УДК 517.962.2

# ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ*

**Г. П. Пелюх, Н. А. Богай**

*Ін-т математики НАН України*
*Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3*
*e-mail: grygor@imath.kiev.ua*

*For a natural $N$, we obtain conditions for existence of continuous and $N$-periodic solutions to systems of linear difference equations with continuous argument, and study the structure of the set of such solutions.*

*Одержано умови існування неперервних і $N$-періодичних ($N$ — ціле додатне число) розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом і досліджено структуру множини таких розв'язків.*

Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{k} A_i(t)x(t-i) + f(t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, $A_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, — деякі дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbf{R}^n$, $x(t)$ — невідома вектор-функція розмірності $n$. При різних припущеннях щодо матриць $A_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, і вектора $F(t)$ такі системи рівнянь були об'єктом дослідження багатьох математиків і на даний час ряд важливих питань їх теорії достатньо добре вивчено (див. [1–5] і наведену в них бібліографію). До них відносяться також питання існування неперервних і періодичних розв'язків, які особливо активно вивчаються в останні роки. Зокрема, в [4, 5] побудовано загальний неперервний розв'язок системи рівнянь (1) у випадку $k = 0$, $F(t) = 0$ і досліджено його структуру. Відмічені дослідження природно привели до необхідності дослідження питань існування неперервних і $N$-періодичних ($N$ — ціле додатне число) розв'язків системи рівнянь (1) у загальному випадку. Саме це і дослідження структури загального неперервного розв'язку системи (1) є основною метою даної роботи.

Зауважимо, що під розв'язком системи рівнянь (1) будемо розуміти вектор-функцію $x(t)$, що є однозначно визначеною при $t \geq -k$ і перетворює її в тотожність при підстановці.

**1. Неперервні розв'язки.** Дослідимо спочатку питання про існування неперервних при $t \geq -k$ розв'язків системи рівнянь (1). При цьому будемо припускати виконаною умову

1) всі елементи матриць $A_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними при $t \geq 0$ функціями.

* Виконано при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Міністерстві України з питань науки і технологій.

Оскільки для довільного дійсного $t \geq 0$ виконується співвідношення $t - [t] = \tau \in [0, 1)$, де $[t]$ — ціла частина $t$, то, поклавши

$$x(\tau - i) = x_{-i}(\tau - i), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{2}$$

де $x_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k,$ — довільні неперервні при $\tau \in [0, 1)$ вектор-функції, можна однозначно визначити розв'язок системи (1) при довільному $t \geq 0$. Справді, безпосередньо з (1) отримуємо

$$x(\tau + 1) = \sum_{i=0}^{k} A_i(\tau) x(\tau - i) + F(\tau) = \sum_{i=0}^{k} A_i^1(\tau) x_{-i}(\tau - i) + F^1(\tau),$$

$$\begin{aligned} x(\tau + 2) &= \sum_{i=0}^{k} A_i(\tau + 1) x(\tau + 1 - i) + F(\tau + 1) = \\ &= A_0(\tau + 1) \left[ \sum_{i=0}^{k} A_i^1(\tau) x_{-i}(\tau - i) + F^1(\tau) \right] + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} A_{i+1}(\tau + 1) x_{-i}(\tau - i) + F(\tau + 1) = \sum_{i=0}^{k} A_i^2(\tau) x_{-i}(\tau - i) + F^2(\tau), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} x(\tau + [t]) &= \sum_{i=0}^{k} A_i(\tau + [t] - 1) x(\tau + [t] - 1 - i) + F(\tau + [t] - 1) = \\ &= \sum_{i=0}^{k} A_i^{[t]}(\tau) x_{-i}(\tau - i) + F^{[t]}(\tau), \end{aligned}$$

