moments of the impulsive effects. Namely, we find estimates, which are exact with respect to a small parameter ε, for the deviation of solutions and their partial derivatives for the initial and the averaged initial value, boundary-value, and many point problems.

Наведено нову класифікацію фіксованих моментів імпульсної дії (рівномірні, функціональні, граничні, кількісно граничні). Ряд результатів, отриманих раніше для коливних систем із рівномірними та граничними моментами імпульсної дії, перенесено на такі ж системи з функціональними моментами імпульсної дії. А саме, встановлено точні відносно малого параметра ε оцінки відхилення розв'язків та їх частинних похідних вихідної й усередненої початкової, крайової та багатоточкової задач.

1. Вступ. Для дослідження резонансних систем без імпульсної дії відомий підхід, запропонований А. М. Самойленком і Р. І. Петришиним [1, 2], який ґрунтується на рівномірних оцінках осциляційних інтегралів.

Якщо ж зазначені системи підлягають імпульсній дії у фіксовані моменти часу, то крім оцінок осциляційних інтегралів важливу роль відіграють оцінки осциляційних сум.

При накладанні певних обмежень на частоти за допомогою цих оцінок розв'язано широке коло задач [1, 3–11], в тому числі обґрунтовано метод усереднення задачі Коші та крайових задач для багаточастотних систем з імпульсною дією. Усереднена система при цьому є гладкою, а функції, що визначають її праву частину, не містять осцилюючих складових.

Класифікація систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією наведена у монографії [12]. Там розглядаються системи з фіксованими і нефіксованими моментами імпульсної дії та розривні динамічні системи.

Ми ж будемо вивчати багаточастотні системи диференціальних рівнянь з фіксованими моментами імпульсної дії $t_j,\ j = 1, 2, \ldots$.

Розглянемо послідовність відстаней між моментами імпульсної дії $\{\bar{t}_j\}_1^\infty$, де $\bar{t}_j \equiv t_{j+1} - t_j$. Для зручності введемо ряд означень.

Означення 1. *Моменти імпульсної дії (послідовність відстаней) назвемо рівномірними (рівномірною), якщо для всіх $j \in N$ виконується рівність*

$$t_{j+1} = t_j + \theta, \quad \theta > 0, \quad \theta = \text{const}.$$

Означення 2. *Моменти імпульсної дії (послідовність відстаней) назвемо функціо-*

нальними (функціональною), якщо для всіх $j \in N$ *виконується рівність*

$$t_{j+1} = t_j + \theta(\varepsilon\, t_j). \tag{1}$$

Тут $\theta(\tau)$ — *гладка функція,* $\theta(\tau) \geq \theta_0 = \mathrm{const} > 0$ *для всіх* $\tau > 0$, ε — *малий додатний параметр.*

Означення 3. *Моменти імпульсної дії (послідовність відстаней) назвемо граничними (граничною), якщо існує границя*

$$\lim_{j\to\infty} \bar{t}_j = \theta > 0, \quad \theta = \mathrm{const}.$$

Означення 4. *Моменти імпульсної дії назвемо кількісно граничними, якщо існує границя*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K(t^0,t)}{t} = \frac{1}{\theta}, \quad \theta = \mathrm{const}.$$

Тут $K(t^0,t)$ — *кількість моментів імпульсної дії на інтервалі* (t^0,t).

Очевидно, що граничні моменти імпульсної дії є і кількісно граничними, а зворотне твердження є хибним.

Системи звичайних диференціальних рівнянь з рівномірними і кількісно граничними моментами імпульсної дії широко досліджувались у монографії [12]. У статті [3] А. М. Самойленко вперше обґрунтував метод усереднення для імпульсних систем звичайних диференціальних рівнянь стандартного вигляду з кількісно граничними моментами імпульсної дії.

Роботи [1, 4–9] присвячено якісним методам досліджень багаточастотних систем диференціальних рівнянь з рівномірними і граничними моментами імпульсної дії. Аналізуючи отримані там результати, зазначимо, що саме тип моментів імпульсної дії суттєво впливає на порядок точних відносно малого параметра ε оцінок. Далі будемо розглядати *коливні системи з функціональними моментами імпульсної дії*, тобто такі, для яких справджується умова (1).

2. Постановка задачі. Розглянемо систему вигляду

$$\begin{gathered}\frac{dx}{d\tau} = a\,(x,\varphi,\xi,\tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b\,(x,\varphi,\xi,\tau), \quad \tau \neq \tau_j, \\ \Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon\, p(x,\varphi,\xi,\tau_j), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon\, q\,(x,\varphi,\xi,\tau_j),\end{gathered} \tag{2}$$

в якій $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{D}$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \in R^m$, $Q \ni (\xi_1,\ldots,\xi_s) = \xi$ — деякий параметр, $\varepsilon t = \tau \in I = [0,L]$, $(0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, t_j — функціональні моменти імпульсної дії, $\varepsilon t_j = \tau_j$, $\mathcal{D}$, Q — обмежені відкриті області, $0 < \tau_1 \leq \theta_0\varepsilon$, θ_0 — стала, не залежна від ε, $\tau_{j+1} > \tau_j$ для всіх $j \in N$, $\Delta x|_{\tau=\tau_j} = x(\tau_j+0) - x(\tau_j-0)$, $\Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varphi(\tau_j+0) - \varphi(\tau_j-0)$.

Припустимо, що функції $c\,(x,\varphi,\xi,\tau) = (a\,(x,\varphi,\xi,\tau), b\,(x,\varphi,\xi,\tau))$ і $r\,(x,\varphi,\xi,\tau) = (p(x,\varphi,\xi,\tau), q\,(x,\varphi,\xi,\tau))$ задовольняють умову Ліпшиця по всіх аргументах, 2π-періодичні по кожній компоненті вектора φ, розкладаються в рівномірно по φ збіжні в $G \equiv \mathcal{D} \times$

$\times R^m \times Q \times I$ ряди Фур'є

$$\sum_k c_k \exp\{i(k,\varphi)\}, \quad \sum_k r_k \exp\{i(k,\varphi)\},$$

причому

$$\sum_{\|k\|>0} \|c_k\|\,\|k\|^{-\frac{1}{l+1}} \le \sigma_1, \quad \sum_k \|k\|\,\|r_k\| \le \sigma_1,$$
$$(x,\xi,\tau) \in \mathcal{D} \times Q \times I, \quad \sigma_1 = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Тут i — уявна одиниця, (k,φ) — скалярний добуток в R^m, $k = (k_1,\ldots,k_m)$ — вектор з цілочисловими координатами, $\|k\| = \sqrt{(k,k)}$, норму матриці узгоджено з евклідовою нормою вектора, а $c_k = c_k(x,\xi,\tau)$ і $r_k = r_k(x,\xi,\tau)$ — коефіцієнти Фур'є функцій $c(x,\varphi,\xi,\tau)$ і $r(x,\varphi,\xi,\tau)$.

Нехай $\theta(\tau) \in C^l_{[0,L]}$, $\omega(\tau) \in C^l_{[0,L]}$, $l \ge m$,

$$\det(W_l^T(\tau)\,W_l(\tau)) \ne 0, \quad W_l(\tau) = \left(\frac{d^g(\theta(\tau)\,\omega_\nu(\tau))}{d\tau^g}\right)_{g,\nu=1}^{l,m}, \quad \tau \in I, \tag{4}$$

де $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_m)$, W_l^T — транспонована матриця.

