УДК 517.954

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

А. Н. Витюк, А. В. Голушков

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Ин-т математики, экономики и механики
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: Alexander_VG@ukr.net

We find conditions for existence of a unique solution of the problem $u_{xy}(x,y) = f(x,y,u(x,y),(D_0^r u)(x,y))$, $u(x,0) = u(0,y) = 0$, $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$, *where* $(D_0^r u)(x,y)$ *is the mixed Riemann – Liouville derivative,* $r = (r_1, r_2)$, $0 < r_1, r_2 < 1$, *in the class of functions that have the continuous derivatives* $u_{xy}(x,y)$, $(D_0^r u)(x,y)$. *We propose a numerical method for solving this problem and prove convergence of the method.*

Отримано умови однозначної розв'язності задачі $u_{xy}(x,y) = f(x,y,u(x,y),(D_0^r u)(x,y))$, $u(x,0) = u(0,y) = 0$, $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$, *де* $(D_0^r u)(x,y)$ — *мішана похідна Рімана – Ліувілля порядку* $r = (r_1, r_2)$, $0 < r_1, r_2 < 1$, *у класі функцій, які мають неперервні похідні* $u_{xy}(x,y)$, $(D_0^r u)(x,y)$. *Запропоновано числовий метод розв'язання цієї задачі та доведено його збіжність.*

Пусть $G = (0,a] \times (0,b]$, $\overline{G} = [0,a] \times [0,b]$, $R_+ = [0,+\infty)$, $r = (r_1, r_2)$, $0 < r_1, r_2 \le 1$, $f : G \to R$, $f \in L(G)$. Смешанным левосторонним интегралом Римана – Лиувилля порядка r называем [1, с. 341] выражение

$$(I_0^r f)(x,y) = \frac{1}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{r_1-1}(y-t)^{r_2-1} f(s,t)\,ds\,dt, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Если $f_{1-r}(x,y) = (I_0^{1-r} f)(x,y)$, то смешанной дробной производной порядка r называем [1, с. 342] выражение

$$(D_0^r f)(x,y) = \frac{\partial^2 f_{1-r}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{f(s,t)\,ds\,dt}{(x-s)^{r_1}(y-t)^{r_2}}.$$

Если $f(x,y)$ — абсолютно непрерывная функция [2, с. 237; 3], то почти всюду на G [1, с. 342]

$$(D_0^r f)(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \left[\frac{f(0,0)}{x^{r_1} y^{r_2}} + \frac{1}{x^{r_1}} \int_0^y \frac{\partial f(0,t)}{\partial y} \frac{dt}{(y-t)^{r_2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{y^{r_2}} \int_0^x \frac{\partial f(s,0)}{\partial x} \frac{ds}{(x-s)^{r_1}} + \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial x \partial y} \frac{ds\,dt}{(x-s)^{r_1}(y-t)^{r_2}} \right]. \tag{1}$$

1^0. Рассмотрим задачу Дарбу

$$u_{xy}(x,y) = f\left(x,y,u(x,y),(D_0^r u)(x,y)\right), \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(0,y) = 0, \quad x \in [0,a], \quad y \in [0,b]. \tag{3}$$

При $r_1 = r_2 = 1$ получим задачу, рассмотренную в [4].

Под решением задачи (2), (3) понимаем функцию $u : \overline{G} \to R$ такую, что $u(x,y)$, $u_{xy}(x,y)$, $(D_0^r u)(x,y)$ непрерывны в области $\overline{G}$. В силу (1), (3)

$$z(x,y) \equiv (D_0^r u)(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{u_{xy}(s,t)\,ds\,dt}{(x-s)^{r_1}(y-t)^{r_2}}. \tag{4}$$

Предположим, что функция $f(x,y,u,z) : \overline{G} \times R \times R \to R$ удовлетворяет следующим условиям: а) является непрерывной; б) $|f(x,y,u,z)| \le M$; в) удовлетворяет условию Липшица по u, z с постоянной K.

Теорема 1. *Пусть $f(x,y,u,z)$ удовлетворяет условиям а), б). Функция $u : \overline{G} \to R$ является решением задачи (2), (3) тогда и только тогда, когда $u(x,y)$, $z(x,y)$ — решение системы*

$$u(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f\left(s,t,u(s,t),z(s,t)\right)\,ds\,dt, \tag{5}$$

$$z(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{f\left(s,t,u(s,t),z(s,t)\right)\,ds\,dt}{(x-s)^{r_1}(y-t)^{r_2}}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$, $z(x,y)$ — решение системы (5), (6). Докажем, что $u(x,y)$ — решение задачи (2), (3). Предварительно докажем, что $z(x,y) \in C(G)$.