де

$$A_i^1 = A_i(\tau), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad F^1(\tau) = F(\tau),$$

$$A_i^2(\tau) = A_0(\tau + 1) A_i^1(\tau) + A_{i+1}(\tau + 1), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad A_{k+1}(\tau) = 0,$$

$$F^2(\tau) = A_0(\tau + 1) F^1(\tau) + F(\tau + 1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_j^{k+1}(\tau) = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(\tau + k) A_j^{k-i}(\tau) + A_{k+j}(\tau + k), \quad j = 0, 1, \ldots, k, \quad A_i(\tau) \equiv 0, \quad i > k,$$

$$F^{k+1}(\tau) = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(\tau + k) F^{k-i}(\tau) + F(\tau + k), \tag{4}$$

$$A_j^m(\tau) = \sum_{i=0}^{k} A_i(\tau + m - 1) A_j^{m-1-i}(\tau), \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

$$F^m(\tau) = \sum_{i=0}^{k} A_i(\tau + m - 1) F^{m-1-i}(\tau) + F(\tau + m - 1), \quad m > k + 1.$$

Таким чином, вектор-функція $x(t)$, що однозначно визначається формулами (2), (3), задовольняє систему рівнянь (1), залежить від $k+1$ довільних неперервних при $t \in [0,1)$ вектор-функцій $x_{-i}(t-i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, і є, взагалі кажучи, кусково-неперервною (розриви можуть виникати в точках $t = -k+1, -k+2, \ldots$). Зрозуміло, що так побудована вектор-функція $x(t)$ буде неперервною при $t \geq -k$ лише у випадку, коли довільні вектор-функції $x_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $\tau \in [0,1)$, задовольняють деякі додаткові умови. Наприклад, якщо неперервні при $\tau \in [0,1)$ вектор-функції $x_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, такі, що існують границі

$$\lim_{\tau \to 1-0} x_{-i}(\tau - i) = x_{-i}^1 \neq \pm\infty, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \lim_{\tau \to 1-0} x_0(\tau) = x_0^1 \neq \pm\infty, \tag{5}$$

і виконуються рівності

$$x_{-i}^1 = x_{-i+1}(-i+1), \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$x_0^1 \sum_{i=0}^{k} A_i(0) x_{-i}(-i) + F(0), \tag{6}$$

то легко переконатися, що вектор-функція

$$x(t) = x(\tau + [t]) = \sum_{i=0}^{k} A_i^{[t]}(\tau) x_{-i}(\tau - i) + F^{[t]}(\tau), \tag{7}$$

де $A_i^j(\tau), F^j(\tau)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, [t]$, визначаються співвідношеннями (4), є неперервною при всіх $t \geq -k$ і задовольняє систему рівнянь (1). Тим самим доведено наступну теорему.

**Теорема 1.** *Якщо виконується умова 1), то система рівнянь (1) має сім'ю неперервних при $t \geq -k$ розв'язків (7), яка залежить від $k+1$ довільних неперервних при $\tau \in [0,1)$ вектор-функцій $x_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, що задовольняють умови (5), (6).*

**2. Структура загального неперервного розв'язку.** Виконуючи в (1) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t-k) = y(t), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

зводимо дослідження структури загального неперервного розв'язку системи рівнянь (1) до дослідження структури загального неперервного розв'язку системи рівнянь вигляду

$$y(t+k+1) = \sum_{i=0}^{k} A_i(t) y(t+k-i) + F(t), \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Далі, якщо покласти

$$y^i(t+1) = y^{i+1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{10}$$

де $y^0(t) = y(t)$, то дослідження системи (9) в свою чергу зводиться до дослідження системи

$$y^i(t+1) = y^{i+1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{11}$$

$$y^k(t+1) = \sum_{j=0}^{k} Aj(t) y^{k-j}(t) + F(t).$$

Ввівши позначення

$$z(t) = \operatorname{col}\left(y^0(t), y^1(t), \ldots, y^k(t)\right),$$

$$\widetilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_k(t) & A_{k-1}(t) & A_{k-2}(t) & \ldots & A_0(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F}(t) = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, F(t)),$$

запишемо систему рівнянь (11) у вигляді

$$z(t+1) = \widetilde{A}(t) z(t) + \widetilde{F}(t), \quad t \geq 0, \tag{12}$$

і дослідимо структуру її загального неперервного розв'язку.

