УДК 517.956.4

ПЕРІОДИЧНІ КОНТРАСТНІ СТРУКТУРИ ТИПУ СХОДИНКИ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З МАЛИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ДИФУЗІЇ

О. Є. Омельченко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, ул. Терещенківська, 3
e-mail: omel@imath.kiev.ua

Using the boundary layer function method, an asymptotic expansion of the periodic solution with internal transition layer is built for a quasilinear parabolic equation with small diffusion term. Sufficient conditions for existence of such a solution are found.

За допомогою методу межових функцій для квазілінійного параболічного рівняння з малим коефіцієнтом дифузії побудовано асимптотичне розвинення періодичного розв'язку з внутрішнім перехідним шаром. Отримано достатні умови існування такого розв'язку.

1. Вступ. У даній роботі розглядається крайова задача для сингулярно збуреного одновимірного за просторовою змінною параболічного рівняння вигляду

$$L[u] := -u_t + \varepsilon u_{xx} - A(u,x,t)u_x - B(u,x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega := (a,b) \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(a,t,\varepsilon) = u_a(t), \quad u(b,t,\varepsilon) = u_b(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, A, B, u_a та u_b — достатньо гладкі функції своїх аргументів, періодичні за змінною t з одним і тим самим періодом $T > 0$.

Подібні задачі моделюють процеси переносу в неоднорідних середовищах під дією періодичних збурень. При цьому, з точки зору практичних застосувань, цікавим є дослідження стаціонарних періодичних режимів, які можуть виникати у такій системі.

Для рівнянь типу (1) найбільш дослідженою є початково-крайова задача, якій присвячено низку робіт вітчизняних та зарубіжних учених (див. огляд [1] і наведену в ньому бібліографію). Однак слід зазначити, що більшість з цих робіт пов'язана з обґрунтуванням так званого методу „штучної в'язкості". За допомогою цього методу вводиться поняття узагальненого розв'язку для квазілінійного гіперболічного рівняння

$$u_t + A(u,x,t)u_x + B(u,x,t) = 0, \tag{3}$$

яке є виродженим щодо рівняння (1). А саме, розв'язком початково-крайової задачі для рівняння (3) називається границя при $\varepsilon \to +0$ послідовності розв'язків відповідної початково-крайової задачі для рівняння (1). Зрозуміло, що при такому підході розв'язки останньої задачі не є головним об'єктом дослідження, отже, їх структуру детально ніхто не розглядав. Що ж стосується крайової задачі (1), (2) з періодичними по t коефіцієнтами, то, наскільки відомо автору, вона до цього часу взагалі не була предметом досліджень.

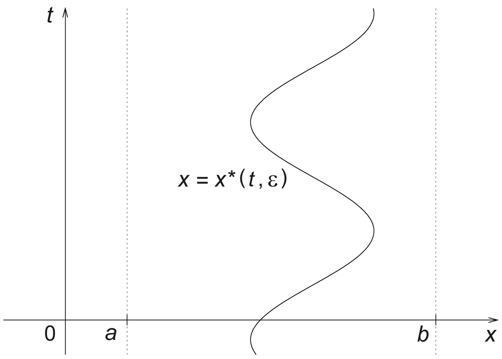

Рис. 1

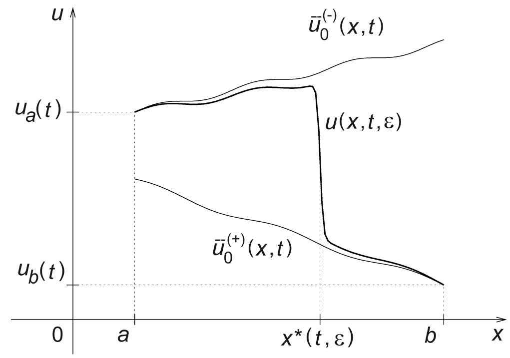

Рис. 2

У даній роботі за допомогою методу межових функцій [2, 3] побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення за степенями малого параметра ε для періодичних контрастних структур типу сходинки, які виникають у системі (1), (2). Подібні розв'язки відомі і в багатьох інших сингулярно збурених системах. Вони активно вивчаються різними математиками (див. огляд [4] і наведену в ньому бібліографію) і мають багато практичних застосувань у фізиці, хімії та біології.

Зауважимо, що в роботі під розв'язком задачі (1), (2) мається на увазі *класичний розв'язок*, тобто функція $u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, яка є T-періодичною за змінною t і задовольняє поточково співвідношення (1) та (2).

Контрастну структуру типу сходинки будемо конструювати, виходячи з розв'язків виродженого рівняння (3). Для цього зробимо наступне припущення.

I. *Нехай рівняння (3) має два розв'язки:* $\overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ *та* $\overline{u}_0^{(+)}(x,t)$*, що задовольняють відповідно ліві та праві крайові умови (2) і визначені для всіх* $(x,t) \in \overline{\Omega}$.

Нехай, крім того,

$$A(\overline{u}_0^{(-)}(x,t),x,t) > 0, \quad A(\overline{u}_0^{(+)}(x,t),x,t) < 0 \quad \text{для всіх} \quad (x,t) \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

З нерівностей (4), очевидно, випливає, що поверхні $u = \overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ та $u = \overline{u}_0^{(+)}(x,t)$ не мають спільних точок для всіх $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Отже, наслідуючи [5], можна припустити, що за певних умов у системі (1), (2) існує періодична контрастна структура типу сходинки з переходом розв'язку від поверхні $\overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ до поверхні $\overline{u}_0^{(+)}(x,t)$ в околі певної лінії $x = x^*(t,\varepsilon)$. Більш детально структуру такого розв'язку можна описати таким чином. Припустимо, що в площині (x,t) існує *лінія переходу*, задана рівнянням $x = x^*(t,\varepsilon)$. Ця лінія є T-періодичною і цілком міститься в області Ω (рис. 1).