Пусть (x_2,y_2), $(x_2,y_1) \in G$, $y_1 < y_2$. Тогда

$$F = |z(x_2,y_2) - z(x_2,y_1)| = \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \left| \int\limits_0^{x_2} \int\limits_0^{y_1} (x_2-s)^{-r_1} \left[(y_2-t)^{-r_2} - (y_1-t)^{-r_2}\right] \times \right.$$

$$\left. \times f(s,t,u(s,t),z(s,t))\,ds\,dt + \int\limits_0^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{f(s,t,u(s,t),z(s,t))\,ds\,dt}{(x_2-s)^{r_1}(y_2-t)^{r_2}} \right| \le \frac{M}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \times$$

$$\times \frac{x_2^{1-r_1}(y_1^{1-r_2} - y_2^{1-r_2} + (y_2-y_1)^{1-r_2}) + x_2^{1-r_1}(y_2-y_1)^{1-r_2}}{(1-r_1)(1-r_2)} =$$

$$= M\lambda \left\{ x_2^{1-r_1} \left[(y_2-y_1)^{1-r_2} - (y_2^{1-r_2} - y_1^{1-r_2}) \right] + x_2^{1-r_1}(y_2-y_1)^{1-r_2} \right\},$$

где $\lambda = (\Gamma(2-r_1)\Gamma(2-r_1))^{-1}$.

Поскольку $y_2^{1-r_2} - y_1^{1-r_2} \le (y_2 - y_1)^{1-r_2}$, то $F \le 2M\lambda a^{1-r_1}(y_2 - y_1)^{1-r_2}$. Аналогично доказываем, что для $(x_1, y_1), (x_2, y_1) \in G, x_1 < x_2$ имеет место оценка $|z(x_2, y_1) - z(x_1, y_1)| \le \le 2M\lambda b^{1-r_2}(x_2 - x_1)^{1-r_1}$. Следовательно, $z(x, y) \in C(G)$.

Пусть $J_x = \{(x, y) : x \in [0, a], y = 0\}$, $J_y = \{(x, y) : x = 0, y \in [0, b]\}$.

Поскольку $|z(x, y)| \le M\lambda x^{1-r_1} y^{1-r_2}$ для $(x, y) \in G$, $z(x, y)$ можно доопределить по непрерывности нулем на множестве $J_x \cup J_y$. Следовательно, $z(x, y) \in C(\overline{G})$. Из (5) и условия а) следует, что $u(x, y), u_{xy}(x, y) \in C(\overline{G})$. Докажем еще, что $z(x, y) = (D_0^r u)(x, y)$. Из (4) и (2) следует

$$(D_0^r u)(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1 - r_1)\Gamma(1 - r_2)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{f(s, t, u(s, t), z(s, t))\, ds\, dt}{(x - s)^{-r_1}(y - t)^{-r_2}}. \tag{7}$$

Пусть теперь $u(x, y)$ — решение задачи (2), (3). Тогда

$$u(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f\left(s, t, u(s, t), z(s, t)\right)\, ds\, dt,$$

а согласно (7) $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению (6).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y, u, z)$ удовлетворяет условиям а) – в) и*

$$\gamma = K\left(ab + \lambda a^{1-r_1} b^{1-r_2}\right) < 1. \tag{8}$$

Тогда в области $\overline{G}$ существует единственное решение задачи (2), (3).

Доказательство. Рассмотрим последовательности $\{u_m(x, y)\}, \{z_m(x, y)\}, m = 0, 1, 2, \ldots,$ где $u_0(x, y) = z_0(x, y) = 0$, $(x, y) \in \overline{G}$,

$$u_{m+1}(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f\left(s, t, u_m(s, t), z_m(s, t)\right)\, ds\, dt, \tag{9}$$

$$z_{m+1}(x, y) = \begin{cases} 0, (x, y) \in J_x \cup J_y, \\ \dfrac{1}{\Gamma(1 - r_1)\Gamma(1 - r_2)} \displaystyle\int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{f(s, t, u_m(s, t), z_m(s, t))}{(x - s)^{r_1}(y - t)^{r_2}}\, ds\, dt, \quad (x, y) \in G. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидны следующие оценки:

$$\begin{gathered} |u_1 - u_0| \le Mab, \quad |z_1 - z_0| \le M\lambda a^{1-r_1} b^{1-r_2}, \quad |u_{m+1} - u_m| \le Mab\gamma^m, \\ |z_{m+1} - z_m| \le M\lambda\gamma^m a^{1-r_1} b^{1-r_2}, \quad m = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{11}$$

Из (11) следует, что равномерно в $\overline{G}$ $\lim\limits_{m\to\infty} u_m(x,y) = u(x,y)$, $\lim\limits_{m\to\infty} z_m(x,y) = z(x,y)$, а из (9), (10) при $m \to \infty$ — что $u(x,y)$, $z(x,y)$ — решение системы (5), (6), т. е. $u(x,y)$ — решение задачи (2), (3).