Спочатку покажемо, що при виконанні умови 1) система (12) має неперервний при $t \geq 0$ розв'язок. Справді, оскільки для довільного дійсного $t \geq 0$ маємо $t - [t] = \tau \in [0, 1)$, де $[t]$ — ціла частина $t$, то, покладаючи в (12) $z(\tau) = \varphi(\tau)$ при $\tau \in [0, 1)$, де $\varphi(\tau)$ — довільна неперервна при $\tau \in [0, 1)$ вектор-функція, що задовольняє умови

$$\lim_{\tau \to 1-0} \varphi(\tau) = \varphi^1, \tag{13}$$

$$\varphi^1 = \widetilde{A}(0)\varphi(0) + \widetilde{F}(0),$$

безпосередньо із (12) послідовно одержуємо

$$\begin{aligned} z(\tau+1) &= \widetilde{A}(\tau)\varphi(\tau) + \widetilde{F}(\tau), \\ z(\tau+2) &= \widetilde{A}(\tau+1) z(\tau+1) + \widetilde{F}(\tau+1) = \widetilde{A}(\tau+1)\widetilde{A}(\tau)\varphi(\tau) + \widetilde{A}(\tau+1)\widetilde{F}(\tau) + \widetilde{F}(\tau+1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (14) \\ z(\tau+[t]) &= z(t) = \widetilde{A}(\tau+[t]-1)\ldots\widetilde{A}(\tau+1)\widetilde{A}(\tau)\varphi(\tau) + \widetilde{A}(\tau+[t]-1)\ldots \\ &\ldots\widetilde{A}(\tau+1)\widetilde{F}(\tau) + \ldots + \widetilde{A}(\tau+[t]-1)\widetilde{F}(\tau+[t]-2) + \widetilde{F}(\tau+[t]-1). \end{aligned}$$

Легко переконатися, що так побудована вектор-функція $z(t)$ є неперервним розв'язком (позначимо його $\gamma(t)$) системи рівнянь (1).

Якщо тепер виконаємо в (12) взаємно однозначну заміну змінних

$$z(t) = \widetilde{z}(t) + \gamma(t), \tag{15}$$

то задача про побудову загального неперервного розв'язку системи рівнянь (12) зведеться до побудови загального неперервного розв'язку однорідної системи

$$\widetilde{z}(t+1) = \widetilde{A}(t)\widetilde{z}(t). \tag{16}$$

Для системи рівнянь (16) має місце наступна теорема.

**Теорема 2.** *Нехай матриці* $A_i(t), i = 0, 1, \ldots, k,$ *задовольняють умову 1) і виконується нерівність*

*2)* $\det \widetilde{A}(t) \neq 0, t \geq 0.$

*Тоді існує взаємно однозначна заміна змінних*

$$\widetilde{z}(t) = Z(t)\upsilon(t), \tag{17}$$

*де* $Z(t)$ *— деяка неособлива при* $t \in \mathbb{R}^+$ *неперервна* $(n \times n)$*-матриця, що приводить систему рівнянь (16) до вигляду*

$$\upsilon(t+1) = \upsilon(t). \tag{18}$$

Для доведення теореми достатньо, очевидно, показати, що матрична система різницевих рівнянь вигляду

$$Z(t+1) = \widetilde{A}(t)\, Z(t) \tag{19}$$

має розв'язок $Z(t)$ з вказаними в теоремі властивостями.