Зліва від лінії $x = x^*(t,\varepsilon)$ графік шуканого розв'язку $u(x,t,\varepsilon)$ проходить в околі поверхні $u = \overline{u}_0^{(-)}(x,t)$, а справа — в околі поверхні $u = \overline{u}_0^{(+)}(x,t)$. В околі ж самої лінії $x = x^*(t,\varepsilon)$ маємо внутрішній перехідний шар (рис. 2).

2. Алгоритм побудови асимптотики. Відповідно до методу межових функцій [2, 3] будемо шукати асимптотику контрастної структури типу сходинки у вигляді суми

$$U(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{u}^{(-)}(x,t,\varepsilon) + Q^{(-)}(\xi,t,\varepsilon) & \text{при} \quad a \le x \le x^*(t,\varepsilon), \\ \overline{u}^{(+)}(x,t,\varepsilon) + Q^{(+)}(\xi,t,\varepsilon) & \text{при} \quad x^*(t,\varepsilon) < x \le b, \end{cases} \tag{5}$$

яка складається з регулярної компоненти $\overline{u}^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ та компоненти внутрішнього перехідного шару $Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$. Остання як аргумент містить так звану розтягнуту змінну $\xi = [x - x^*(t,\varepsilon)]/\varepsilon$. Кожна компонента асимптотики (5), у свою чергу, зображується у вигляді

$$\overline{u}^{(\pm)}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \overline{u}_k^{(\pm)}(x,t), \quad Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k Q_k^{(\pm)}(\xi,t). \tag{6}$$

Домовимося нижче писати $U_n(x,t,\varepsilon)$ замість $U(x,t,\varepsilon)$, вказуючи тим самим верхній індекс у сумах (6). Крім того, щоб зменшити громіздкість формул, будемо там, де це можливо, нехтувати індексами $(-)$ та $(+)$ при всіх функціях, які входять у розвинення (5), (6).

Рівняння лінії переходу $x = x^*(t,\varepsilon)$ спочатку також є невідомим. Будемо шукати функцію $x^*(t,\varepsilon)$ у вигляді

$$x^*(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k x_k(t), \tag{7}$$

зафіксувавши її значення за допомогою співвідношення

$$u(x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = u^*(x_0(t),t), \quad \text{де} \quad u^*(x,t) := \frac{1}{2}\left[\overline{u}_0^{(-)}(x,t) + \overline{u}_0^{(+)}(x,t)\right]. \tag{8}$$

Крім того, на лінії $x = x^*(t,\varepsilon)$ накладемо на асимптотику додаткову умову гладкого зшивання, тобто зліва і справа від цієї лінії мають збігатися розклади самої функції

$$\begin{gathered} u(x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \overline{u}(x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + Q(0,t,\varepsilon) = Q_0(0,t) + \overline{u}_0(x_0(t),t) + \\ + \varepsilon\left\{Q_1(0,t) + \overline{u}_1(x_0(t),t) + x_1(t)\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial x}(x_0(t),t)\right\} + \ldots \\ \ldots + \varepsilon^k\left\{Q_k(0,t) + \overline{u}_k(x_0(t),t) + x_k(t)\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial x}(x_0(t),t) + M_k(t)\right\} + \ldots \end{gathered} \tag{9}$$

та її похідної

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x^*(t,\varepsilon)} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}(x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q}{\partial \xi}(0,t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0}{\partial \xi}(0,t) + \\ + \left\{\frac{\partial Q_1}{\partial \xi}(0,t) + \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial x}(x_0(t),t)\right\} + \ldots + \varepsilon^k\left\{\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial \xi}(0,t) + N_{k+1}(t)\right\} + \ldots . \end{gathered} \tag{10}$$

Зауваження 1. У формулі (9) при ε^k явно виписано вигляд усіх доданків, які містять залежність від $Q_k(\xi,t)$, $\overline{u}_k(x,t)$ або $x_k(t)$. Суму решти доданків позначено як $M_k(t)$. Аналогічно у формулі (10) при ε^k явно виписано вигляд усіх доданків, які містять залежність від $Q_{k+1}(\xi,t)$. Суму решти доданків позначено як $N_{k+1}(t)$.

Підставимо формальну асимптотику $U_n(x,t,\varepsilon)$, визначену формулами (5), (6) та (7), у диференціальний оператор $L[u]$ і подамо отриманий вираз у вигляді суми регулярної компоненти

$$\overline{L}[U_n] = -\overline{u}_t + \varepsilon\overline{u}_{xx} - A(\overline{u}(x,t,\varepsilon),x,t)\overline{u}_x(x,t,\varepsilon) - B(\overline{u}(x,t,\varepsilon),x,t)$$

та компоненти внутрішнього перехідного шару

$$QL[U_n] = -\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}x_t^*(t,\varepsilon)\frac{\partial Q}{\partial\xi} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2} -$$

$$-\left\{A(\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + Q, \varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + Q\right] - \right.$$

$$- A(\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right] +$$

$$+ B(\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + Q, \varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t) -$$

$$\left. - B(\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t)\right\}.$$

Останню компоненту очевидним чином можна переписати у коротшому вигляді

$$QL[U_n] = -\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}x_t^*(t,\varepsilon)\frac{\partial Q}{\partial\xi} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\int\limits_{\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}^{\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+Q} A(u,\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t)\ du\right\} +$$

$$+ \int\limits_{\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}^{\overline{u}(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+Q} \left[A_x(u,\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t) - B_u(u,\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon),t)\right]\ du.$$