Докажем единственность. Пусть $v(x,y)$ — также решение задачи (2), (3) и

$$\Theta = \max_{\overline{G}} |u(x,y) - v(x,y)| = |u(\overline{x},\overline{y}) - v(\overline{x},\overline{y})|,$$

$$\Theta_1 = \max_{\overline{G}} |(D_0^r u)(x,y) - (D_0^r v)(x,y)| = |(D_0^r u)(\widetilde{x},\widetilde{y}) - (D_0^r v)(\widetilde{x},\widetilde{y})|.$$

Тогда

$$\Theta = \left| \int\limits_0^{\overline{x}} \int\limits_0^{\overline{y}} \left(f(s,t,u(s,t),(D_0^r u)(s,t)) - f(s,t,v(s,t),(D_0^r v)(s,t)) \right) ds\, dt \right| \le$$

$$\le K(\Theta+\Theta_1)ab, \quad \Theta_1 \le K(\Theta+\Theta_1)\lambda a^{1-r_1} b^{1-r_2}.$$

Следовательно, $\Theta+\Theta_1 \le \gamma(\Theta+\Theta_1)$, т. е. $\gamma \ge 1$, что противоречит условию (8).

Замечание. Пусть $f(x,y,u,z)$ удовлетворяет условию Липшица по u и z соответственно с постоянными K и K_1. Тогда условие (8) принимает вид $\gamma = Kab + \lambda K_1 a^{1-r_1} b^{1-r_2} < 1$, а при $r_1 = r_2 = 1 - K_1 < 1$, $Kab + K_1 < 1$, что совпадает с соответствующим условием работы [4].

2^0. Далее речь пойдет о численном решении задачи (2), (3). Рассмотрим область $S = \{(x,y,u,z) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, |u| \le Mab, |z| \le M\lambda a^{1-r_1} b^{1-r_2}\}$ и, следуя [5, с. 123], введем в рассмотрение модули непрерывности

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2) = \sup_{u,z} \sup_{|x_1-x_2|\le\delta_1, |y_1-y_2|\le\delta_2} |f(x_1,y_1,u,z) - f(x_2,y_2,u,z)|,$$

причем (x_1,y_1,u,z), $(x_2,y_2,u,z) \in S$,

$$\omega(\varphi;\delta_1,\delta_2) = \sup_{|x_1-x_2|\le\delta_1, |y_1-y_2|\le\delta_2} |\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)|,$$

$$\varphi(x,y) = u_{xy}(x,y), \quad (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \overline{G}.$$

Пусть $x_i = ih$, $y_j = jl$, $nh = a$, $ml = b$, $G_{ij} = \{(x,y) : x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_{j+1}\}$.

Согласно (4)

$$z(x_i,y_j) = \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \int\limits_0^{x_i}\int\limits_0^{y_j} (x_i-s)^{-r_1}(y_j-t)^{-r_2}\varphi(s,t)\,ds\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \sum_{k=1}^{i}\sum_{p=1}^{j} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\int\limits_{y_{p-1}}^{y_p} (x_i-s)^{-r_1}(y_j-t)^{-r_2}\varphi(s,t)\,ds\,dt \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \sum_{k=1}^{i}\sum_{p=1}^{j} \varphi(x_{k-1},y_{p-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\int\limits_{y_{p-1}}^{y_p} \frac{ds\,dt}{(x_i-s)^{r_1}(y_j-t)^{r_2}} =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{i}\sum_{p=1}^{j} \varphi(x_{k-1},y_{p-1}) \left(x_{i-k+1}^{1-r_1} - x_{i-k}^{1-r_1}\right)\left(y_{j-p+1}^{1-r_2} - y_{j-p}^{1-r_2}\right) \equiv \rho(x_i,y_j).$$

Оценим погрешность этого приближения:

$$|z(x_i,y_j) - \rho(x_i,y_j)| \le \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \sum_{k=1}^{i}\sum_{p=1}^{j} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\int\limits_{y_{p-1}}^{y_p} (x_i-s)^{-r_1} \times$$

$$\times (y_j-t)^{-r_2}|\varphi(s,t) - \varphi(x_{k-1},y_{p-1})|\,ds\,dt \le \lambda\omega(\varphi;h,l)a^{1-r_1}b^{1-r_2}. \tag{12}$$