Побудуємо частковий розв'язок системи рівнянь (19). Для цього покладемо в (19) $z(\tau) = \Phi(\tau)$ при $\tau \in [0, 1)$, де $\Phi(\tau)$ — деяка неособлива неперервна матрична функція, що задовольняє умови

$$\begin{aligned} &\Phi(1-0) = \Phi^1, \\ &\Phi^1 = \widetilde{A}(0)\Phi(0). \end{aligned} \tag{20}$$

Тоді безпосередньо із (19) послідовно отримуємо

$$z(\tau+1) = \widetilde{A}(\tau)\Phi(\tau), \tag{21}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z(t) = z(\tau + [t]) = \widetilde{A}(\tau + [t] - 1)\ldots\widetilde{A}(\tau)\Phi(\tau).$$

Отже, система рівнянь (19) має розв'язок $z(t)$, що визначається за допомогою формули (21). Внаслідок умов 1), 2), (20) цей розв'язок є, очевидно, неперервним при $t \in \mathbb{R}^+$ і $\det Z(t) \neq 0$.

Теорему 2 доведено.

Оскільки систему рівнянь (18) задовольняє довільна неперервна при $t \in \mathbb{R}^+$ 1-періодична вектор-функція $\omega(t)$, то, беручи до уваги заміну змінних (17), одержуємо зображення загального неперервного при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язку системи рівнянь (16):

$$\widetilde{z}(t) = \widetilde{A}(\tau + [t] - 1) \ldots \widetilde{A}(\tau + 1)\widetilde{A}(\tau)\Phi(\tau)\omega(t), \tag{22}$$

де $\Phi(\tau)$ — деяка неособлива неперервна матрична функція, що задовольняє умови (20), а $\omega(t)$ — довільна неперервна при $t \geq 0$ 1-періодична вектор-функція.

Зважаючи на (14), (15), (22), можна одержати загальний неперервний при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок системи рівнянь (12) у вигляді

$$z(t) = \widetilde{A}(\tau + [t] - 1) \ldots \widetilde{A}(\tau + 1)\widetilde{A}(\tau)\Phi(\tau)\omega(t) + \widetilde{A}(\tau + [t] - 1) \ldots \widetilde{A}(\tau + 1)\widetilde{A}(\tau)\varphi(\tau) +$$

$$+ \widetilde{A}(\tau + [t] - 1) \ldots \widetilde{A}(\tau + 1)\widetilde{F}(\tau) + \ldots + \widetilde{A}(\tau + [t] - 1)\widetilde{F}(\tau + [t] - 2) + \widetilde{F}(\tau + [t] - 1), \tag{23}$$

де неособлива при $\tau \in [0, 1)$ матрична функція $\Phi(\tau)$ і вектор-функція $\varphi(\tau)$ є неперервними і такими, що виконуються умови (20) і (13) відповідно, а $\omega(t)$ — довільна неперервна при $t \in \mathbb{R}^+$ 1-періодична вектор-функція. Тим самим доведено наступну теорему.

**Теорема 3.** *Якщо виконуються умови 1), 2), то загальний неперервний при $t \geq 0$ розв'язок системи рівнянь (12) має вигляд (23).*

Зауважимо, що з огляду на теорему 3 і перетворення (8), (10) можна одержати зображення загального неперервного при $t \geq -k$ розв'язку системи рівнянь (1).

**3. Періодичні розв'язки.** Припустимо тепер, що окрім умов 1), 2) виконується умова

3) всі елементи матриць $A_i(t), i = 0, 1, \ldots, k,$ і вектора $F(t)$ є $N$-періодичними функціями ($N$ — ціле додатне число),

і розглянемо задачу про існування $N$-періодичних розв'язків системи (12).

Нехай $z(t)$ —деякий неперервний при $t \in \mathbb{R}^+$ $N$-періодичний розв'язок системи рівнянь (12), тобто має місце тотожність

$$z(t + 1) = \widetilde{A}(t)z(t) + \widetilde{F}(t).$$

Звідси послідовно одержуємо

$$z(t + 2) = \widetilde{A}(t + 1)z(t + 1) + \widetilde{F}(t + 1) = \widetilde{A}(t + 1)\widetilde{A}(t)z(t) + \widetilde{A}(t + 1)\widetilde{F}(t) + \widetilde{F}(t + 1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{24}$$

$$z(t + N) = \widetilde{A}(t + N - 1) \ldots \widetilde{A}(t + 1)\widetilde{A}(t)z(t) + \widetilde{A}(t + N - 1) \ldots \widetilde{A}(t + 1)\widetilde{F}(t) + \ldots$$

$$\ldots + \widetilde{A}(t + N - 1)\widetilde{F}(t + N - 2) + \widetilde{F}(t + N - 1).$$