Розкладаючи $\overline{L}[U_n]$ в ряд за цілими степенями малого параметра ε, отримуємо

$$\overline{L}[U_n] = \varepsilon^0\overline{L}_0[U_n] + \varepsilon\overline{L}_1[U_n] + \varepsilon^2\overline{L}_2[U_n] + \ldots + \varepsilon^n\overline{L}_n[U_n] + o(\varepsilon^n), \tag{11}$$

де використано такі позначення:

$$\overline{L}_0[U_n] = -\frac{\partial\overline{u}_0}{\partial t} - A(\overline{u}_0(x,t),x,t)\frac{\partial\overline{u}_0}{\partial x} - B(\overline{u}_0(x,t),x,t),$$

$$\overline{L}_k[U_n] = -\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial t} - A(\overline{u}_0(x,t),x,t)\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial x} - P(x,t)\overline{u}_k + D_k(x,t), \quad k = \overline{1,n},$$

$$P(x,t) = A_u(\overline{u}_0(x,t),x,t)\frac{\partial\overline{u}_0}{\partial x} + B_u(\overline{u}_0(x,t),x,t).$$

Зауваження 2. У записі $\overline{L}_k[U_n]$ явно подано вигляд усіх доданків, які містять залежність від $\overline{u}_k(x,t)$. Суму решти доданків позначено як $D_k(x,t)$. Наприклад, $D_1(x,t) = \dfrac{\partial^2 \overline{u}_0}{\partial x^2}$.

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при кожному степені ε у сумі (11), отримуємо диференціальні рівняння для визначення регулярних доданків у розвиненні (5), (6). Ці рівняння слід доповнити крайовими умовами, що випливають зі співвідношень (2). Наприклад, для визначення доданків $\overline{u}_0^{(\pm)}(x,t)$ маємо задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial \overline{u}_0^{(\pm)}}{\partial t} + A(\overline{u}_0^{(\pm)}, x, t)\frac{\partial \overline{u}_0^{(\pm)}}{\partial x} + B(\overline{u}_0^{(\pm)}, x, t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \\ \overline{u}_0^{(-)}(a,t) = u_a(t), \quad \overline{u}_0^{(+)}(b,t) = u_b(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{12}$$

Припущення I гарантує, що задача (12) має розв'язок. Більш того, він є єдиним. Справді, кожна інтегральна поверхня рівняння (3) складається з характеристик [6] — розв'язків системи

$$\frac{dx}{dt} = A(u,x,t), \quad \frac{du}{dt} = -B(u,x,t). \tag{13}$$

Отже, якщо $A, B \in C^1(\mathbb{R}\times\overline{\Omega})$, то крайові умови задачі (12) однозначно визначають сукупність характеристик, що утворюють поверхні $u = \overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ та $u = \overline{u}_0^{(+)}(x,t)$.

Аналогічним чином для визначення наступних регулярних доданків запишемо задачі[1]

$$\begin{gathered} \frac{\partial \overline{u}_k^{(\pm)}}{\partial t} + A(\overline{u}_0^{(\pm)}(x,t), x, t)\frac{\partial \overline{u}_k^{(\pm)}}{\partial x} + P^{(\pm)}(x,t)\overline{u}_k^{(\pm)} = D_k^{(\pm)}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \\ \overline{u}_k^{(-)}(a,t) = 0, \quad \overline{u}_k^{(+)}(b,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{14}$$

Покажемо, що для довільного $k \geq 1$ задача (14) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\overline{u}_0^{(\pm)}(x,t), x, t), \quad \frac{du}{dt} = D_k^{(\pm)}(x,t) - P^{(\pm)}(x,t)u, \tag{15}$$

яка має ту ж саму природу, що й система (13). Із припущення I випливає, що, починаючи з довільної точки на площині $x = a$ ($x = b$), ми можемо побудувати в області $\overline{\Omega}$ розв'язок першого диференціального рівняння системи (15), продовжуючи його до перетину з площиною $x = b$ ($x = a$). Після підстановки цього розв'язку у друге рівняння системи (15) воно перетворюється у лінійне диференціальне рівняння щодо невідомої функції u. Розв'язок цього, останнього, рівняння існує і навіть може бути записаний у квадратурах. Таким чином, бачимо, що крайові умови задачі (14) однозначно визначають сукупність характеристик — розв'язків системи (15), що утворюють поверхні $u = \overline{u}_k^{(-)}(x,t)$ та $u = \overline{u}_k^{(+)}(x,t)$.

[1]Індекси $(\pm)$ при коефіцієнтах $P(x,t)$ та $D_k(x,t)$ вказують на те, що їх слід поставити при всіх функціях $\overline{u}_i(x,t)$, які входять у визначення цих коефіцієнтів.

Розкладемо тепер в ряд за цілими степенями малого параметра ε вираз $QL[U_n]$. В результаті отримаємо[2]

$$QL[U_n] = \frac{1}{\varepsilon} QL_{-1}[U_n] + \varepsilon^0 QL_0[U_n] + \varepsilon QL_1[U_n] + \ldots + \varepsilon^{n-1} QL_{(n-1)}[U_n] + o(\varepsilon^{n-1}), \quad (16)$$