Обозначим через u_{ij} и z_{ij} приближенные значения величин соответственно $u(x_i,y_j)$ и $z(x_i,y_j)$. Полагая $\varphi(x_i,y_j) \approx f_{ij} = f(x_i,y_j,u_{ij},z_{ij})$, получаем следующий метод приближенного решения задачи (2), (3):

$$u_{i0} = u_{0j} = z_{i0} = z_{0j} = 0, \quad i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{0,m},$$

$$u_{i+1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{ij} + hlf_{ij}, \tag{13}$$

$$z_{i+1,j+1} = \lambda \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{p=1}^{j+1} f_{k-1,p-1}\left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right)\left(y_{j-p+2}^{1-r_2} - y_{j-p+1}^{1-r_2}\right), \tag{14}$$

$$i = \overline{0,n-1}, \quad j = \overline{0,m-1}.$$

Пусть $\delta_{ij} = u(x_i,y_j) - u_{ij}$, $\gamma_{ij} = z(x_i,y_j) - z_{ij}$. Согласно (9)

$$|\delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{ij}| = \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \big(f(s,t,u(s,t),z(s,t)) - f(x_i,y_j,u_{ij},z_{ij})\big)\,ds\,dt \right|. \tag{15}$$

Для $(s,t) \in G_{ij}$

$$|f(s,t,u(s,t),z(s,t)) - f(x_i,y_j,u_{ij},z_{ij})| \le |f(s,t,u(s,t),z(s,t)) - f(x_i,y_j,u(s,t),z(s,t))| +$$

$$+|f(x_i,y_j,u(s,t),z(s,t)) - f(x_i,y_j,u_{ij},z_{ij})| \le \omega(f;h,l) + K(|u(s,t)-u_{ij}| + |z(s,t)-z_{ij}|), \tag{16}$$

$$|u(x,y) - u_{ij}| \le |u(x,y) - u(x_i,y_j)| + |u(x_i,y_j) - u_{ij}|.$$

Поскольку для $(x,y) \in G_{ij}$

$$u(x,y) = u(x,y_j) + u(x_i,y) - u(x_i,y_j) + \int\limits_{x_i}^{x}\int\limits_{y_j}^{y} f\left(s,t,u(s,t),z(s,t)\right)\,ds\,dt,$$

то

$$|u(x,y) - u(x_i,y_j)| \le |u(x,y_j) - u(x_i,y_j)| + |u(x_i,y) - u(x_i,y_j)| + Mhl \le$$

$$\le \int\limits_{x_i}^{x}\int\limits_{0}^{y_j} |f(s,t,u(s,t),z(s,t))|\,ds\,dt + \int\limits_{0}^{x_i}\int\limits_{y_j}^{y} |f(s,t,u(s,t),z(s,t))|\,ds\,dt + Mhl \le$$

$$\le M(hb + la + H(h+l)) \le 2q(h+l),$$

где $H = ab/(a+b)$, $q = \max(Mb, Ma, MH)$. Окончательно имеем $|u(x,y) - u(x_i,y_j)| \le \le 2q(h+l)$, $|u(x,y) - u_{ij}| \le 2q(h+l) + |\delta_{ij}|$.

Оценим $|z(x,y) - z_{ij}|$ для $(x,y) \in G_{ij}$:

$$|z(x,y) - z_{ij}| \le |z(x,y) - z(x,y_j)| + |z(x,y_j) - z(x_i,y_j)| + |z(x_i,y_j) - z_{ij}| = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)}\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{f(s,t,u(s,t),z(s,t))\,ds\,dt}{(x-s)^{r_1}(y-t)^{r_2}} - \int\limits_0^x\int\limits_0^{y_j} \frac{f(s,t,u(s,t),z(s,t))\,ds\,dt}{(x-s)^{r_1}(y_j-t)^{r_2}}\right| \le$$

$$\le \frac{M}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)}\left[\int\limits_0^x\int\limits_0^{y_i}(x-s)^{-r_1}\left[(y_j-t)^{-r_2} - (y-t)^{-r_2}\right]\,ds\,dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^x\int\limits_{y_j}^{y}(x-s)^{-r_1}(y-t)^{-r_2}\,ds\,dt\right] \le M\lambda x^{1-r_1}\left[(y_j^{1-r_2} - y^{1-r_2}) + 2(y-y_j)^{1-r_2}\right] =$$

