УДК 512.647.2 + 512.562

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ КОНЕЧНЫМ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ МНОЖЕСТВАМ

М. В. Степочкина

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 01107, Киев 127, пр. Акад. Глушкова, 6
e-mail: StMar@ukr.net

In this paper we consider Bondarenko's hypotheses on the structure of finite partially ordered sets with positive definite quadraic Tits form. We prove that the hypothese holds for a fixed natural number $k > 8$ if it holds for the number $k - 1$.

Розглядається гіпотеза В. М. Бондаренка про будову скінченних частково впорядкованих множин із позитивно означеною квадратичною формою Тітса. Доведено, що гіпотеза виконується для фіксованого натурального числа $k > 8$ кожного разу, коли вона виконується для числа $k-1$.

Квадратичные формы возникают при решении многих задач в алгебре, теории дифференциальных и интегральных уравнений, функциональном анализе и других областях математики (см., например, [1] и имеющиеся там ссылки, а также работы [2 – 17]). Среди квадратичных форм важную роль играют квадратичные формы Титса для различных объектов — графов, частично упорядоченных множеств, алгебр и др., которые и изучаются в настоящей работе.

В работе [18] П. Габриель сопоставил колчану (ориентированному графу) некоторую квадратичную форму, названную им квадратичной формой Титса, которая играет важную роль в теории конечномерных представлений графов; в частности, в этой же работе показано, что граф имеет конечный тип (т. е. конечное, с точностью до изоморфизма, число неразложимых представлений) тогда и только тогда, когда соответствующая ему форма Титса является положительно определенной. Эта работа положила начало новому направлению в алгебре, которое изучает связь между свойствами представлений различных объектов и свойствами связанных с ними квадратичных форм.

Следующими работами в этом направлении являются работы Ш. Бреннер [19] и Ю. А. Дрозда [20], в которых определяются квадратичные формы Титса соответственно для колчанов с соотношениями и частично упорядоченных множеств. В общей ситуации для матричных задач без соотношений форма Титса введена М. М. Клейнером и А. В. Ройтером в [21].

В работе [20] показано, что частично упорядоченное множество имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его форма Титса слабо положительна (представления частично упорядоченных множеств введены в [22]). Положительно определенные формы при этом не выделяются, но при дальнейшем изучении таких представлений положительно определенные формы Титса уже играют важную роль [23]. Первым шагом в описании таких форм является работа [1] (см. также [24]), где рассматриваются бесконечные частично упорядоченные множества. В [25] В. М. Бондаренко рассматривает случай конечных множеств и формулирует в этой ситуации некоторую гипотезу о положительно определенных формах Титса. С этой гипотезой и связана настоящая работа.

1. Формулировка гипотезы. Все рассматриваемые в этой статье частично упорядоченные множества являются конечными. Под подмножеством X частично упорядоченного множества S мы всегда понимаем подмножество, полное относительно отношения частичного порядка (т. е., если $a, b \in X$, то $a \geq b$ в X тогда и только тогда, когда $a \geq b$ в S).

Напомним, что если частично упорядоченное множество S является объединением своих попарно непересекающихся подмножеств $A_1, \ldots, A_s$, $s \geqslant 1$, то говорят, что S является суммой этих подмножеств и пишут $S = A_1 + \ldots + A_s$; если при этом элементы различных слагаемых всегда несравнимы, то S называется прямой суммой заданных подмножеств.

Напомним также некоторые определения из [1].

Пусть частично упорядоченное множество S является суммой подмножеств $A_1, \ldots, A_s$. Эта сумма называется односторонней, если (с точностью до перенумерации слагаемых) $i < j$ каждый раз, когда существуют элементы $b \in A_i$ и $c \in A_j$, $i \neq j$, такие, что $b < c$. Далее, сумма $S = A_1 + \ldots + A_s$ называется минимаксной, если x является минимальным, а y — максимальным элементом множества S каждый раз, когда x и y принадлежат разным слагаемым и при этом $x < y$. Формально прямая сумма подмножеств является минимаксной, однако в дальнейшем, говоря о минимаксной сумме, всегда считаем, что она не является прямой.

Частично упорядоченное множество с единственной парой несравнимых элементов называется почти цепным (цепным называется любое линейно упорядоченное множество).