де

$$QL_{-1}[U_n] = x_0'(t)\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ \int\limits_{\overline{u}_0(x_0,t)}^{\overline{u}_0(x_0,t)+Q_0} A(u, x_0, t)\ du \right\},$$

$$QL_0[U_n] = -\frac{\partial Q_0}{\partial t} + x_0'(t)\frac{\partial Q_1}{\partial \xi} + x_1'(t)\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \xi^2} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ A(\overline{u}_0(x_0,t) + Q_0, x_0, t)[\overline{u}_1(x_0,t) + Q_1] - A(\overline{u}_0(x_0,t), x_0, t)\overline{u}_1(x_0,t) + \right.$$

$$\left. + (\xi + x_1)\frac{\partial}{\partial x}\left[\int\limits_{\overline{u}_0(x,t)}^{\overline{u}_0(x,t)+Q_0} A(u, x, t)\ du \right]\Bigg|_{x=x_0} \right\} +$$

$$+ \int\limits_{\overline{u}_0(x_0,t)}^{\overline{u}_0(x_0,t)+Q_0} \Big[A_x(u, x_0, t) - B_u(u, x_0, t) \Big]\ du,$$

$$QL_k[U_n] = x_0'(t)\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial \xi} + x_{k+1}'(t)\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 Q_{k+1}}{\partial \xi^2} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ A(\overline{u}_0(x_0,t) + Q_0, x_0, t)[\overline{u}_{k+1}(x_0,t) + Q_{k+1}] - A(\overline{u}_0(x_0,t), x_0, t)\overline{u}_{k+1}(x_0,t) + \right.$$

$$\left. + x_{k+1}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int\limits_{\overline{u}_0(x,t)}^{\overline{u}_0(x,t)+Q_0} A(u, x, t)\ du \right]\Bigg|_{x=x_0} \right\} + H_{k+1}(\xi, t), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Зауваження 3. У записі $QL_k[U_n]$ явно подано вигляд усіх доданків, які містять залежність від $Q_{k+1}(\xi, t)$, $\overline{u}_{k+1}(x,t)$ або $x_{k+1}(t)$. Суму решти доданків позначено як $H_{k+1}(\xi, t)$.

[2] При розкладі виразу $QL[U_n]$ в ряд за степенями параметра ε зручно використовувати той факт, що для довільної функції $f(x,t,\varepsilon)$ виконується співвідношення $\frac{d}{d\varepsilon}\left[f(\varepsilon\xi + x^*(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right] = (\xi + x^*_\varepsilon(t,\varepsilon)) f_x + f_\varepsilon$.

Виходячи з вигляду коефіцієнтів при старших степенях ε в розвиненнях (16) та (9), а також беручи до уваги умову (8), записуємо задачу для визначення функцій внутрішнього перехідного шару $Q_0^{(\pm)}(\xi, t)$, доповнюючи її традиційною вимогою прямування цих функцій до нуля при $\xi \to \pm\infty$. В результаті маємо

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ \int\limits_{\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t),t)+Q_0^{(\pm)}} A(u, x_0(t), t)\, du \right\} - x_0'(t)\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi}, \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}^{\pm} \times \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$Q_0^{(-)}(0,t) + \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t) = Q_0^{(+)}(0,t) + \overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) = u^*(x_0(t),t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$Q_0^{(-)}(-\infty, t) = Q_0^{(+)}(+\infty, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Задача (17) – (19) недовизначена, поки в неї не підставлено функцію $x_0(t)$. Як показано в наведеній нижче лемі, цю функцію можна знайти із співвідношення

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0,t) = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0,t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

яке є наслідком умови гладкого зшивання асимптотики на лінії переходу та розкладу (10).

Лема 1. *Нехай $A, B \in C(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ і виконується припущення I. Тоді задача (17) – (19) з додатковою умовою (20) може мати розв'язок, лише якщо функція $x_0(t)$ задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)} \left[A(u, x_0(t), t) - x_0'(t)\right]\, du = 0. \tag{21}$$

Доведення. Інтегруючи рівняння (17) по ξ від ξ_1 до ξ_2 ($\xi_1, \xi_2 \le 0$), отримуємо

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(\xi_2, t) - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(\xi_1, t) = \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)+Q_0^{(-)}(\xi_1,t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)+Q_0^{(-)}(\xi_2,t)} \left[A(u, x_0(t), t) - x_0'(t)\right]\, du. \tag{22}$$

Зі співвідношень (19) та (22) випливає, що $\dfrac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(-\infty, t) = 0$. Спрямовуючи тепер $\xi_1 \to$ $\to -\infty$ в (22) і перепозначаючи ξ_2 через ξ, маємо

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(\xi, t) = \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)+Q_0^{(-)}(\xi,t)} \left[A(u, x_0(t), t) - x_0'(t)\right]\, du. \tag{23}$$

За допомогою аналогічних міркувань у випадку $\xi \geq 0$ отримуємо формулу, аналогічну (23), в якій індекси $(-)$ замінено на $(+)$.

Підставляючи формули $(23)_{(-)}$ та $(23)_{(+)}$ у рівність (20) і враховуючи співвідношення (18), одержуємо (21).

Лему доведено.

Після нескладних перетворень формулу (21) можна записати у вигляді диференціального рівняння для визначення функції $x_0(t)$, а саме

$$\frac{dx}{dt} = \frac{I(x,t)}{\overline{u}_0^{(+)}(x,t) - \overline{u}_0^{(-)}(x,t)}, \quad \text{де} \quad I(x,t) := \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x,t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x,t)} A(u,x,t)\ du. \tag{24}$$

Для скорочення формул, що виникають нижче, зручно також ввести функцію

$$J(x,t) := \frac{I(x,t)}{\overline{u}_0^{(+)}(x,t) - \overline{u}_0^{(-)}(x,t)}.$$

Сформулюємо тепер два нових припущення, які, як показано у лемі 2, гарантують розв'язність задачі (17) – (19).