Очевидно, що на відрізку $[0,L]$ виконуються нерівності

$$\theta_1 \le \theta(\tau) \le \theta_2, \tag{5}$$

$$|\theta'(\tau)| \le \theta_2, \quad \|\omega'(\tau)\| \le \sigma_2, \quad \|\omega(\tau)\| \le \sigma_2, \tag{6}$$

де $\sigma_2, \theta_1, \theta_2$ — деякі додатні сталі.

Розглянемо далі метод усереднення для системи (2) і поширимо отримані раніше [4–9] результати для коливних систем з рівномірними та граничними моментами імпульсної дії на випадок функціональних послідовностей. Подібні питання досліджувались у [10, 11].

3. Рівномірні оцінки осциляційних інтегралів і сум. Розглянемо осциляційні інтеграл і суму

$$I_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon) = \int_{\bar t}^{\tau+\bar t} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{y}(k,\omega(z))\,dz\right\} dy,$$
$$S_k(\tau,\bar\tau,\bar t,\varepsilon) = \sum_{\bar t \le \tau_j < \bar t+\tau} \varepsilon \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar\tau}^{\tau_j}(k,\omega(z))\,dz\right\}, \tag{7}$$

де $k = (k_1,\ldots,k_m) \in \mathbf{Z}^m\backslash\{0\}$, $(k,\omega(z)) = k_1\omega_1(z) + \ldots + k_m\omega_m(z)$, $\bar\tau \ge t$, $\bar t \ge t$, $t \in R$, $\tau_j/\varepsilon = t_j$ — функціональні моменти імпульсної дії.

Лема 1. *Нехай виконуються припущення (1), (4). Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджуються оцінки*

$$|I_k(\tau, 0, 0, \varepsilon)| \le \sigma_3 \|k\|^{-\frac{1}{l+1}} \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}, \tag{8}$$

$$|S_k(\tau, 0, 0, \varepsilon)| \le \sigma_4 \|k\| \varepsilon^{\frac{1}{2l}} \tag{9}$$

зі сталими σ_3 і σ_4, залежними від L, але не залежними від k і ε.

Доведення. Розглянемо спочатку осциляційний інтеграл. При зроблених припущеннях функція $(k, \theta(z)\,\omega(z))$, а отже, і функція $(k, \omega(z))$ мають на $[0, L]$ скінченне число нулів $z_1 < z_2 < \ldots < z_s$ кратності відповідно $r_1, r_2, \ldots, r_s$, де $r_j \le l$ для всіх $j = \overline{1, s}$ [2].

Як і в роботі [1], подамо відрізок $[0, \tau]$ у вигляді об'єднання множин відрізків $[0, \tau] = A_1(\tau) \cup B_1(\tau)$ так, що множина $B_1(\tau)$ складається із скінченного числа відрізків довжини, не більшої за $2\mu_1$, а в кожній точці множини $A_1(\tau)$ функція $(k, \theta(z)\,\omega(z))'$ відмінна від нуля і справджується оцінка

$$|(k, \theta(z)\,\omega(z))| \ge \sigma_5 \|k\|\, \mu_1^l. \tag{10}$$

Тут $\mu_1 < 1$ — деяке додатне число, яке означимо нижче.

Розглянемо складові відрізки $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ множини $A_1(\tau)$. Очевидно, що на них функція $(k, \theta(z)\,\omega(z))$ є монотонною. На підставі нерівностей (5), (6), (10) маємо

$$\left| \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{y}(k,\omega(z))\,dz}\, dy \right| \le \left| \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} \frac{\varepsilon}{i\,(k,\, \omega(y))}\, d e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\tau}^{y}(k,\omega(z))\,dz} \right| \le$$

$$\le \varepsilon \left(\frac{2\theta_2}{\sigma_5 \|k\|\, \mu_1^l} + \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} \frac{|(k, \omega(y))'|}{(k, \omega(y))^2}\, dy \right) \le$$

$$\le \varepsilon \left(\frac{2\theta_2}{\sigma_5 \|k\| \mu_1^l} + \theta_2 \left| \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\theta(y)(k, \omega(y))} \right) \right| + \theta_2 \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} \left| \frac{\theta'(y)}{\theta(y)(k, \omega(y))} \right| dy \right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon\theta_2}{\sigma_5 \|k\|\, \mu_1^l} \left(4 + \theta_2(\beta_\nu - \alpha_\nu)\right).$$

Далі, повторюючи схему доведення з [1], отримуємо оцінку

$$|I_k(\tau, 0, 0, \varepsilon)| \le \tilde{\sigma}_5 \left(\mu_1 + \frac{\varepsilon \mu_1^{-l}}{\|k\|} \right),$$

в якій $\tilde{\sigma}_5$ не залежить від μ_1 і ε, але залежить від L. Звідси при $\mu_1^{l+1} = \varepsilon \|k\|^{-1}$, $\sigma_4 = 2\tilde{\sigma}_5$ дістанемо нерівність (8).

Тепер розглянемо осциляційну суму. Знову подамо відрізок $[0, \tau]$ у вигляді $[0, \tau] = A_2(\tau) \cup B_2(\tau)$. Віднесемо до множини $B_2(\tau)$ відрізки малої довжини $2\mu_2$, на яких є резонанси, і відрізки довжиною $2\mu_2$, середини яких є нулями функції $(\theta(z)(k, \omega(z)))'$. На відрізках множини $A_2(\tau)$ справджується оцінка [6]

$$|(k, \theta(z)\omega(z))'| \geq \sigma_5 \, \|k\| \, \mu_2^{l-1}, \quad \sigma_5 = \text{const}. \tag{11}$$

Як і в роботі [6], оцінимо суму $S_k(\tau, 0, 0, \varepsilon)$ на обох множинах:

$$|S_k(\tau, 0, 0, \varepsilon))\,| \leq \left| \sum_{\tau_j \in A_2(\tau)} \varepsilon \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_j} (k, \omega(z))\, dz \right\} \right| + 2(d(k) + s)\mu_2 \leq$$

$$\leq D + \sum_{\nu=1}^{d(k)+s+1} \sum_{\alpha_\nu \leq \tau_j < \beta_\nu} D_j + 2(d(k) + s)\, \mu_2, \tag{12}$$

де

$$D = (d(k) + s + 1) \left(\varepsilon + \frac{1}{\min\limits_{\tau_j \in A_2(\tau)} \left| \exp\left\{ \dfrac{i}{\varepsilon} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (k, \omega(z))\, dz \right\} - 1 \right|} \right),$$

$$D_j = \frac{\left| \int\limits_{\tau_{j+1}}^{\tau_{j+2}} (k, \omega(z))\, dz - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (k, \omega(z))\, dz \right|}{4 \left| \sin \dfrac{1}{2\,\varepsilon} \int\limits_{\tau_{j+1}}^{\tau_{j+2}} (k, \omega(z))\, dz \right| \left| \sin \dfrac{1}{2\,\varepsilon} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (k, \omega(z))\, dz \right|}, \tag{13}$$

$d(k)$ — кількість резонансних відрізків, s — кількість нулів функції $(\theta(z)(k, \omega(z)))'$ на відрізку $[0, \tau]$, $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ — складовий відрізок множини $A_2(\tau)$, на якому функція $\theta(z)(k, \omega(z))$ є монотонною.