Напомним, наконец, определение квадратичной формы Титса $q_S(z)$ для произвольного частично упорядоченного множества S. Согласно определению это квадратичная форма $q(z) : \mathbb{Z}_0^{S \cup 0} \to \mathbb{Z}$, задаваемая равенством

$$q(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Сформулируем теперь гипотезу, о которой шла речь во введении (отметим, что в первых двух условиях допускаются и пустые цепные множества).

Гипотеза Бондаренко. *Если S — частично упорядоченное множество порядка $n \geq \geq 8$ с положительно определенной формой Титса, то выполняется одно из следующих условий:*

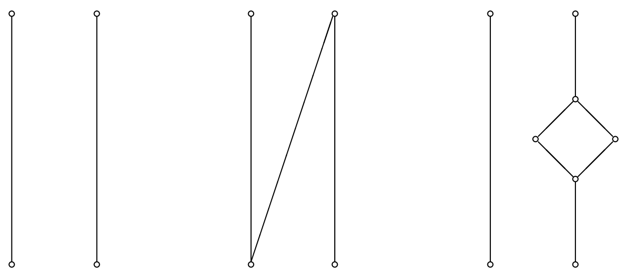
1) S — прямая сумма двух цепных подмножеств;

2) S — односторонняя минимаксная сумма двух цепных подмножеств;

3) S — прямая сумма цепного и почти цепного подмножеств.

Геометрически указанные в условии гипотезы частично упорядоченные множества имеют следующий вид:

1) 2) 3)



(здесь каждый вертикальный отрезок является цепью длины $d \geq 0$, а наклонные отрезки промежуточных точек не содержат).

При этом условие $n \geqslant 8$ является существенным: например, для частично упорядоченного множества $T = \{a_1 < a_2 < a_3 < a_4, a_5 < a_6 < a_7, a_1 < a_6\}$ порядка 7 (которое не удовлетворяет ни одному из условий 1) – 3)) форма Титса является положительно определенной.

Заметим еще, что все частично упорядоченные множества вида 1) – 3) имеют положительно определенную форму Титса (см. [1]).

Мотивации для сформулированной гипотезы указаны в той же работе [25]. Здесь же мы только отметим, что утверждение, аналогичное гипотезе, доказано в [1] для бесконечных частично упорядоченных множеств (при некоторой естественной модификации приведенных выше определений), причем из достаточно сложного доказательства этого утверждения следует, что существует некоторое натуральное число N такое, что гипотеза выполняется для любого $n \geqslant N$.

2. Основной результат. Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 8$ — такое натуральное число, для которого справедлива гипотеза Бондаренко (т. е. любое частично упорядоченное множество порядка n с положительно определенной формой Титса удовлетворяет одному из условий 1) – 3)). Тогда эта гипотеза справедлива и для каждого натурального числа $m > n$.*

Теорема вытекает, очевидно, из следующего чисто комбинаторного утверждения.

Предложение. *Пусть S — частично упорядоченное множество порядка $n > 8$, для каждого собственного подмножества которого выполняется одно из условий 1) – 3). Тогда одно из этих условий выполняется и для самого множества S.*

Заметим, что условие, указанное в первой части предложения, выполняется тогда и только тогда, когда оно выполняется для подмножеств порядка n. Кроме того, условие $n > 8$ (в формулировке предложения) является существенным. Например, для каждого собственного подмножества частично упорядоченного множества (порядка 5) $S = \{a_2 < a_3 < a_4 < a_5, a_1 < a_4\}$ выполняется одно из условий 1) – 3), а для самого S ни одно из этих условий не выполняется (здесь и дальше, задавая конкретное частично упорядоченное множество, мы определяем частичный порядок с точностью до транзитивности).

Доказательство предложения. Введем сначала некоторые обозначения.

Совокупность всех частично упорядоченных множеств вида i), где $i \in \{1, 2, 3\}$, будем обозначать через $\mathcal{P}_i$. Положим $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \bigcup \mathcal{P}_2 \bigcup \mathcal{P}_3$ и обозначим через $\overline{\mathcal{P}}$ совокупность всех частично упорядоченных множеств, которые не принадлежат $\mathcal{P}$. При задании конкретных частично упорядоченных множеств отношение частичного порядка указывается с точностью до транзитивности. Отношение частичного порядка на S обозначим через $\prec$ ($<$ обозначает отношение линейного порядка на множестве целых чисел).