II. *Нехай диференціальне рівняння (24) має T-періодичний розв'язок $x_0(t)$, який задовольняє умови:*

1) $a < x_0(t) < b$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$;

2) $A(\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t), x_0(t), t) < x_0'(t) < A(\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t), x_0(t), t)$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$;

3) $\int\limits_0^T J_x'(x_0(t),t)\ dt < 0.$

Зауваження 4. Пункт 3 припущення II гарантує локальну єдиність T-періодичного розв'язку $x_0(t)$. Справді, лінеаризуємо рівняння (24) на цьому розв'язку. Отримане в результаті диференціальне рівняння $x' = J_x'(x_0(t),t)x$ має єдиний мультиплікатор

$$\mu = \exp\left\{ \int\limits_0^T J_x'(x_0(t),t)\ dt \right\},$$

модуль якого є відмінним від одиниці. Цей факт і гарантує зазначену вище локальну єдиність [7].

III. *Нехай для кожного фіксованого* $t \in \mathbb{R}$ *інтеграл* $\displaystyle\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{v} \left[A(u,x_0(t),t) - x_0'(t)\right]\ du$ *не дорівнює нулю при всіх v, що лежать у проміжку між $\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)$ та $\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)$.*

Лема 2. *Нехай $A, B \in C(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$. Якщо виконуються припущення I – III, то існує єдиний розв'язок задачі (17) – (19) з додатковою умовою (20). Більш того, його можна* *подати у вигляді квадратурної формули*

$$\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t),t)+Q_0^{(\pm)}} \left\{ \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z} \left[A(u, x_0(t), t) - x_0'(t)\right] \, du \right\}^{-1} dz = \xi. \tag{25}$$

Доведення. При доведенні леми 1 були отримані співвідношення $(23)_{(-)}$ та $(23)_{(+)}$, які задовольняє розв'язок задачі (17) – (19). Інтегруючи ці співвідношення з початковою умовою (18), отримуємо формулу (25).

Лему доведено.

Зауваження 5. Із співвідношень $(23)_{(-)}$ та $(23)_{(+)}$ з урахуванням припущення III випливає, що при кожному фіксованому $t \in \mathbb{R}$ функція внутрішнього перехідного шару $Q_0^{(-)}(\xi, t)$ є монотонною на промені $\xi \in (-\infty, 0]$, а функція внутрішнього перехідного шару $Q_0^{(+)}(\xi, t)$ — монотонною на промені $\xi \in [0, +\infty)$. Більш того,

$$\operatorname{sign}\left\{\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi}\right\} = \operatorname{sign}[\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t), t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t), t)]. \tag{26}$$

Зауваження 6. Виходячи з формули (25) з урахуванням пункту 2 припущення II, можна показати, що існують такі сталі $C_i > 0$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, що розв'язок задачі (17) – (19) задовольняє нерівності

$$\left|Q_0^{(\pm)}(\xi, t)\right| \le C_1 e^{-\nu_1|\xi|}, \quad C_2 e^{-\nu_2|\xi|} \le \left|\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi}\right| \le C_3 e^{-\nu_3|\xi|} \quad \text{для всіх} \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}^{\pm} \times \mathbb{R}.$$

Аналогічно до задачі (17) – (19) запишемо, виходячи з розвинень (16) та (9), задачу для знаходження функцій внутрішнього перехідного шару $Q_1^{(\pm)}(\xi, t)$. В результаті отримаємо

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} = -x_1'(t)\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi} - x_0'(t)\frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ A(\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t), t) + Q_0^{(\pm)}, x_0(t), t)[\overline{u}_1^{(\pm)}(x_0(t), t) + Q_1^{(\pm)}] - \right.$$

$$- A(\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t), t), x_0(t), t)\overline{u}_1^{(\pm)}(x_0(t), t) +$$

$$+ [\xi + x_1(t)] \frac{\partial}{\partial x} \left[\int\limits_{\overline{u}_0^{(\pm)}(x,t)}^{\overline{u}_0^{(\pm)}(x,t)+Q_0^{(\pm)}} A(u,x,t)\ du \right] \Bigg|_{x=x_0(t)} \Bigg\} -$$

$$- \int\limits_{\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t),t)+Q_0^{(\pm)}} [A_x(u,x_0(t),t) - B_u(u,x_0(t),t)]\ du, \quad (\xi,t) \in \mathbb{R}^{\pm} \times \mathbb{R}, \tag{27}$$

$$Q_1^{(\pm)}(0,t) + \overline{u}_1^{(\pm)}(x_0(t),t) + x_1(t) \frac{\partial \overline{u}_0^{(\pm)}}{\partial x}(x_0(t),t) = 0, \tag{28}$$

$$Q_1^{(-)}(-\infty,t) = Q_1^{(+)}(+\infty,t) = 0. \tag{29}$$

Як і (17) – (19), ця задача є недовизначеною, поки в неї не підставлено функцію $x_1(t)$ у явному вигляді. Як показано у наведеній нижче лемі, цю функцію можна знайти із співвідношення

$$\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0,t) + \frac{\partial \overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t) = \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0,t) + \frac{\partial \overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t), \tag{30}$$

отриманого з умови гладкого зшивання асимптотики на лінії переходу та з розкладу (10).