Очевидно, що резонансні явища виникають, коли знаменник D_j дорівнює нулю або близький до нуля. Зазначимо, що $2\mu_2$-околи таких точок множині $A_2(\tau)$ не належать.

Розглянемо осциляційну суму при $\tau_j \in [\alpha_\nu, \beta_\nu]$. Як і в роботі [6], використовуючи нерівність

$$|\sin x| \geq \frac{2}{\pi} \min_{n \in Z} |x - \pi\, n|, \quad x \in R,$$

маємо

$$\left| \sin \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (k, \omega(z))\, dz \right| \geq 2 \min_{n \in Z} \left| \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_j + \varepsilon\theta(\tau_j)} (k, \omega(z))\, dz - n \right|. \tag{14}$$

Отже, резонансні явища виникають, коли

$$f(y) \equiv \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{y}^{y+\varepsilon\theta(y)} (k, \omega(z))\, dz,$$

як функція y, набуває цілочислових і близьких до них значень.

Оскільки $|f(y)| \leq \|k\|\theta_2\sigma_2/(2\pi) \equiv \gamma$, то існує не більше ніж $d(k) \leq 2\gamma+1$ цілих значень функції $f(y)$.

Нехай число $f(\tau')$ знаходиться в ζ-околі деякого цілого числа n_1, $\zeta < \delta/2 < 1/2$. Величину δ означимо нижче. Покажемо, що в довільній точці τ'', в якій справджується нерівність $|\tau'' - \tau'| > \mu_2$, виконується оцінка $|f(\tau'') - n_1| \geq \delta$.

Враховуючи нерівності (5), (6), (11) і монотонність функції $\theta(z)(k, \omega(z))$ на кожному відрізку $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, маємо

$$\big|[f(\tau'')\ -n_1] - [f(\tau') - n_1]\big| = \frac{1}{2\pi}\left|\theta(\tau'')(k, \omega(\tau'' + \varepsilon\bar{\lambda})) - \theta(\tau')(k, \omega(\tau' + \varepsilon\lambda))\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big|\big[\theta(\tau'')(k, \omega(\tau'')) - \theta(\tau')(k, \omega(\tau'))\big] - \big[\theta(\tau'')(k, \omega(\tau'')) - \theta(\tau'')(k, \omega(\tau'' + \varepsilon\bar{\lambda}))\big] -$$

$$- \big[\theta(\tau')(k, \omega(\tau' + \varepsilon\lambda)) - \theta(\tau')(k, \omega(\tau'))\big]\Big| \geq \frac{\|k\|}{2\pi}\Big(\sigma_5\mu_2^{l-1}\left|\tau' - \tau''\right| - 4\,\varepsilon\theta_2^2\sigma_2\Big) \geq$$

$$\geq \frac{\sigma_5\,\|k\|}{2\pi}\mu_2^{l-1}\left(\left|\tau' - \tau''\right| - \frac{\mu_2}{2}\right) \equiv \frac{\delta}{2} \tag{15}$$

при $\varepsilon < \dfrac{\sigma_5}{8\,\theta_2^2\,\sigma_2}\,\mu_2^l$. Тут λ, $\bar{\lambda}$ — деякі точки з відрізка $[\theta_1, \theta_2]$.

Позначимо через τ_{j_0} найближчу до τ' точку імпульсної дії, розташовану поза її μ_2-околом. Тоді для всіх $j \in N$ виконується нерівність

$$|f(\tau_j) - n_1| \geq \delta \geq \sigma_6\,\|k\|\mu_2^{l-1}(\mu_2 + |j - j_0|\theta_1\,\varepsilon) \tag{16}$$

зі сталою $\sigma_6 = \sigma_5/(2\pi)$.

Отже, існує $d(k)$ відрізків довжини $2\mu_2$, на яких функція $f(y)$ набуває цілих і близьких до цілих значень, а поза ними для кожного цілого $n_1 \in [-\gamma, \gamma]$ виконується нерівність (16), в якій j_0 визначається умовою, що τ_{j_0} найближча з точок імпульсної дії τ_j, $j \geq 1$, до відповідної точки τ'.

Оцінимо спочатку ті доданки D_j, для яких мінімум функції $|f(\tau_j) - n|$ по n досягається при $n = n_1 \in [-\gamma, \gamma]$. Нехай ξ — номер точки імпульсної дії τ_ξ з відрізка $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, в якій досягається мінімум функції $|f(\tau_j) - n_1|$ по j.

Враховуючи (14), (16), одержуємо нерівності

$$D_j \leq \varepsilon\frac{|\theta(\tau_{j+1})(k, \omega(\tau_{j+1}^*)) - \theta(\tau_j)(k, \omega(\tau_j^*))|}{16\,\min\limits_{n\in Z}|f(\tau_{j+1}) - n|\,\min\limits_{n\in Z}|f(\tau_j) - n|} \leq$$

$$\leq \varepsilon\frac{|\theta(\tau_{j+1}) - \theta(\tau_j)|\,\Big|(k, \omega(\tau_{j+1}^*))\Big| + \theta(\tau_j)|(k, \omega(\tau_{j+1}^*)) - (k, \omega(\tau_j^*))|}{16\sigma_6^2\,\|k\|^2\mu_2^{2l-2}\,(\mu_2 + |j+1-\xi|\theta_1\varepsilon)\,(\mu_2 + |j-\xi|\theta_1\varepsilon)}.$$

Далі на підставі нерівностей (6), (13) дістаємо

$$\left| \sum_{\tau_j \in A_2(\tau)} \varepsilon \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{\tau_j} (k, \omega(z))\, dz \right\} \right| \leq$$

$$\leq (d(k)+s+1) \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon\, \pi}{4\, \theta_1 \sigma_6\, \|k\| \mu_2^l} + \frac{3\, \varepsilon^2\, \theta_2^2\, \sigma_2}{16\, \sigma_6^2\, \|k\|\, \mu_2^{2l}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+j\theta_1\, \varepsilon/\mu_2)^2} + 2 \right) \right).$$

Враховуючи нерівності (12) і

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+j\theta_1\varepsilon/\mu_2)^2} < \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(1+x\theta_1\varepsilon/\mu_2)^2}\, dx < \frac{\mu_2}{\theta_1\varepsilon},$$

маємо

$$|S_k(\tau,0,0,\varepsilon)| \leq \sigma_7 (d(k)+s+1) \left(\mu_2 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\mu_2^l} + \frac{\varepsilon^2}{\mu_2^{2l}} + \frac{\varepsilon}{\mu_2^{2l-1}} \right)$$

з деякою додатною сталою σ_7.

Вибираючи

$$\mu_2 = \varepsilon^{\frac{1}{2\,l}}, \quad \sigma_4 = \frac{5(d(k)+s+1)\sigma_7}{\|k\|},$$

отримуємо оцінку (9).

Лему доведено.