Перейдем непосредственно к доказательству предложения, которое для наглядности сопровождаем геометрическими пояснениями.

Зафиксируем некоторую максимальную точку в S. Обозначим ее через x_0 и положим $T = S \backslash x_0$. В силу условия предложения T имеет вид 1), 2) или 3).

I. Рассмотрим сначала случай, когда частично упорядоченное множество T имеет вид 1):

$$T_1 = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q\},$$

где $p + q = n - 1 \geq 8$ (тогда $p \geq 4, q \geq 0$ или $q \geq 4, p \geq 0$).

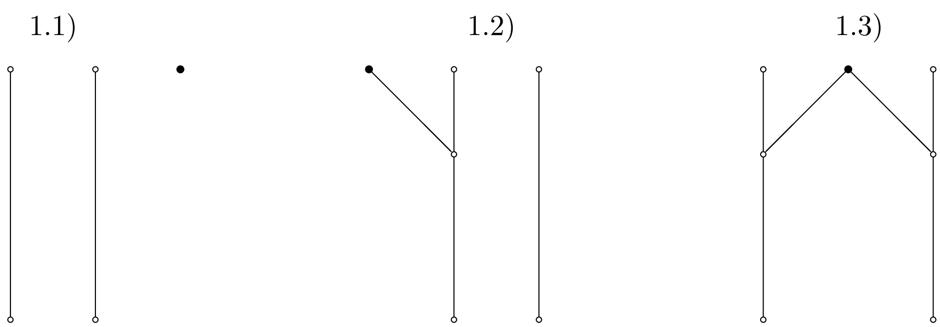
Легко видеть, что тогда для частично упорядоченного множества S имеет место один из следующих случаев:

1.1) $S_{1.1} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, x_0\}$ (т. е. x_0 — точка, несравнимая с любой точкой из T);

1.2) $S_{1.2} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_r \prec x_0\}$, где $1 \leq r \leq p$;

1.3) $S_{1.3} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_r \prec x_0, b_s \prec x_0\}$, где $1 \leq r \leq p$, $1 \leq s \leq q$.

Геометрически эти множества имеют соответственно следующий вид:



Здесь и далее мы для простоты указываем только основные точки; при этом номера этих точек не указываются, но они легко устанавливаются. Точка x_0 на рисунках отмечена знаком $\bullet$.

Рассмотрим отдельно каждый из случаев 1.1) – 1.3). Заметим, что на рисунках цепь $A = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p\}$ расположена слева, а цепь $B = \{b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q\}$— справа.

1.1) Если $p = 0$ или $q = 0$, то получим случай 1), а если $p = 1$ или $q = 1$ — случай 3). В других случаях, если $p \geq 4$, удалим a_p-ю точку, а если $q \geq 4$ — b_q-ю точку; в обоих случаях получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

1.2) Если $r = p$, то получим случай 1), а если $r = p - 1$ — случай 3). Будем теперь считать, что $r \neq p - 1, p$. Если при этом $q = 0$ и $r = 1$, то получим случай 2). Если же $q = 0$ и $r \neq 1$, то удалим a_3-ю точку, если $q \neq 0$ и $p \geq 4$ — a_2-ю точку, если же $q \geq 4$

— b_q-ю точку. В каждом из случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

1.3) Если $r = p$ и $s = 1$ или $r = 1$ и $s = q$, то получим случай 2). В других случаях, если $r \geq 3$, удалим a_r-ю точку, если $s \geq 3$ — b_s-ю точку, если $r < 3$, $s < 3$ и $p \geq 4$ — a_p-ю точку, если же $r < 3$, $s < 3$ и $q \geq 4$ — b_q-ю точку. В каждом из этих четырех случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

II. Рассмотрим теперь случай, когда частично упорядоченное множество T имеет вид 2):

$$T_2 = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_1 \prec b_q\},$$

где $p + q = n - 1 \geq 8$ (тогда $p \geq 4$ или $q \geq 4$).