Лема 3. *Нехай* $A, B \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ *і виконуються припущення I – III. Тоді задача (27) – (29) з додатковою умовою (30) може мати розв'язок, лише якщо функція* $x_1(t)$ *задовольняє лінійне диференціальне рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = J'_x(x_0(t),t)x + F(t) \tag{31}$$

з неоднорідністю, визначеною формулою

$$F(t) := [\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)]^{-1} \Bigg\{ \frac{\partial \overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t) - \frac{\partial \overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t) +$$

$$+ [A(\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t), x_0(t),t) - x'_0(t)] \overline{u}_1^{(+)}(x_0(t),t) -$$

$$- [A(\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t), x_0(t),t) - x'_0(t)] \overline{u}_1^{(-)}(x_0(t),t) +$$

$$+ \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)} \Bigg[[A_x(u,x_0(t),t) - B_u(u,x_0(t),t)] \times$$

$$\times \int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{u} \left(\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z} [A(y,x_0(t),t) - x_0'(t)]\ dy \right)^{-1} dz \Bigg]\ du -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)} \Bigg[\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{u} \left(\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z} \big[A(y,x_0(t),t) - x_0'(t)\big]\ dy \right)^{-1} dz \Bigg]\ du \Bigg] \Bigg\}.$$

Доведення. За аналогією до функції $Q_0^{(\pm)}(\xi,t)$ можна показати (див. доведення леми 1), що $\dfrac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi}(\pm\infty,t) = 0$. Проінтегруємо з урахуванням цієї умови рівняння (27) по ξ від $-\infty$ до 0. Беручи до уваги співвідношення (18), (19) та (29), отримуємо

$$\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0,t) = -x_1'(t) Q_0^{(-)}(0,t) - x_0'(t) Q_1^{(-)}(0,t) +$$

$$+ A(u^*(x_0(t),t),x_0(t),t)[\overline{u}_1^{(-)}(x_0(t),t) + Q_1^{(-)}(0,t)] -$$

$$- A(\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\overline{u}_1^{(-)}(x_0(t),t) +$$

$$+ x_1(t)\Bigg[A(u^*(x_0(t),t),x_0(t),t)\frac{\partial \overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t) -$$

$$- A(\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\frac{\partial \overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t) + \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{u^*(x_0(t),t)} A_x(u,x_0(t),t)\ du \Bigg] -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{0} \left\{ \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)+Q_0^{(-)}(\xi,t)} [A_x(u,x_0(t),t) - B_u(u,x_0(t),t)]\ du - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial t}(\xi,t) \right\} d\xi.$$

Аналогічне інтегрування рівняння (27) по ξ від 0 до $+\infty$ приводить до рівності

$$-\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0) = x_1'(t) Q_0^{(+)}(0,t) + x_0'(t) Q_1^{(+)}(0,t) -$$

$$- A(u^*(x_0(t),t),x_0(t),t)[\overline{u}_1^{(+)}(x_0(t),t) + Q_1^{(+)}(0,t)] +$$

$$+ A(\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\overline{u}_1^{(+)}(x_0(t),t) -$$

$$- x_1(t)\Bigg[A(u^*(x_0(t),t),x_0(t),t)\frac{\partial\overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t)-$$

$$- A(\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\frac{\partial\overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t) + \int\limits_{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)}^{u^*(x_0(t),t)} A_x(u,x_0(t),t)\ du\Bigg]-$$

$$- \int\limits_0^{+\infty}\left\{\int\limits_{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)+Q_0^{(+)}(\xi,t)} [A_x(u,x_0(t),t) - B_u(u,x_0(t),t)]\ du - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial t}(\xi,t)\right\} d\xi.$$

Додаючи почленно останні два співвідношення і беручи до уваги умови узгодження (18), (28) та (30), а також рівність

$$A(\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\frac{\partial\overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t) - A(\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\frac{\partial\overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t)+$$

$$+ \int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)} A_x(u,x_0(t),t)\ du = I'_x(x_0(t),t),$$

отримуємо

$$\frac{\partial\overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t) - \frac{\partial\overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t) = -x'_1(t)[\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)]-$$

$$- x'_0(t)\left[\overline{u}_1^{(+)}(x_0(t),t) + x_1(t)\frac{\partial\overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t) - \overline{u}_1^{(-)}(x_0(t),t) - x_1(t)\frac{\partial\overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t)\right]+$$

$$+ A(\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\overline{u}_1^{(+)}(x_0(t),t)-$$

$$- A(\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t),x_0(t),t)\overline{u}_1^{(-)}(x_0(t),t) + x_1(t)I'_x(x_0(t),t)-$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{0}\left\{\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)+Q_0^{(-)}(\xi,t)} [A_x(u,x_0(t),t) - B_u(u,x_0(t),t)]\ du - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial t}(\xi,t)\right\} d\xi-$$

$$- \int\limits_0^{+\infty}\left\{\int\limits_{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)+Q_0^{(+)}(\xi,t)} [A_x(u,x_0(t),t) - B_u(u,x_0(t),t)]\ du - \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial t}(\xi,t)\right\} d\xi. \qquad (32)$$

Змінюючи порядок інтегрування на підставі зауваження 5 і формули (25), нескладно отримати тотожності

$$-\int\limits_{-\infty}^{0}\left\{\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)+Q_0^{(-)}(\xi,t)}[A_x(u,x_0(t),t)-B_u(u,x_0(t),t)]\,du\right\}d\xi =$$

$$=\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{u^*(x_0(t),t)}\left\{[A_x(u,x_0(t),t)-B_u(u,x_0(t),t)]\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{u}\left(\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z}[A(y,x_0(t),t)-x_0'(t)]\,dy\right)^{-1}dz\right\}du,$$

$$-\int\limits_{0}^{+\infty}\left\{\int\limits_{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)+Q_0^{(+)}(\xi,t)}[A_x(u,x_0(t),t)-B_u(u,x_0(t),t)]\,du\right\}d\xi =$$

$$=\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)}\left\{[A_x(u,x_0(t),t)-B_u(u,x_0(t),t)]\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{u}\left(\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z}[A(y,x_0(t),t)-x_0'(t)]\,dy\right)^{-1}dz\right\}du.$$