Отже, вектор-функція $z(t)$ задовольняє систему рівнянь (24). Хоча в загальному випадку не кожний неперервний $N$-періодичний розв'язок системи рівнянь (24) є розв'язком системи рівнянь (12), але має місце наступна теорема.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови 1), 3) і умова*
4) $\det \overline{A}(t) \neq 0$ *при всіх* $t \in \mathbb{R}^+$,
*де*

$$\overline{A}(t) = E - \widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{A}(t),$$

$E$ *— одинична* $(n \times n)$*-матриця.*
*Тоді справджуються твердження:*
*а) система рівнянь (24) має єдиний неперервний при* $t \in \mathbb{R}^+$ $N$*-періодичний розв'язок*

$$\gamma(t) = \overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t), \tag{25}$$

*де*

$$\overline{F}(t) = \widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{F}(t) + \ldots + \widetilde{A}(t+N-1)\widetilde{F}(t+N-2) + \widetilde{F}(t+N-1);$$

*б) вектор-функція*

$$\gamma(t) = \overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t)$$

*є єдиним неперервним при* $t \in \mathbb{R}^+$ $N$*-періодичним розв'язком системи рівнянь (12).*

***Доведення.*** На підставі умов теореми вектор-функція

$$\gamma(t) = \overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t)$$

є неперервною при $t \in \mathbb{R}^+$ і $N$-періодичною. Тому в результаті безпосередньої підстановки її в (24) одержуємо

$$\overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t) = \left(E - \overline{A}(t)\right)\overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t) + \overline{F}(t) = \overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t) - \overline{F}(t) + \overline{F}(t) = \overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t),$$

тобто вектор-функція

$$\gamma(t) = \overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t)$$

є розв'язком системи рівнянь (24).

Покажемо тепер, що в цьому випадку вектор-функція

$$\gamma(t) = \overline{A}^{\,-1}(t)\overline{F}(t)$$

є єдиним неперервним при $t \geq 0$ $N$-періодичним розв'язком системи рівнянь (24). Справді, припустимо, що система (24) має ще один неперервний при $t \geq 0$ $N$-періодичний розв'язок $\upsilon(t)$ такий, що $\upsilon(t) \neq \gamma(t)$. Тоді виконується тотожність

$$\gamma(t+N) - \upsilon(t+N) = \widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{A}(t)(\gamma(t) - \upsilon(t)).$$

Звідси (внаслідок $N$-періодичності вектор-функцій $\gamma(t)$, $\upsilon(t)$) одержуємо

$$\overline{A}(t)(\gamma(t) - \upsilon(t)) = 0,$$

що (на підставі умови 4)) може мати місце лише у випадку, коли $\gamma(t) \equiv v(t)$. Одержана суперечність завершує доведення твердження $a$).

Оскільки згідно з твердженням $a$) має місце тотожність

$$\gamma(t) = \widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{A}(t)\gamma(t) + \widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{F}(t)+$$
$$+\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+2)\widetilde{F}(t+1) + \ldots + \widetilde{A}(t+N-1)\widetilde{F}(t+N-2) + \widetilde{F}(t+N-1),$$