Легко видеть, что тогда для частично упорядоченного множества S имеет место один из следующих случаев:

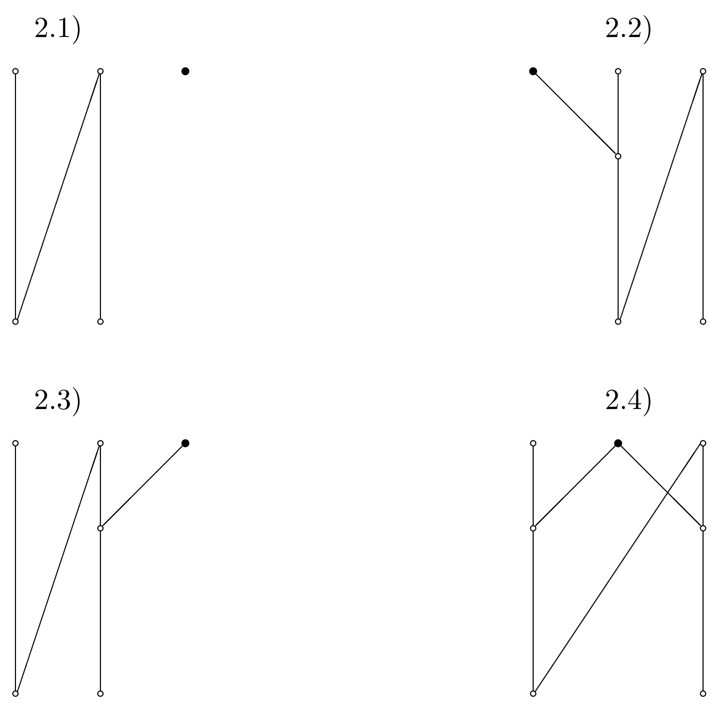
2.1) $S_{2.1} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_1 \prec b_q, x_0\}$;

2.2) $S_{2.2} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_1 \prec b_q, a_r \prec x_0\}$, где $1 \leq r \leq p$;

2.3) $S_{2.3} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_1 \prec b_q, b_r \prec x_0\}$, где $1 \leq r \leq q$;

2.4) $S_{2.4} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p, b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_1 \prec b_q, a_r \prec x_0, b_s \prec x_0\}$, где $1 \leq r \leq p, 1 \leq s \leq q, (r, s) \neq (1, q)$.

Геометрически эти множества имеют соответственно следующий вид:



Рассмотрим отдельно каждый из случаев 2.1) – 2.4). Заметим, что на рисунках цепь $A = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p\}$ расположена слева, а цепь $B = \{b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q\}$ — справа.

2.1), 2.3) Если $p \geq 4$, то удалим a_p-ю точку, если $q \geq 4$ — b_1-ю точку. В обоих случаях получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

2.2) Если $r = p$, то получим случай 2). Пусть $r \neq p$. Если $q > 1$, то удалим b_1-ю точку, если $q = 1$ — a_2-ю точку. В обоих случаях получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

2.4). Если $p \geq 4$, то удалим a_p-ю точку, если $q \geq 4$ — b_2-ю точку. В обоих случаях получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

III. Рассмотрим, наконец, случай, когда частично упорядоченное множество T имеет вид 3):

$T_3 = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \prec c_r\}$,
где $p+q+r = n-1 \geq 8$ (тогда $p \geq 2$, $q \geq 2$ или $r \geq 2$).

Легко видеть, что тогда для частично упорядоченного множества S имеет место один из следующих случаев:

3.1) $S_{3.1} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, x_0\}$;

3.2) $S_{3.2} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, a_s \prec x_0\}$, где $1 \leq s \leq p$;

3.3) $S_{3.3} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, a \prec x_0\}$;

3.4) $S_{3.4} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, b_s \prec x_0\}$, где $1 \leq s \leq q$;

3.5) $S_{3.5} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, c_s \prec x_0\}$, где $1 \leq s \leq r$;

3.6) $S_{3.6} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, a \prec x_0, b \prec x_0\}$;

3.7) $S_{3.7} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, a_s \prec x_0, c_t \prec x_0\}$, где $1 \leq s \leq p, 1 \leq t \leq r$;

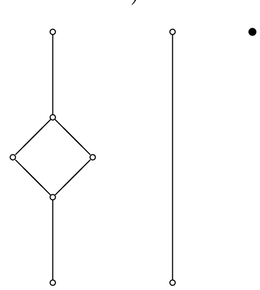
3.8) $S_{3.8} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, b \prec x_0, c_s \prec x_0\}$, где $1 \leq s \leq r$;