Для оцінки осциляційного інтеграла і суми (7) накладемо обмеження

$$\left\|(W_l^T(\tau) W_l(\tau))^{-1} W_l^T(\tau)\right\| \leq \sigma_1, \quad \tau \in R_{t_0} \equiv [t_0, \infty). \tag{17}$$

Лема 2. *Якщо функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}$, $\nu = \overline{0,l}$, рівномірно неперервні на R_{t_0}, для всіх $\tau \in R_{t_0}$ виконуються умови (1), (5), (17) і одне з двох припущень:*

1) $\|\omega(\tau))\| \leq \sigma_2$, $|\theta'(\tau)| \leq \theta_2$;

2) $\|\omega'(\tau))\| \leq \sigma_2$,

то для всіх $\tau \in [\bar{t}, \bar{t}+L]$, $\bar{t} \geq t$, $\bar{\tau} \geq t$, $t \in R_{t_0}$, і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$|S_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)| \leq \tilde{\sigma}_4\, \|k\|\, \varepsilon^{\frac{1}{2l+1}}. \tag{18}$$

Якщо ж виконуються обидва припущення, то замість (18) дістанемо оцінку

$$|S_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)| \leq \bar{\sigma}_4\, \|k\| \varepsilon^{\frac{1}{2l}}. \tag{19}$$

Тут $\bar{\sigma}_4$ і $\tilde{\sigma}_4$ — сталі, не залежні від k, ε, $\bar{\tau}$, $\bar{t}$, але залежні від L.

Доведення. З умови рівномірної неперервності функції $\theta(\tau)\,\omega(\tau)$ на R_{t_0} випливає існування такої сталої $c = c(L)$, що справджується оцінка

$$\max_{[\bar t,\bar t+L]}\{(k,\theta(\tau)\omega(\tau))\} - \min_{[\bar t,\bar t+L]}\{(k,\theta(\tau)\omega(\tau))\} \le \|k\|\,c. \tag{20}$$

Врахувавши (20), визначимо кількість цілих значень функції $f(\tau)$ на відрізку $[\bar t, \bar t + L]$. Нехай τ'', τ' — точки відповідно максимуму і мінімуму функції $f(\tau)$ на проміжку $[\bar t, \bar t + L]$. Припустимо, що виконується припущення 1 леми. Тоді

$$f(\tau'') - f(\tau') = \frac{1}{2\pi}\Bigg[\theta(\tau'' + \varepsilon\bar\lambda)(k, \omega(\tau'' + \varepsilon\,\bar\lambda)) - \theta(\tau' + \varepsilon\,\lambda)(k, \omega(\tau' + \varepsilon\,\lambda)) -$$
$$- \big(\theta(\tau'' + \varepsilon\,\bar\lambda)(k, \omega(\tau'' + \varepsilon\,\bar\lambda)) - \theta(\tau'')(k, \omega(\tau'' + \varepsilon\,\bar\lambda))\big) -$$
$$- \big(\theta(\tau')(k, \omega(\tau' + \varepsilon\,\lambda)) - \theta(\tau' + \varepsilon\,\lambda)(k, \omega(\tau' + \varepsilon\,\lambda))\big)\Bigg]. \tag{21}$$

Звідси

$$f(\tau'') - f(\tau') \le \frac{\|k\|}{2\,\pi}\left(c + 4\varepsilon\theta_2^2\sigma_2\right),$$

тому кількість $d(k)$ цілих значень функції $f(\tau)$ на відрізку $[\bar t, \bar t + L]$ не перевищує числа $\|k\|\left(c + 4\theta_2^2\sigma_2\right)/\pi + 1$.

Отже, далі з леми 1 випливає нерівність (19).

Для встановлення оцінки (18) зазначимо, що при доведенні леми 1 оцінку (16) одержано на підставі припущення 2 леми 2. Якщо використати тепер припущення 1 і врахувати рівність (21), в якій точки τ'', τ' мають той же зміст, що і в (15), то знов отримаємо нерівності

$$\big|f(\tau'') - f(\tau')\big| \ge \frac{\|k\|}{2\,\pi}\left(\sigma_5\,\mu_2^{l-1}|\tau'' - \tau'| - 4\,\varepsilon\,\theta_2^2\,\sigma_2\right) \ge \frac{\delta}{2}. \tag{22}$$

Тоді оцінка (16) набуде вигляду

$$|f(\tau_j) - n_1| \ge \delta \ge \sigma_6\,\|k\|\mu_2^l, \quad j \in N. \tag{23}$$

Щодо оцінки доданків D_j, то тут в доведенні леми 1 використовувались обидва припущення леми 2. Відмовимось, наприклад, від першого з них. Тоді, враховуючи (23) і монотонність функції $\theta(z)(k, \omega(z))$, одержуємо

$$\sum_{\alpha_\nu \le \tau_j < \beta_\nu} D_j \le \frac{\varepsilon}{4\delta^2}\sum_{\alpha_\nu \le \tau_j < \beta_\nu}\Bigg|[\theta(\tau_{j+1})(k, \omega(\tau_{j+1})) -$$
$$- \theta(\tau_j)\,(k, \omega(\tau_j))] - [\theta(\tau_{j+1})(k, \omega(\tau_{j+1})) - \theta(\tau_{j+1})\,(k, \omega(\tau_{j+1} + \varepsilon\,\lambda_{j+1}))] -$$
$$- [\theta(\tau_j)(k, \omega(\tau_j + \varepsilon\,\lambda_j)) - \theta(\tau_j)(k, \omega(\tau_j))]\Bigg| \le \frac{\varepsilon(2\theta_2\,\sigma_2 + 2\theta_2^2\sigma_2(\beta_\nu - \alpha_\nu)/\theta_1)}{\|k\|\,\mu_2^{2l}}.$$

Така ж оцінка справджується і в тому випадку, коли виконується лише припущення 1 леми 2.

Об'єднуючи останню оцінку з (12), дістаємо нерівність

$$|S_k(\tau, 0, 0, \varepsilon)| \leq \tilde{\sigma}_7(d(k) + s + 1)\left(\mu_2 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\mu_2^l} + \frac{\varepsilon}{\mu_2^{2l}}\right)$$

з деякою додатною сталою $\tilde{\sigma}_7$.

Вибираючи

$$\mu_2 = \varepsilon^{\frac{1}{2l+1}}, \quad \tilde{\sigma}_4 = \frac{4(d(k) + s + 1)\tilde{\sigma}_7}{\|k\|},$$

отримуємо нерівність (18).

Лему доведено.

Зауваження 1. Якщо в лемі 2 взагалі відмовитись від обмежень $|\theta'(\tau)| \leq \theta_2$, $\|\omega'(\tau))\| \leq \leq \sigma_2$, а вимагати лише рівномірну неперервність на R_{t_0} функцій $\theta(\tau)$ або $\omega(\tau)$, то для довільного досить малого $\eta > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$, що при $\tau \in [\bar{t}, \bar{t} + L]$, $\bar{t} \geq t$, $\bar{\tau} \geq t$, $t \in R_{t_0}$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$|S_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)| \leq \|k\|\, \eta.$$

Використовуючи методику, розроблену в роботах [1, 4], та враховуючи схему доведення леми 1, дістаємо таке твердження.