За допомогою формули (25) можна довести ще одну тотожність

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial t}\,d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{0}Q_0^{(-)}(\xi,t)\,d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\xi Q_0^{(-)}(\xi,t)\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=0}-\int\limits_{-\infty}^{0}\xi\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}\,d\xi\right\}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)+Q_0^{(-)}}\left(\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z}\big[A(y,x_0(t),t)-x_0'(t)\big]\,dy\right)^{-1}dz\right]\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}\,d\xi\right\}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{u^*(x_0(t),t)}\left[\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{u}\left(\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z}\big[A(y,x_0(t),t)-x_0'(t)\big]\,dy\right)^{-1}dz\right]du\right\}.$$

Так само доводимо, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial t}\, d\xi = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t)} \left[\int\limits_{u^*(x_0(t),t)}^{u} \left(\int\limits_{\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)}^{z} \left[A(y,x_0(t),t) - x_0'(t)\right]\, dy \right)^{-1} dz \right] du \right\}.$$

Враховуючи отримані вище співвідношення і очевидну рівність

$$[\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)] J_x'(x_0(t),t) =$$

$$= I_x'(x_0(t),t) - x_0'(t)\left[\frac{\partial \overline{u}_0^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t) - \frac{\partial \overline{u}_0^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t)\right],$$

перетворюємо (32) у (31).

Лему доведено.

Зауваження 7. Завдяки пункту 3 припущення II рівняння (31) завжди має єдиний T-періодичний розв'язок [7]. Після того, як знайдену з (31) функцію $x_1(t)$ підставлено у задачу (27) – (29), остання розпадається на дві незалежні лінійні задачі відповідно для $\xi \le 0$ і для $\xi \ge 0$. Розв'язок кожної з цих задач існує, єдиний і може бути записаний у вигляді квадратур.

Продовжуючи описану вище процедуру побудови асимптотики, легко бачити, що аналіз задач для функцій внутрішнього перехідного шару всіх порядків вище першого буде проводитися однаковим чином, збігаючись з аналізом задачі (27) – (29).

Отже, ми довели наступну лему.

Лема 4. *Нехай $A, B \in C^n(\mathbb{R}\times\overline{\Omega})$, $u_a, u_b \in C^n(\mathbb{R})$ і виконуються припущення I – III. Тоді сформульований у даному пункті алгоритм дозволяє однозначно побудувати формальну асимптотику n-го порядку $U_n(x,t,\varepsilon)$ для контрастної структури типу сходинки.*

Зауваження 8. Аналогічно до того, як це зроблено в роботі [2], можна показати, що всі функції внутрішнього перехідного шару $Q_k^{(\pm)}(\xi,t)$ задовольняють на нескінченності оцінку вигляду

$$\left|Q_k^{(\pm)}(\xi,t)\right| \le Ce^{-\nu|\xi|} \quad \text{для всіх} \quad (\xi,t) \in \mathbb{R}^{\pm}\times\mathbb{R}, \tag{33}$$

де C та ν — певні додатні константи, що не залежать від ξ і t. Подібні оцінки мають місце також і для частинних похідних від Q-функцій, а також для функцій $H_k^{(\pm)}(\xi,t)$ з розвинення (16).

3. Основний результат. Для обґрунтування асимптотики, побудованої у попередньому пункті, застосуємо асимптотичний метод диференціальних нерівностей [8, 9]. У зв'язку з цим нагадаємо означення та теорему про диференціальні нерівності, які є частковим випадком більш загального результату, отриманого у роботі [10].

Означення. *Функції* $\alpha(x,t), \beta(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ *називаються відповідно нижнім та верхнім розв'язками задачі(1), (2), якщо вони* T*-періодичні за змінною* t *і задовольняють нерівності*

$$L[\alpha] \geq 0, \quad L[\beta] \leq 0 \quad \textit{для всіх} \quad (x,t) \in \Omega, \tag{34}$$

$$al(a,t) \leq u_a(t) \leq \beta(a,t), \quad \alpha(b,t) \leq u_b(t) \leq \beta(b,t) \quad \textit{для всіх} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Узагальнений варіант означення нижнього та верхнього розв'язків припускає можливість втрати функціями $\alpha(x,t)$ та $\beta(x,t)$ своєї гладкості на скінченній кількості кривих вигляду $x = \chi_i(t)$, де $\chi_i \in C^2(\mathbb{R})$. При цьому криві $x = \chi_i(t)$ повинні попарно не перетинатись і не мати спільних точок з межею області Ω. В точках області Ω, які не лежать на кривих $x = \chi_i(t)$, нижній та верхній розв'язки повинні задовольняти нерівності (34) і (35). На кривих $x = \chi_i(t)$ вони мають бути неперервними, а їх похідні $\alpha_x, \alpha_{xx}, \beta_x, \beta_{xx}$ повинні мати ліве та праве граничні значення. При цьому мають задовольнятися нерівності

$$\left.\frac{\partial \beta_n}{\partial x}\right|_{x=\chi_i(t)-0} \geq \left.\frac{\partial \beta_n}{\partial x}\right|_{x=\chi_i(t)+0}, \quad \left.\frac{\partial \alpha_n}{\partial x}\right|_{x=\chi_i(t)-0} \leq \left.\frac{\partial \alpha_n}{\partial x}\right|_{x=\chi_i(t)+0} \quad \text{для всіх} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

Теорема про диференціальні нерівності. *Нехай* $A, B \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$, $u_a, u_b \in C^1(\mathbb{R})$. *Якщо існують нижній* $\alpha(x,t)$ *та верхній* $\beta(x,t)$ *розв'язки задачі (1), (2) і вони утворюють упорядковану пару, тобто*

$$\alpha(x,t) \leq \beta(x,t) \quad \textit{для всіх} \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{37}$$

то існує класичний T*-періодичний по* t *розв'язок* $u(x,t)$ *задачі (1), (2), який задовольняє нерівності* $\alpha(x,t) \leq u(x,t) \leq \beta(x,t)$ *для всіх* $(x,t) \in \overline{\Omega}$.