3.9) $S_{3.9} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, b_s \prec x_0, c_t \prec x_0\}$, где $1 \leq s \leq q, 1 \leq t \leq r$;

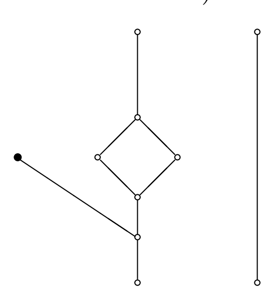
3.10) $S_{3.10} = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p \prec a \prec b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q, a_p \prec b \prec b_1, c_1 \prec c_2 \prec \ldots \ldots \prec c_r, a \prec x_0, b \prec x_0, c_s \prec x_0\}$, где $1 \leq s \leq r$.

Геометрически эти множества имеют соответственно следующий вид:

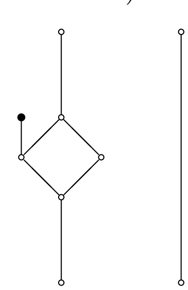
3.1)



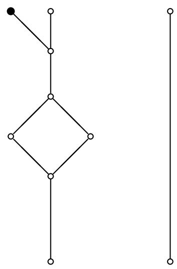
3.2)



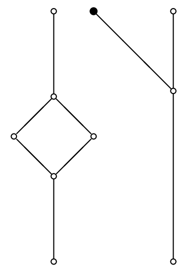
3.3)



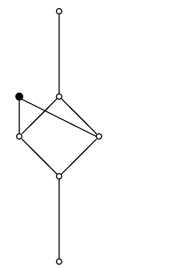
3.4)



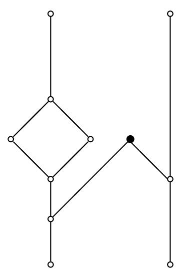
3.5)



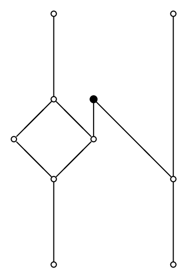
3.6)



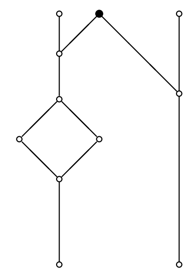
3.7)



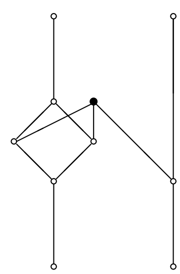
3.8)



3.9)



3.10)



Рассмотрим отдельно каждый из случаев 3.1) – 3.10). Заметим, что цепь $A = \{a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_p\}$ — часть почти цепи, которая находится ниже единственной пары несравнимых элементов a, b; цепь $B = \{b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_q\}$ — часть почти цепи, которая находится выше элементов a, b; цепь $C = \{c_1 \prec c_2 \prec \ldots \prec c_r\}$ расположена на рисунках справа.

3.1) Если $r = 0$, то получим случай 3). Пусть $r \neq 3$. Если $p \geq 2$, то удалим a_p-ю точку, если $q \geq 2$ — b_q-ю точку, если же $r \geq 2$ — c_r-ю точку. В каждом из этих трех случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

3.2), 3.3), 3.7), 3.8), 3.10) Если $p \geq 2$, то удалим a_p-ю точку, если $q \geq 2$ — b_q-ю точку, если же $r \geq 2$ — c_r-ю точку. В каждом из трех случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

3.4) Если $s = q$, то получим случай 3). Пусть $s \neq q$. Если $p \geq 2$, то удалим a_p-ю точку, если $q \geq 2$ — b_q-ю точку, если же $r \geq 2$ — c_r-ю точку. В каждом из этих трех случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

3.5) Если $s = r$ (в частности, $r = 0$), то получим случай 3). Пусть $s \neq r$. Если $p \geq 2$, то удалим a_p-ю точку, если $q \geq 2$ — b_q-ю точку, если же $r \geq 2$ — c_r-ю точку. В каждом из этих трех случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

3.6) Если $q = 0$, то получим случай 3). Пусть $q \neq 0$. Если $p \geq 2$, то удалим a_p-ю точку, если $q \geq 2$ — b_q-ю точку, если же $r \geq 2$ — c_r-ю точку. В каждом из этих трех случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

3.9) Если $r = 0$ и $s = q$, то получим случай 3). В других случаях, если $p \geq 2$, удалим a_p-ю точку, если $q \geq 2$ — b_q-ю точку, если же $r \geq 2$ — c_r-ю точку. В каждом из этих трех случаев получим подмножество из $(n-1)$-й точки, которое принадлежит $\overline{\mathcal{P}}$, что противоречит условию предложения.