$$= M\lambda x^{1-r_1}\left[\left((y-y_j)^{1-r_2} - (y^{1-r_2} - y_j^{1-r_2})\right) + (y-y_j)^{1-r_2}\right] \le$$

$$\le 2M\lambda x^{1-r_1}(y-y_j)^{1-r_2} \le 2M\lambda a^{1-r_1} l^{1-r_2}.$$

Аналогично получаем $A_2 \le 2M\lambda b^{1-r_2}h^{1-r_1}$. Следовательно, для $(x, y) \in G_{ij}$

$$|z(x,y) - z_{ij}| \le 2M\lambda\tau(h^{1-r_1} + l^{1-r_2}) + |\delta_{ij}|, \quad \tau = \max(a^{1-r_1},\, b^{1-r_2}). \tag{17}$$

Согласно (15) – (17) получаем

$$|\delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{ij}| \le Khl(|\delta_{ij}| + |\gamma_{ij}| + B), \tag{18}$$

$$B = 2M\lambda\tau(h^{1-r_1} + l^{1-r_2}) + 2q(h + l) + \omega(f; h, l). \tag{19}$$

Оценим γ_{ij} :

$$|\gamma_{i+1,j+1}| = |z(x_{i+1}, y_{j+1}) - z_{i+1,j+1}| \le |z(x_{i+1}, y_{j+1}) - \rho(x_{i+1}, y_{j+1})| +$$
$$+ |\rho(x_{i+1}, y_{j+1}) - z_{i+1,j+1}| = T_1 + T_2, \tag{20}$$

$$T_2 \le \lambda \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{p=1}^{j+1} \big| f(x_{k-1}, y_{p-1}, u(x_{k-1}, y_{p-1}), z(x_{k-1}, y_{p-1})) -$$
$$- f\left(x_{k-1}, y_{p-1}, u_{k-1,p-1}, z_{k-1,p-1}\right) \big| \left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right)\left(y_{j-p+2}^{1-r_2} - y_{j-p+1}^{1-r_2}\right) \le$$
$$\le \lambda K \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{p=1}^{j+1} \left(|\delta_{k-1,p-1}| + |\gamma_{k-1,p-1}|\right)\left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right)\left(y_{j-p+2}^{1-r_2} - y_{j-p+1}^{1-r_2}\right). \tag{21}$$

Из (20), (21) и (12) следует

$$|\gamma_{i+1,j+1}| \le K\lambda \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{p=1}^{j+1} \left(|\delta_{k-1,p-1}| + |\gamma_{k-1,p-1}|\right)\left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right)\left(y_{j-p+2}^{1-r_2} - y_{j-p+1}^{1-r_2}\right) + A,$$

где $A = \lambda a^{1-r_1} b^{1-r_2}\omega(\varphi; h, l)$.

Таким образом, δ_{ij} и γ_{ij} удовлетворяют соотношениям

$$|\delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{ij}| \le Khl(|\delta_{ij}| + |\gamma_{ij}| + B),$$
$$|\gamma_{i+1,j+1}| \le K\lambda \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{p=1}^{j+1}(|\delta_{k-1,p-1}| + |\gamma_{k-1,p-1}|)\left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right) \times$$
$$\times \left(y_{j-p+2}^{1-r_2} - y_{j-p+1}^{1-r_2}\right) + A, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{22}$$
$$\delta_{i0} = \delta_{0j} = z_{i0} = z_{0j} = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Оценки δ_{ij} и γ_{ij} получим через решение системы

$$u(x,y) = K\int\limits_0^x\int\limits_0^y (u(s,t)+z(s,t))\,ds\,dt + KBxy,$$
$$z(x,y) = \frac{K}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)}\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-s)^{-r_1}(y-t)^{-r_2}(u(s,t)+z(s,t))\,ds\,dt + A. \tag{23}$$

Под решением системы (23) понимаем функции $u,z:\overline{G}\to R$ такие, что $u,z,u_{xy}\in C(\overline{G})$.