Лема 3. *Нехай:*

1) виконується умова (17), а функції $(\theta(\tau)\, \omega(\tau))^{(\nu)}$, $\nu = \overline{0, l}$, *рівномірно неперервні на* R_{t_0};

2) $0 < \theta(\tau) \leq \theta_2$, $\tau \in R_{t_0}$;

3) $|\theta'(\tau)| \leq \theta_2$, $\tau \in R_{t_0}$.

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ *для всіх* $\tau \in [\bar{t}, \bar{t} + L]$, $\bar{t} \geq t$, $\bar{\tau} \geq t$, $t \in R_{t_0}$, *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справджується оцінка*

$$|I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)| \leq \bar{\sigma}_3\, \|k\|^{-\frac{1}{l+1}} \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}.$$

Якщо замість припущення 3 вимагати виконання припущення $\|\omega'(\tau))\| \leq \sigma_2$, $\tau \in R_{t_0}$, *то оцінка осциляційного інтеграла набере вигляду*

$$|I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)| \leq \tilde{\sigma}_3\, \|k\|^{-\frac{1}{2l+1}} \varepsilon^{\frac{1}{2l+1}},$$

де $\bar{\sigma}_3$ *і* $\tilde{\sigma}_3$ *— сталі, залежні від* L, *але не залежні від* $\bar{t}, \bar{\tau}, \varepsilon$ *і* k.

4. Усереднення на відрізку. Поставимо у відповідність системі (2) усереднену по кутових змінних φ систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \xi, \tau) + \frac{\bar{p}(\bar{x}, \xi, \tau)}{\theta(\tau)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}, \xi, \tau) + \frac{\bar{q}(\bar{x}, \xi, \tau)}{\theta(\tau)}, \tag{24}$$

де

$$\begin{aligned}&\left[\bar{a}(x,\xi,\tau),\bar{b}(x,\xi,\tau),\bar{p}(x,\xi,\tau),\bar{q}(x,\xi,\tau)\right] = \\ &\qquad\qquad = \left[a_0(x,\xi,\tau),b_0(x,\xi,\tau),p_0(x,\xi,\tau),q_0(x,\xi,\tau)\right] = \\ &= (2\pi)^{-m}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\left[a(x,\varphi,\xi,\tau),b(x,\varphi,\xi,\tau),p(x,\varphi,\xi,\tau),q(x,\varphi,\xi,\tau)\right]\,d\varphi_1\ldots d\varphi_m.\end{aligned}$$

Позначимо через $x_\tau(t,y,\psi,\xi,\varepsilon)$, $\varphi_\tau(t,y,\psi,\xi,\varepsilon)$ і $\bar{x}_\tau(t,y,\xi)$, $\bar{\varphi}_\tau(t,y,\psi,\xi,\varepsilon)$ розв'язки систем відповідно (2) і (24), які при $\tau=t$ набувають значень y,ψ.

Нехай $\mathcal{D}\supset\mathcal{D}_1$ — деяка куля в R^n.

Теорема 1. *Припустимо, що:*

1) виконуються умови (1), (3), (4);

2) крива $\bar{x}=\bar{x}_\tau(0,y,\zeta)$ лежить в $\mathcal{D}\times Q$ разом із своїм ρ-околом при $\tau\in[0,L]$.

Тоді існує таке досить мале додатне ε_0, що для всіх $\tau\in[0,L]$, $\psi\in R^m$, $\zeta\in Q$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$\|U_\tau(0,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\|\le\sigma_8\,\varepsilon^{\frac{1}{4l}}, \tag{25}$$

де $U_\tau(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon)=(x_\tau(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon)-\bar{x}_\tau(t,y,\zeta),\varphi_\tau(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon)-\bar{\varphi}_\tau(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon))$, $\sigma_8=\sigma_8(L)$.

Якщо ж функції $c(x,\varphi,\xi,\tau)$ і $r(x,\varphi,\xi,\tau)$ мають неперервні частинні похідні першого порядку по всіх змінних і вони задовольняють умову Ліпшиця по всіх аргументах зі сталою σ_1 в області G, а замість умов (3) припустити, що в кожній точці $(x,\xi,\tau)\in\in\mathcal{D}\times Q\times I$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}&\sum_{k\ne0}\left[\|k\|\,\|c_k\|+\left\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial c_k}{\partial\xi}\right\|\right]\,\|k\|^{-1/(l+1)}\le\sigma_1,\\ &\sum_{k}\left[\|k\|\,\|r_k\|+\left\|\frac{\partial r_k}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial r_k}{\partial\xi}\right\|\right]\,\|k\|\le\sigma_1,\end{aligned} \tag{26}$$

то можна вказати таке $\varepsilon_0>0$, що при $\tau\in I$, $y\in\mathcal{D}_1$, $\psi\in R^m$, $\zeta\in Q$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ додатково має місце оцінка

$$\left\|\frac{\partial U_\tau(0,y,\psi,\zeta,\varepsilon)}{\partial y}\right\|+\left\|\frac{\partial U_\tau(0,y,\psi,\zeta,\varepsilon)}{\partial\,\psi}\right\|+\left\|\frac{\partial U_\tau(0,y,\psi,\zeta,\varepsilon)}{\partial\,\zeta}\right\|\le\bar{\sigma}_8\,\varepsilon^{\frac{1}{4l}}. \tag{27}$$

Доведення. У праці [4] розглянуто аналогічну теорему для імпульсних багаточастотних систем у випадку рівномірних моментів імпульсної дії, коли $\theta(\tau)=\mathrm{const}$. Її доведення ґрунтується на відповідних оцінках осциляційних інтегралів і сум. Використаємо запропоновану там схему доведення, застосувавши оцінки (8), (9).

З систем (2), (24) матимемо

$$U_\tau(0,y,\psi,\zeta,\varepsilon) = \int\limits_0^\tau \left(c(x(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon),\varphi(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon),\zeta,t) - \bar{c}(\bar{x}(t,y,\zeta),\zeta,t)\right)\,dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{0<\tau_j<\tau} r(x(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon),\varphi(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon),\zeta,\tau_j) - \int\limits_0^\tau \frac{\bar{r}(\bar{x}(t,y,\zeta),\zeta,t)}{\theta(t)}\,dt. \qquad (28)$$

Для встановлення нерівності (25) залишилось оцінити суму

$$S = \sum_{0<\tau_j<\tau}\left(\varepsilon\bar{r}(\bar{x}(\tau_j,y,\zeta),\zeta,\tau_j) - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\bar{r}(\bar{x}(t,y,\zeta),\zeta,t)}{\theta(t)}\,dt\right). \qquad (29)$$

Очевидно, що

$$S = \sum_{0<\tau_j<\tau}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\left(\frac{\bar{r}(\bar{x}(\tau_j,y,\zeta),\zeta,\tau_j)}{\theta(\tau_j)} - \frac{\bar{r}(\bar{x}(t,y,\zeta),\zeta,t)}{\theta(t)}\right)\,dt =$$

$$= \sum_{0<\tau_j<\tau}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{(\theta(t)-\theta(\tau_j))\bar{r}(\bar{x}(\tau_j,y,\zeta),\zeta,\tau_j)}{\theta(\tau_j)\theta(t)}\,dt+$$

$$+\sum_{0<\tau_j<\tau}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\bar{r}(\bar{x}(\tau_j,y,\zeta),\zeta,\tau_j) - \bar{r}(\bar{x}(t,y,\zeta),\zeta,t)}{\theta(t)}\,dt, \quad \|S\| \le \sigma_9\varepsilon, \quad \sigma_9 = \mathrm{const}.$$