Итак, рассмотрев все возможные случаи, мы доказали, что частично упорядоченное множество из $n > 8$ точек принадлежит $\mathcal{P}$, если любое его подмножество из $(n-1)$-й точки принадлежит $\mathcal{P}$, и, следовательно, предложение доказано.

1. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 1. — С. 3 – 14.
2. *Alsina M., Bayer P.* Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves // CRN Monogr. Ser. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — **22**. — 196 p.
3. *Shimura G.* Arithmetic and analytic theories of quadratic forms and Clifford groups // Math. Surv. and Monogr. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — **109**. — 275 p.
4. *Hoffmann D. W., Lanhribi A.* Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2 // Trans. Amer. Math. Soc. — 2004. — № 10. — P. 4019 – 4052.
5. *Ateiwi A. M.* A study of dichotomy of linear systems of difference equations using the quadratic forms // J. Fract. Calc. — 2004. — **25**. — P. 93 – 100.
6. *Fang F., Pan J.* Secondary Brown – Kervaire quadratic forms and π-manifolds // Forem Math. — 2004. — **16**, № 4. — P. 459 – 481.
7. *Ueno T.* Modular forms arising from zeta functions in two variables attached to prehomogeneous vector spaces related to quadratic forms // Nagoya Math. J. — 2004. — **175**. — P. 1 – 37.
8. *Chan W. K., Peters M.* Quaternary quadratic forms and Hilbert modular surfaces // Contemp. Math. — 2004. — **344**. — P. 85 – 97.
9. *Kohnen W.* Special Siegel modular forms and singular series polynomials of quadratic forms // Ibid. — P. 229 – 236.
10. *Laghribi A.* Quasi-hyperbolicity of totally singular quadratic forms // Ibid. — P. 237 – 248.
11. *Schulze-Pillot R.* Representation by integral quadratic forms — a survey // Ibid. — P. 303 – 321.
12. *Fitzgerald R. W., Yucas J. L.* Pensils of quadratic forms over finite fields // Discrete Math. — 2004. — **283**. — P. 71 – 79.
13. *Li M., Dezhong C.* Systems of Hermitian quadratic forms // Can. Math. Bull. — 2004. — **47**, № 1. — P. 73 – 81.
14. *Car M.* Quadratic forms with polynomial coefficients // Acta Arithm. — 2004. — **113**, № 2. — P. 131 – 155.
15. *Bevelacqua A. J.* Four dimensional quadratic forms over $F(X)$ where $I_t^3 F(X) = 0$ and a failure of the strong Hasse principle // Communs Algebra. — 2004. — **32**, № 3. — P. 855 – 877.
16. *Teksan A.* Representations of positive integers by a direct sum of quadratic forms // Results Math. — 2004. — **46**. — P. 146 – 163.
17. *Jaschke S., Keúppelberg C., and Lindner A.* Asymptotic behavior of tails and quantiles of quadratic forms of Gaussian vectors // J. Multivar. Anal. — 2004. — **88**, № 2. — P. 252 – 273.
18. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscr. math. — 1972. — **6**. — P. 71 – 103, 309.

19. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Representations Algebras. — Ottawa, Ontario: Carleton Univ., 1974. — Paper № 5.

20. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. — 1974. — **8**. — С. 34 – 42.

21. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи / Отв. ред. Ю. А. Митропольский. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 5 – 70.

22. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1972. — **28**. — С. 5 – 31.

23. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О подкатегориях конечного ранга категории представлений неограниченного частично упорядоченного множества // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. — 2003. — Вип. 8. — С. 15 – 22.

24. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О квадратичной форме Титса для бесконечных частично упорядоченных множеств // Там же. — 2002. — Вип. 7. — С. 28 – 31.

25. *Bondarenko V. M.* On one conjecture for positive definite quadratic forms // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2005. — № 3. — С. 11 – 13.

Получено 18.08.2005