Теорема 3. *Если выполняется условие (8), то решение системы (23) существует и единственно, причем $u(x,y)$ и $z(x,y)$ являются неубывающими функциями.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности $\{u_k(x,y)\}, \{z_k(x,y)\}$, где $u_0(x,y) = KBxy$, $z_0(x,y) = A$,

$$u_{k+1}(x,y) = K\int\limits_0^x\int\limits_0^y (u_k(s,t)+z_k(s,t))\,ds\,dt + KBxy,$$

$$z_{k+1}(x,y) = \begin{cases} A, \ (x,y)\in J_x\cup J_y, \\ \dfrac{K}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)}\displaystyle\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{(u_k(s,t)+z_k(s,t))\,ds\,dt}{(x-s)^{r_1}(y-t)^{r_2}}, \ (x,y)\in G, \ k=0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Для $(x,y)\in\overline{G}$ очевидны следующие оценки:

$$u_0(x,y)+z_0(x,y)\le T, \quad T = A + KBab,$$

$$0\le \mu_0(x,y)\le\mu_1(x,y)\le\ldots\le\mu_k(x,y)\le\ldots, \quad \mu = u,z,$$

$$u_{k+1}(x,y)-u_k(x,y)\le KTab\gamma^k, \quad z_{k+1}(x,y)-z_k(x,y)\le KT\lambda a^{1-r_1}b^{1-r_2}\gamma^k,$$

причем $u_k(x,y), z_k(x,y)\in C(\overline{G})$.

Ряд $u_0+(u_1-u_0)+\ldots+(u_{k+1}-u_k)+\ldots$ мажорируется рядом

$$T + KTab[1+\gamma+\ldots+\gamma^k+\ldots] = T\left[1+\frac{Kab}{1-\gamma}\right].$$

Следовательно, равномерно в $\overline{G}$ существует $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,y) = u(x,y)$, причем

$$u(x,y)\le T\left(1+\frac{Kab}{1-\gamma}\right). \tag{24}$$

Аналогично доказываем, что равномерно в $\overline{G}$

$$\lim_{k\to\infty} z_k(x,y) = z(x,y)\le T\left(1+\frac{Ka^{1-r_1}b^{1-r_2}\lambda}{1-\gamma}\right). \tag{25}$$

Очевидно, что $u(x,y)$, $z(x,y)$ — решение системы (23).

Докажем, что функции $u(x,y)$, $z(x,y)$ являются неубывающими по каждой переменной. Пусть $(x_1,y_1),(x_1,y_2)\in\overline{G}$ и $y_1\le y_2$. Докажем, что $\mu_n(x_1,y_1)\le\mu_n(x_1,y_2)$, $\mu=u,z$. Доказательство проведем по индукции. Очевидно, что $\mu_0(x_1,y_1)\le\mu_0(x_1,y_2)$, и пусть $\mu_k(x_1,y_1)\le\mu_k(x_1,y_2)$. Докажем, что $\mu_{k+1}(x_1,y_1)\le\mu_{k+1}(x_1,y_2)$. Если $\xi_k(x,y)=u_k(x,y)+$ $+z_k(x,y)$, то

$$u_{k+1}(x_1,y_2)-u_{k+1}(x_1,y_1)=K\int\limits_0^{x_1}\int\limits_{y_1}^{y_2}\xi_k(s,t)\,ds\,dt+KB(y_2-y_1)x_1\ge 0,$$

$$z_{k+1}(x_1,y_2)-z_{k+1}(x_1,y_1)=\frac{K}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)}\left[\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}(x_1-s)^{-r_1}\times\right.$$

$$\left.\times\Big((y_2-t)^{-r_2}-(y_1-t)^{-r_2}\Big)\xi_k(s,t)\,ds\,dt+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_{y_1}^{y_2}(x-s)^{-r_1}(y-t)^{-r_2}\xi_k(s,t)\,ds\,dt\right].\qquad(26)$$

Учитывая, что первое слагаемое в (26) неположительное, а второе — неотрицательное, имеем

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}(x_1-s)^{-r_1}((y_2-t)^{-r_2}-(y_1-t)^{-r_2})\xi_k(s,t)\,ds\,dt\ge$$

$$\ge\int_0^{x_1}(x_1-s)^{-r_1}\xi_k(s,y_1)\left(\int\limits_0^{y_1}\left[(y_2-t)^{-r_2}-(y_1-t)^{-r_2}\right]dt\right)ds=$$

$$=\frac{y_2^{1-r_2}-y_1^{1-r_2}-(y_2-y_1)^{1-r_2}}{1-r_2}\int\limits_0^{x_1}(x_1-s)^{-r_1}\xi_k(s,y_1)\,ds,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_{y_1}^{y_2}(x_1-s)^{-r_1}(y_2-t)^{-r_2}\xi_k(s,t)\,ds\,dt\ge\int\limits_0^{x_1}(x_1-s)^{-r_1}\xi_k(s,y_1)\left(\int\limits_{y_1}^{y_2}(y_2-t)^{-r_2}dt\right)ds=$$

$$=\frac{(y_2-y_1)^{1-r_2}}{1-r_2}\int\limits_0^{x_1}(x_1-s)^{-r_1}\xi_k(s,y_1)ds.$$

Отсюда и из (26) получаем

$$z_{k+1}(x_1,y_2)-z_{k+1}(x_1,y_1)\ge\frac{K(y_2^{1-r_2}-y_1^{1-r_2})}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(2-r_2)}\int\limits_0^{x_1}(x_1-s)^{-r_1}\xi_k(s,y_1)\,ds\ge 0.\qquad(27)$$

Как и (27), доказываем, что $z_{k+1}(x_2, y_1) \geq z_{k+1}(x_1, y_1)$, $x_1 \leq x_2$.