Використовуючи останню нерівність, оцінки (8), (9) і схему доведення з [4], одержуємо інтегро-сумарну нерівність

$$\|U_\tau(0,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\| \le \sigma_1\int\limits_0^\tau \|U_\tau(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\|\,dt + \varepsilon\,\sigma_1\sum_{0<\tau_j<\tau}\|U_\tau(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\|+$$

$$+\sigma_{10}\left(\Delta_1+\varepsilon+(\varepsilon^{\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{l+1}})/\Delta_1\right)$$

з деякими додатними сталими σ_{10}, Δ_1, розв'язок якої, згідно з [12], задовольняє оцінку

$$\|U_\tau(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon))\| \le \sigma_{10}e^{L\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}\left(\Delta_1+\varepsilon+(\varepsilon^{\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{l+1}})/\Delta_1\right).$$

Покладемо

$$\Delta_1 = \varepsilon^{\frac{1}{4l}}, \quad \sigma_8 = 4\,\sigma_{10}\,e^{L\sigma_1\left(1+\frac{1}{\theta_1}\right)}$$

і дістанемо нерівність (25).

Для встановлення нерівності (27) продиференціюємо рівність (28) відповідно по y, ψ, ζ і скористаємось схемою отримання оцінки частинних похідних для рівномірних [7] і граничних [6] моментів імпульсної дії.

На відміну від рівномірних і граничних моментів імпульсної дії для функціональних послідовностей відстаней функція $\theta(\tau)$ вже не є сталою і для неї справджуються умови (5), (6), тому отримані в [6, 7] оцінки залишаються без змін з точністю до сталих.

Нам залишилось оцінити частинні похідні суми (29).

З усереднених рівнянь для повільних змінних маємо

$$\left\|\frac{\partial\bar{x}(\tau,y,\zeta)}{\partial\zeta}\right\| \le \theta_3\, e^{\theta_3}, \quad \left\|\frac{\partial\bar{x}(\tau,y,\zeta)}{\partial y}\right\| \le n\, e^{\theta_3},$$
$$\left\|\left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial\zeta}\right|_{t=t'} - \left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial\zeta}\right|_{t=t''}\right\| \le \sigma_1(1+\theta_1)(1+\theta_3\, e^{\theta_3})\left|t'-t''\right|, \tag{30}$$
$$\left\|\left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right|_{t=t'} - \left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right|_{t=t''}\right\| \le \sigma_1(1+\theta_1) n\, e^{\theta_3}\left|t'-t''\right|,$$

де $\theta_3 = \sigma_1(1+\theta_1)L$.

Використаємо оцінки (30) і умову Ліпшиця для частинних похідних першого порядку функції $r(x,\varphi,\xi,\tau)$. Тоді дістанемо

$$\left\|\frac{\partial S}{\partial y}\right\| \le \sigma_{11}\,\varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial S}{\partial\zeta}\right\| \le \sigma_{11}\,\varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial S}{\partial\psi}\right\| \equiv 0. \tag{31}$$

Далі в доведенні замінимо оцінки осциляційних інтегралів і сум для рівномірних або граничних моментів імпульсної дії оцінками (8), (9).

З нерівностей (5), (6), (30), (31) випливає інтегро-сумарна нерівність

$$\left\|\frac{\partial U_\tau(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon)}{\partial d}\right\| \le \sigma_{12}\left(\int_0^\tau\left\|\frac{\partial}{\partial d}U_\tau(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\right\|dt + \right.$$
$$\left. + \varepsilon\sum_{0<\tau_j<\tau}\left\|\frac{\partial}{\partial d}U_\tau(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\right\| + \left(\Delta_2+\varepsilon+\left(\varepsilon^{\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\right)/\Delta_2\right)\right),$$
$$d = (y,\psi,\zeta),$$

з деякими додатними сталими σ_{12}, Δ_2, розв'язок якої задовольняє оцінку

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial d}\right\| \le \sigma_{12}e^{L\,\sigma_{12}(1+\theta_1)}\left(\Delta_2+\varepsilon+\left(\varepsilon^{\frac{1}{2l}}+\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\right)/\Delta_2\right).$$

Виберемо

$$\Delta_2 = \varepsilon^{\frac{1}{4l}}, \quad \bar{\sigma}_8 = 8\sigma_{12}\,e^{L\sigma_{12}(1+\theta_1)}$$

і отримаємо оцінку (27), що й завершує доведення теореми.

Теорема 1 залишається справедливою, якщо замість часового проміжку $[0, L]$ розглянути будь-який інший відрізок часу довжиною L. При цьому в оцінках (25), (27) зміняться лише сталі в залежності від початкової точки відрізка. Для обґрунтування методу усереднення на півосі потрібно мати оцінки типу (25), (27) зі сталими, не залежними від початку відрізка.

5. Усереднення на півосі. Припустимо, що в системі (2) функції $c(x, \varphi, \xi, \tau)$, $r(x, \varphi, \xi, \tau)$ не залежать від параметра ξ, тобто $c(x, \varphi, \xi, \tau) \equiv c(x, \varphi, \tau)$, $r(x, \varphi, \xi, \tau) \equiv r(x, \varphi, \tau)$.

На підставі лем 2 і 3 легко довести наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай:*

1) виконуються умови (1), (3), (5), (6), (17) при $\tau \in R_{t_0} = [t_0, \infty)$;

2) функції $(\theta(\tau)\omega(\tau))^{(\nu)}, (\tau), \nu = \overline{0, l}$, *рівномірно неперервні на* R_{t_0};

3) крива $\bar{x} = \bar{x}_\tau(\bar{t}, y)$ *лежить в* $\mathcal{D}$ *разом із своїм* ρ*-околом при* $\tau \in [\bar{t}, \bar{t} + L]$.

Тоді існує таке $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $\tau \in [\bar{t}, \bar{t} + L]$, $\bar{t} \in R_{t_0}$, $\psi \in R^m$, *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справджується оцінка*

$$\|U_\tau(\bar{t}, y, \psi, \varepsilon)\| \leq \sigma_{13} \varepsilon^{\frac{1}{4l}}, \tag{32}$$

де σ_{13} *залежить від* L, *але не залежить* $\bar{t}$.

Зауваження 2. З леми 2 випливає, що коли відмовитись від обмеження $\|\omega'(\tau)\| \leq \sigma_2$, то порядок ε в оцінці (32) погіршиться, і вона набере вигляду

$$\|U_\tau(\bar{t}, y, \psi, \varepsilon)\| \leq \sigma_{13}(L) \varepsilon^{\frac{1}{4l+2}}.$$

На підставі лем 2 і 3 теорему 3 з роботи [7] можна перефразувати так.