то, очевидно, справджуються також тотожності

$$\gamma(t+1) = \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\gamma(t+1) + \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+2)\widetilde{F}(t+1)+$$
$$+\widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+3)\widetilde{F}(t+2) + \ldots + \widetilde{A}(t)\widetilde{F}(t+N-1) + \widetilde{F}(t),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(t)\gamma(t) + \widetilde{F}(t) = {} & \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{A}(t)\gamma(t)+ \\ & + \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{F}(t) + \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots \\ & \ldots\widetilde{A}(t+2)\widetilde{F}(t+1) + \ldots + \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\widetilde{F}(t+N-2)+ \\ & + \widetilde{A}(t)\widetilde{F}(t+N-1) + \widetilde{F}(t) = \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+n-1)\ldots \\ & \ldots\widetilde{A}(t+1)\left[\widetilde{A}(t)\gamma(t) + \widetilde{F}(t)\right] + \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+2)\widetilde{F}(t+1) + \ldots \\ & \ldots + \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\widetilde{F}(t+N-2) + \widetilde{A}(t)\widetilde{F}(t+N-1) + \widetilde{F}(t).\end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає тотожність

$$\gamma(t+1) - \left(\widetilde{A}(t)\gamma(t) + \widetilde{F}(t)\right) = \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\left[\gamma(t+1) - \left(\widetilde{A}(t)\gamma(t) + \widetilde{F}(t)\right)\right],$$

яку можна записати у вигляді

$$\left[E - \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\right]\left[\gamma(t+1) - \left(\widetilde{A}(t)\gamma(t) + \widetilde{F}(t)\right)\right] = 0.$$

Оскільки на підставі результатів [4] і умови 4) маємо

$$\det\left[E - \widetilde{A}(t)\widetilde{A}(t+N-1)\ldots\widetilde{A}(t+1)\right] = \det\overline{A}(t) \neq 0$$

при всіх $t \geq 0$, то з останнього співвідношення одержуємо

$$\gamma(t+1) - (A(t)\gamma(t) + F(t)) = 0,$$

тобто вектор-функція $\gamma(t)$ є розв'язком системи рівнянь (12).

Доведемо насамкінець, що при виконанні умов теореми система рівнянь (12) не має інших неперервних при $t \geq 0$ $N$-періодичних розв'язків, окрім $\gamma(t) = \overline{A}^{-1}(t)\overline{F}(t)$. Справді, якщо припустити, що існує ще один неперервний при $t \geq 0$ $N$-періодичний розв'язок $\upsilon(t)$ системи рівнянь (12) такий, що $\upsilon(t) \neq \gamma(t)$, то має місце тотожність

$$\gamma(t+1) - \upsilon(t+1) = \widetilde{A}(t)(\gamma(t) - \upsilon(t)).$$

Звідси і з $N$-періодичності вектор-функцій $\gamma(t)$, $\upsilon(t)$ одержуємо

$$\gamma(t+2) - \upsilon(t+2) = \widetilde{A}(t+1)(\gamma(t+1) - \upsilon(t+1)) = \widetilde{A}(t+1)\widetilde{A}(t)(\gamma(t) - \upsilon(t)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\gamma(t+N) - \upsilon(t+N) = \widetilde{A}(t+N-1)\dots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{A}(t)(\gamma(t) - \upsilon(t)),$$

$$\gamma(t) - \upsilon(t) = \widetilde{A}(t+N-1)\dots\widetilde{A}(t+1)\widetilde{A}(t)(\gamma(t) - \upsilon(t)),$$

або $\overline{A}(t)[\gamma(t) - \upsilon(t)] = 0$.

На підставі умови 4) з останньої тотожності випливає тотожність $\gamma(t) = \upsilon(t)$, що суперечить зробленому припущенню.

Теорему 4 доведено.

Зауважимо, що, взявши до уваги заміни змінних (8), (10) і теорему 4, можна побудувати неперервний при $t \geq -k$ $N$-періодичний розв'язок $x(t)$ системи рівнянь (1).


1. *Guldberg A., Wallenberg G.* Theorie der linearen differenzengleichungen. — Berlin, 1911. — 288 S.
2. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**, № 2. — P. 242–284.
3. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
4. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. РАН. — 1994. — **336**, № 4. — С. 451–452.
5. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 1994. — **30**, № 3. — С. 514–519.


*Одержано 12.07.2005*