Теорема 2 доказана.

Пусть $G_{hl} = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jl; x_n = a, y_m = b\}$, а A, B, K — положительные постоянные.

Теорема 4. *Пусть сеточные функции* $q_h, p_h : G_{hl} \to R$, $\beta_h, \alpha_h : G_{hl} \to R_+$ *такие, что для* $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$

$$|q_{i+1,j+1} - q_{i+1,j} - q_{i,j+1} + q_{ij}| \leq Khl(|q_{ij}| + |p_{ij}| + B),$$
$$|p_{i+1,j+1}| \leq A + K\lambda \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j+1} (|q_{k-1,s-1}| + |p_{k-1,s-1}|) \left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right) \times \left(y_{j-s+2}^{1-r_2} - y_{j-s+1}^{1-r_2}\right), \tag{28}$$

$$\beta_{i+1,j+1} \geq \beta_{i+1,j} + \beta_{i,j+1} - \beta_{ij} + Khl(\beta_{ij} + \alpha_{ij} + B),$$
$$\alpha_{i+1,j+1} \geq A + K\lambda \sum_{k=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j+1} (\alpha_{k-1,s-1} + \beta_{k-1,s-1}) \left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right) \times \left(y_{j-s+2}^{1-r_2} - y_{j-s+1}^{1-r_2}\right), \tag{29}$$

причем

$$q_{i0} = q_{0j} = \beta_{i0} = \beta_{0j} = 0, \quad p_{i0} = p_{0j} = \alpha_{i0} = \alpha_{0j} = A, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}. \tag{30}$$

Тогда

$$|q_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad |p_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \tag{31}$$

при этом неравенствам (29) удовлетворяют $\beta_{ij} = u(x_i, y_j)$, $\alpha_{ij} = z(x_i, y_j)$, *где* $u(x, y)$, $z(x, y)$ *— решение системы (23).*

Доказательство. Помимо соотношений (31) докажем еще, что

$$|q_{i+1,j} - q_{ij}| \leq \beta_{i+1,j} - \beta_{ij}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m}, \tag{32}$$

$$|q_{i,j+1} - q_{ij}| \leq \beta_{i,j+1} - \beta_{ij}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{33}$$

Согласно (30) соотношения (31) имеют место для $i = 0$, $j = \overline{0, m}$ и $j = 0$, $i = \overline{0, n}$, а соотношения (32), (33) — соответственно для $i = \overline{0, n-1}$, $j = 0$ и $i = \overline{0, n}$, $j = 0$.

Пусть $E_i = \{(x_k, y_s) : 0 \leq k \leq i, s = \overline{0, m}\}$, $E_j = \{(x_k, y_s) : k = \overline{0, n}, s = \overline{0, j}\}$, $T_{ij} = E_i \cup E_j$ и соотношения (31)–(33) выполняются для $(x_k, y_s) \in T_{ij}$ Тогда, учитывая (33), получаем

$$\begin{aligned} |q_{i+1,j+1}| &\leq |q_{i+1,j} + q_{i,j+1} - q_{ij}| + Khl(|q_{ij}| + |p_{ij}| + B) \leq \\ &\leq |q_{i+1,j}| + |q_{i,j+1} - q_{ij}| + Khl(|q_{ij}| + |p_{ij}| + B) \leq \\ &\leq \beta_{i+1,j} + \beta_{i,j+1} - \beta_{ij} + Khl(\beta_{ij} + \alpha_{ij} + B) \leq \beta_{i+1,j+1}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$|q_{i+1,j+1}-q_{i+1,j}| \le |q_{i,j+1}-q_{ij}| + Khl(|q_{ij}|+|p_{ij}|+B) \le$$
$$\le \beta_{i,j+1}-\beta_{ij}+Khl(\beta_{ij}+\alpha_{ij}+B) \le \beta_{i+1,j+1}-\beta_{i+1,j}.$$

Аналогично доказываем, что $|q_{i+1,j+1}-q_{i,j+1}| \le \beta_{i+1,j+1}-\beta_{i,j+1}$. Непосредственно проверяем, что $|p_{i+1,j+1}| \le \alpha_{i+1,j+1}$.