Теорема 3. *Нехай:*

1) виконуються припущення 1, 2 теореми 2;

2) існує розв'язок $\bar{x} = X(\tau)$ *усереднених рівнянь*

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}\,(\bar{x}, \tau) + \frac{\bar{p}(\bar{x}, \tau)}{\theta(\tau)},$$

який визначений для всіх $\tau \in R_{t_0}$ *і лежить в* $\mathcal{D}$ *разом із своїм* ρ*-околом*;

3) нормальна фундаментальна матриця $Q(\tau, t)$ *розв'язків рівняння у варіаціях*

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{a}\,(X(\tau), \tau) + \frac{\bar{p}\,(X(\tau), \tau)}{\theta(\tau)} \right) z$$

задовольняє оцінку

$$\|Q(\tau, t)\| \leq \bar{K}\, e^{-\gamma(\tau - t)}, \quad \tau \geq t \in R_{t_0}, \quad \bar{K} = \mathrm{const} \geq 1, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0;$$

4) функції $\dfrac{\partial}{\partial x} a_0(x, \tau)$ *і* $\dfrac{\partial}{\partial x} p_0(x, \tau)$ *рівномірно неперервні на множині* $\{(x, \tau) : x \in R^n, \tau \in R_{t_0}, \|x - X(\tau)\| \leq \rho/2\}$.

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ *для всіх* $(\psi, \varepsilon) \in R^m \times (0, \varepsilon_0]$ *існує таке* $x^0(\psi, \varepsilon)$, *що розв'язок* $x_\tau(t_0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon), \varphi_\tau(t_0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon)$ *системи (24) визначений для всіх* $\tau \in$ $\in R_+$ *і виконується нерівність*

$$\|x_\tau(t_0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon) - X(\tau)\| \le \sigma_{14}\,\varepsilon^\alpha, \quad (\psi, \tau, \varepsilon) \in R^m \times R_{t_0} \times (0, \varepsilon_0],$$

зі сталою σ_{14}, *не залежною від* ψ, ε. *Тут* $\alpha = 1/(4l)$, *а якщо відмовитись від умови обмеженості функції* $\|\omega'(\tau)\|$, *то* $\alpha = 1/(4l+2)$.

6. Усереднення крайової задачі з інтегральними крайовими умовами. Зауважимо, що в роботі [8] доведено існування та єдиність розв'язку крайової задачі для системи (2) з інтегральним крайовими умовами вигляду

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{\eta_\nu} f_\nu(x, \varphi, \xi, \eta, \tau) d\tau = P_\nu, \quad \nu = \overline{1, \lambda}, \\ \int\limits_0^{L} \left(B(x, \xi, \eta, \tau)\varphi + g(x, \varphi, \xi, \eta, \tau)\right) d\tau = C,\end{gathered} \tag{33}$$

де C і P_ν — сталі відповідно m- і n_ν-вимірні вектори, $n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda = n + s + \lambda$; $B(x, \xi, \eta, \tau)$ — неперервна в $\mathcal{D} \times Q \times I^{\lambda+1}$ і обмежена квадратна матриця m-го порядку; $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\lambda) \in I^\lambda$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \in Q$ — невідомі параметри; $f \equiv (f_1, \ldots, f_\lambda)$, g — задані вектор-функції.

При цьому вимагається, щоб в кожній точці $(x, \xi, \eta, \tau) \in \mathcal{D} \times Q \times I^\lambda \times I$ справджувались нерівності

$$\sum_{k \ne 0} \left[\|k\|\,\|f_k\| + \left\|\frac{\partial f_k}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial f_k}{\partial \xi}\right\|\right] \|k\|^{-1/(l+1)} \le \sigma_1, \tag{34}$$

$$\sum_k \|k\|^{l/(l+1)} \|g_k\| \le \sigma_1. \tag{35}$$

Тут $f_k = f_k(x, \xi, \eta, \tau)$ і $g_k = g_k(x, \xi, \eta, \tau)$ — коефіцієнти Фур'є 2π-періодичних по φ_ν, $\nu =$ $= \overline{1, m}$, функцій $f(x, \varphi, \xi, \eta, \tau)$ і $g(x, \varphi, \xi, \eta, \tau)$.

Усереднена крайова умова набирає вигляду

$$\int\limits_0^{\eta_\nu} \bar f_\nu(\bar x, \xi, \eta, \tau)\, d\tau = P_\nu, \quad \nu = \overline{1, \lambda}, \quad \int\limits_0^{L} \left(B(\bar x, \xi, \eta, \tau)\bar\varphi + \bar g\,(\bar x, \xi, \eta, \tau)\right) d\tau = C, \tag{36}$$

де

$$\bar g\,(x, \xi, \eta, \tau) = g_0\,(x, \xi, \eta, \tau) \quad \bar f = f_0\,(x, \xi, \eta, \tau) = (\bar f_1(x, \xi, \eta, \tau), \ldots, \bar f_\lambda(x, \xi, \eta, \tau)).$$

Там же встановлено, що розв'язки вихідної (2), (33) і усередненої (24), (36) крайових задач відрізняються мало. Зазначені факти доведено для випадку граничних і рівномірних моментів імпульсної дії. Враховуючи теорему 1 і оцінки (8), (9), перефразуємо теорему з [8] для випадку функціональних моментів імпульсної дії. Для цього використаємо наведені в [8] припущення:

а) усереднена крайова задача (24), (36) має єдиний розв'язок $\xi = \xi^0 \in Q, \eta = \eta^0 \in I^\lambda$, $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$, причому крива $\bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$ лежить в $\mathcal{D}$ для всіх $\tau \in [0, L]$;

б) m-вимірна квадратна матриця $\int\limits_0^L B(\bar{x}(t, x^0, \xi^0), \xi^0, \eta^0, t)\, dt$ є невиродженою;

в) квадратна $(n+s+\lambda)$-вимірна матриця $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 + A_3 \end{pmatrix}$ є невиродженою.

Тут A_1, A_2 і A_3 позначають відповідно $(n+s+\lambda)\times(n+s)$-, $(n+s+\lambda)\times\lambda$- і $(n+s+\lambda)\times$ $\times\lambda$-вимірні матриці

$$A_1 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1^0} \dfrac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \bar{x}^0} \dfrac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0}\, d\tau & \int\limits_0^{\eta_1^0} \left(\dfrac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \bar{x}^0} \dfrac{\partial \bar{x}^0}{\partial \xi^0} + \dfrac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \xi^0} \right) d\tau \\ \dots & \dots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \dfrac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \bar{x}^0} \dfrac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0}\, d\tau & \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \left(\dfrac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \bar{x}^0} \dfrac{\partial \bar{x}^0}{\partial \xi^0} + \dfrac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \xi^0} \right) d\tau \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1^0} \dfrac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \eta_1^0}\, d\tau & \dots & \int\limits_0^{\eta_1^0} \dfrac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \eta_\lambda^0}\, d\tau \\ \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \dfrac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \eta_1^0}\, d\tau & \dots & \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \dfrac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \eta_\lambda^0}\, d\tau \end{pmatrix}, \quad A_3 = \operatorname{diag} \begin{pmatrix} \bar{f}_1(z^0)\big|_{\tau=\eta_1^0} & \cdots & \bar{f}_\lambda(z^0)\big|_{\tau=\eta_\lambda^0} \end{pmatrix},$$

де $\bar{x}^0 = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$, $z^0 = (x^0, \xi^0, \eta^0, \tau)$, $\eta^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_\lambda^0)$.