Осталось доказать, что системе неравенств (29) удовлетворяют $\beta_{ij} = u(x_i,y_j)$, $\alpha_{ij} = z(x_i,y_j)$. Пусть $\xi(x,y) = u(x,y)+z(x,y)$. Тогда

$$u(x_{i+1},y_{j+1}) = K\int\limits_0^{x_{i+1}}\int\limits_0^{y_{j+1}}\xi(x,y)\,dx\,dy + KBx_{i+1}y_{j+1} =$$
$$= K\left[\int\limits_0^{x_{i+1}}\int\limits_0^{y_j}\xi(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_0^{x_i}\int\limits_0^{y_{j+1}}\xi(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_0^{x_i}\int\limits_0^{y_j}\xi(x,y)\,dx\,dy\right] +$$
$$+K\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\xi(x,y)\,dx\,dy + KB(x_iy_{j+1}+x_{i+1}y_j-x_iy_j+hl) =$$
$$= K\left\{\left(\int\limits_0^{x_{i+1}}\int\limits_0^{y_j}\xi(x,y)\,dx\,dy + Bx_{i+1}y_j\right) + \left(\int\limits_0^{x_i}\int\limits_0^{y_{j+1}}\xi(x,y)\,dx\,dy + Bx_iy_{j+1}\right) -\right.$$
$$\left. -\left(\int\limits_0^{x_i}\int\limits_0^{y_j}\xi(x,y)\,dx\,dy + Bx_iy_j\right) + \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\xi(x,y)\,dx\,dy + Bhl\right)\right\} =$$
$$= u(x_{i+1},y_j)+u(x_i,y_{j+1})-u(x_i,y_j)+K\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\xi(x,y)\,dx\,dy + Bhl\right) \ge$$
$$\ge u(x_{i+1},y_j)+u(x_i,y_{j+1})-u(x_i,y_j)+K\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\xi(x_i,y_j)\,dx\,dy + Bhl\right) =$$
$$= u(x_{i+1},y_j)+u(x_i,y_{j+1})-u(x_i,y_j)+Khl(u(x_i,y_j)+z(x_i,y_j)+B).$$

Далее,

$$z(x_{i+1},y_{j+1}) = \frac{K}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)}\sum_{k=1}^{i+1}\sum_{v=1}^{j+1}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\int\limits_{y_{v-1}}^{y_v}(x_{i+1}-s)^{-r_1}(y_{j+1}-t)^{-r_2}\xi(s,t)\,ds\,dt + A \ge$$

$$\geq \frac{K}{\Gamma(1-r_1)\Gamma(1-r_2)} \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{v=1}^{j+1} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \int\limits_{y_{v-1}}^{y_v} (x_{i+1}-s)^{-r_1}(y_{j+1}-t)^{-r_2}\xi(x_{k-1},y_{v-1})\,ds\,dt + A =$$

$$= K\lambda \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{v=1}^{j+1} (u_{k-1,v-1} + z_{k-1,v-1}) \left(x_{i-k+2}^{1-r_1} - x_{i-k+1}^{1-r_1}\right) \left(y_{j-v+2}^{1-r_2} - y_{j-k+1}^{1-r_2}\right) + A.$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть функция $f(x,y,u,z)$ удовлетворяет условиям а) – в) и выполняется условие (8). Тогда численный метод (13), (14) сходится к решению задачи (2), (3).*

Доказательство. Из (22) и теоремы 4 следует

$$|\delta_{ij}| \leq u(x_i,y_j) \leq T\frac{1+Kab}{1-\gamma},$$

$$|\gamma_{ij}| \leq z(x_i,y_j) \leq T\left(1+\lambda K a^{1-r_1} b^{1-r_2}\right).$$

Остается учесть, что $T \to 0$ при $(h,l) \to (0,0)$.

Теорема 5 доказана.

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. Н.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. — М.: Физматгиз, 1959. — **5**. — 584 с.
3. *Walczak S.* Absolutely continuous functions of several variales and their application to differential equations // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 1987. — **35**, № 11 – 12. — P. 733 – 744.
4. *Parath Günter.* Über die Differentialgleichung $z_{xy} = \varphi(x,y,z,z_{xy})$ // Math. Nachr. — 1967. — **33**, № 1/2. — S. 73 – 89.
5. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.

Получено 20.07.2005