Теорема 4. *Якщо виконуються припущення (1), (4), (26), (34) та умови а), б), в), то:*

1) можна вказати такі сталу $\varepsilon_0 > 0$ і функцію $\psi : (0, \varepsilon_0] \to R^m$, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує такий розв'язок ξ, η, x, φ крайової задачі (2), (33), який задовольняє оцінку

$$\left\| x - \bar{x}\,(\tau, x^0, \xi^0) \right\| + \left\| \xi - \xi^0 \right\| + \left\| \eta - \eta^0 \right\| + \left\| \varphi - \bar{\varphi}\,(\tau, x^0, \varphi^0, \xi^0, \varepsilon) - \psi(\varepsilon) \right\| \le \sigma_{15}\, \varepsilon^{\frac{1}{4l}} \qquad (37)$$

для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$;

2) при виконанні обмежень (35) у випадку, коли в крайових умовах (33) $B(x, \xi, \eta, \tau) \equiv$ $\equiv B(\tau)$, можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в малому околі розв'язку усередненої задачі існує єдиний розв'язок ξ, η, x, φ крайової задачі (2), (33), і цей розв'язок задовольняє оцінку (37) з $\psi(\varepsilon) \equiv 0$.

Доведення теореми 4 повністю збігається з доведенням теореми з [8], якщо замінити в ньому відповідні оцінки оцінками (8), (9), (25), (27) та врахувати нерівності (5), (6).

7. Усереднення багатоточкової задачі з параметрами. Розглянемо далі багатоточкову задачу з параметрами. Для цього вихідну (2) та усереднену (24) системи підпорядкуємо багатоточковим умовам вигляду

$$\begin{gathered} f(x|_{\tau=\tau^1}, x|_{\tau=\tau^2}, \ldots, x|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi) = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{\lambda} B_\nu(x|_{\tau=\tau^1}, x|_{\tau=\tau^2}, \ldots, x|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi)\, \varphi|_{\tau=\tau^\nu} = g(x|_{\tau=\tau^1}, x|_{\tau=\tau^2}, \ldots, x|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi), \end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered} f\,(\bar{x}|_{\tau=\tau^1}, \bar{x}|_{\tau=\tau^2}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi) = 0, \\ \sum_{\nu=1}^{\lambda} B_\nu(\bar{x}|_{\tau=\tau^1}, \bar{x}|_{\tau=\tau^2}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi)\, \bar{\varphi}|_{\tau=\tau^\nu} = g(\bar{x}|_{\tau=\tau^1}, \bar{x}|_{\tau=\tau^2}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi), \end{gathered} \tag{39}$$

де $0 \leq \tau^1 < \tau^2 < \ldots < \tau^\lambda \leq L$, $\lambda \geq 2$; $B_\nu(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \zeta)$ — m-вимірні матриці; $f(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \zeta)$, $g(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \zeta)$ — відомі відповідно $n+s$- і m-вимірні вектор-функції. Тут функції f, g, B_ν, $\nu = \overline{1, \lambda}$, неперервні та мають обмежені сталою σ_1 неперервні частинні похідні першого порядку по всіх аргументах в $\mathcal{D}^\lambda \times Q$.

При більш сильних, ніж (27), обмеженнях на коефіцієнти Фур'є для рівномірних моментів імпульсної дії в роботі [9] було отримано точну відносно малого параметра ε оцінку відхилення розв'язків задач (2), (38) і (24), (39). Враховуючи теорему 1 і оцінки (8), (9), перефразуємо теорему з [9] для випадку функціональних моментів імпульсної дії.

Теорема 5. *Нехай:*

а) виконуються умови (1), (4), (26);

б) усереднена багатоточкова задача з параметрами (24), (39) має єдиний розв'язок $\xi = \xi^0 \in Q$, $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$, причому крива $\bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$ лежить в $\mathcal{D}$ для всіх $\tau \in [0, L]$;

в) $(n+s)$-вимірна квадратна матриця

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_\nu} \, \frac{\partial \bar{x}(\tau^\nu, x^0, \xi^0)}{\partial x^0}; \; \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_\nu} \, \frac{\partial \bar{x}(\tau^\nu, x^0, \xi^0)}{\partial \xi^0} + \frac{\partial f(z^0)}{\partial \xi^0} \right),$$

де $z^0 \equiv (\bar{x}(\tau^1, x^0, \xi^0), \ldots, \bar{x}(\tau^\nu, x^0, \xi^0), \xi^0)$, є невиродженою;

г) m-вимірна квадратна матриця $\sum_{\nu=1}^{\lambda} B_\nu\left(z^0\right)$ є невиродженою.

Тоді:

1) можна вказати такі сталу $\varepsilon_0 > 0$ і функцію $\psi : (0, \varepsilon_0] \to R^m$, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує такий розв'язок ξ, x, φ багатоточкової задачі (2), (38), який задовольняє оцінку

$$\left\| x - \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0) \right\| + \left\| \xi - \xi^0 \right\| + \left\| \varphi - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \xi^0, \varepsilon) - \psi(\varepsilon) \right\| \leq \sigma_{16}\, \varepsilon^{\frac{1}{4l}} \tag{40}$$

для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$;

2) у випадку $B_\nu = \mathrm{const}$, $\nu = \overline{1, \lambda}$, *можна вказати таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *в малому околі розв'язку усередненої задачі існує єдиний розв'язок* ξ, x, φ *багатоточкової задачі (2), (38), і цей розв'язок задовольняє оцінку (40) з* $\psi(\varepsilon) \equiv 0$.

Як і в п. 6, доведення теореми 5 повністю збігається з доведенням теореми з [9], якщо замінити в ньому відповідні оцінки оцінками (8), (9), (25), (27) та врахувати нерівності (5), (6).

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. — 1987. — **23**, № 2. — С. 267 – 278.
3. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. — 1971. — **9**. — С. 101 – 117.
4. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Обґрунтування методу усереднення для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 1. — С. 55 – 65.
5. *Сопронюк Т. М.* Коливання імпульсних багаточастотних систем: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 2003. — 158 с.
6. *Сопронюк Т. М.* Асимптотична стійкість розв'язків нелінійної імпульсної системи з малим параметром // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2001. — Вип. 111. — С. 113 – 120.
7. *Петришин Я. Р.* Обґрунтування методу усереднення на півосі для одного класу нелінійних коливних систем з імпульсним впливом // Там же. — С. 105 – 109.
8. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Усереднення крайової задачі з інтегральними крайовими умовами і параметрами для імпульсної багаточастотної системи // Там же. — 2004. — Вип. 228. — С. 96 – 107.
9. *Сопронюк Т.М., Дудницький П.М.* Багатоточкова задача з параметрами для імпульсної багаточастотної системи // Там же. — 2004. — Вип. 191 – 192. — С. 128 – 136.
10. *Сопронюк Т. М.* Усереднення коливних імпульсних систем на відрізку // Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнар. конф., присв. 60-річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка: Тези доп. — Київ, 2005. — С. 103.
11. *Петришин Р. І., Дудницький П. М.* Усереднення багаточастотних систем з нефіксованими моментами імпульсної дії // Там же. — С. 84.
12. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.

Одержано 01.12.2005