Будемо шукати нижній та верхній розв'язки задачі (1), (2) у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_n(x,t,\varepsilon) &= U_{(n+1)\alpha}(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left[q_\alpha(x,t) + w_\alpha(\xi_\alpha,t)\right] + \varepsilon^{n+2} Q_{(n+2)\alpha}(\xi_\alpha,t,\varepsilon), \\ \beta_n(x,t,\varepsilon) &= U_{(n+1)\beta}(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left[q_\beta(x,t) + w_\beta(\xi_\beta,t)\right] + \varepsilon^{n+2} Q_{(n+2)\beta}(\xi_\beta,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{38}$$

де $U_{(n+1)\alpha}(x,t,\varepsilon)$ та $U_{(n+1)\beta}(x,t,\varepsilon)$ — суми $(n+1)$-го порядку ($n \geq 0$), визначені формулами (5), (6), в які у якості функції $x^*(t,\varepsilon)$ підставлено відповідно

$$x^*_\alpha(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k x_k(t) + \varepsilon^{n+1}\delta_\alpha(t) \quad \text{та} \quad x^*_\beta(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k x_k(t) + \varepsilon^{n+1}\delta_\beta(t). \tag{39}$$

Розтягнуту змінну ξ у визначенні функції α_n замінено на $\xi_\alpha = [x - x^*_\alpha(t,\varepsilon)]/\varepsilon$, а у визначенні функції β_n — на $\xi_\beta = [x - x^*_\beta(t,\varepsilon)]/\varepsilon$. Функції $q_\alpha(x,t)$, $q_\beta(x,t)$, $w_\alpha(\xi,t)$, $w_\beta(\xi,t)$, $Q_{(n+2)\alpha}(\xi,t,\varepsilon)$, $Q_{(n+2)\beta}(\xi,t,\varepsilon)$, $\delta_\alpha(t)$ і $\delta_\beta(t)$ визначені нижче.

Беручи до уваги вигляд верхнього розв'язку (38) і розвинення (11), (16) з попереднього пункту, отримуємо

$$L[\beta_n] = \varepsilon^n \Bigg\{ \frac{\partial^2 w_\beta}{\partial \xi_\beta^2} + \delta'_\beta(t) \frac{\partial Q_0}{\partial \xi_\beta} + x'_0(t) \frac{\partial w_\beta}{\partial \xi_\beta} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \Bigg[A\left(\overline{u}_0(x_0(t),t) + Q_0, x_0(t), t\right) [q_\beta(x_0(t),t) + w_\beta] -$$

$$- A\left(\overline{u}_0(x_0(t),t), x_0(t), t\right) q_\beta(x_0(t),t) + \delta_\beta(t) \frac{\partial}{\partial x} \Bigg[\int\limits_{\overline{u}_0(x,t)}^{\overline{u}_0(x,t)+Q_0} A(u,x,t)\ du \Bigg] \Bigg|_{x=x_0(t)} \Bigg] \Bigg\} -$$

$$- \varepsilon^{n+1} \left\{ \frac{\partial q_\beta}{\partial t} + A(\overline{u}_0(x,t),x,t) \frac{\partial q_\beta}{\partial x} + P(x,t) q_\beta \right\} + \varepsilon^{n+1} \Bigg\{ \frac{\partial^2 Q_{(n+2)\beta}}{\partial \xi_\beta^2} + x'_0(t) \frac{\partial Q_{(n+2)\beta}}{\partial \xi_\beta} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[A(\overline{u}_0(x_0(t),t) + Q_0, x_0(t), t) Q_{(n+2)\beta} \right] + H_{(n+2)\beta}(\xi_\beta, t) \Bigg\} + o(\varepsilon^{n+1}).$$

Тут функція $H_{(n+2)\beta}(\xi,t)$ має ту ж саму структуру, що й функція $H_{n+2}(\xi,t)$, але у ній відображено зміни, внесені модифікуючими функціями у $(n+1)$-й порядок асимптотики.

Нехай функції $w_\beta(\xi,t)$ та $Q_{(n+2)\beta}(\xi,t,\varepsilon)$ вибрано так, що вирази у перших і третіх фігурних дужках у розкладі $L[\beta_n]$ дорівнюють нулю, а $q_\beta^{(\pm)}(x,t) = e^{\mp\gamma x}$, де $\gamma > 0$ — керуючий параметр. Тоді завдяки нерівностям (4) завжди можна вибрати значення параметра γ настільки великим, щоб виконувалось співвідношення

$$\frac{\partial q_\beta}{\partial t} + A(\overline{u}_0(x,t),x,t) \frac{\partial q_\beta}{\partial x} + P(x,t) q_\beta \ge q_\beta \quad \text{для всіх} \quad (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

Отже, у цьому випадку $L[\beta_n] \le -\varepsilon^{n+1} q_\beta(x,t) + o(\varepsilon^{n+1})$, тому для достатньо малих значень параметра ε маємо $L[\beta_n] < 0$.

Повна задача для визначення функції $w_\beta^{(\pm)}(\xi,t)$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 w_\beta}{\partial \xi^2} = -\delta'_\beta(t) \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} - x'_0(t) \frac{\partial w_\beta}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \Bigg\{ A(\overline{u}_0(x_0(t),t) + Q_0, x_0(t), t)[q_\beta(x_0(t),t) + w_\beta] -$$

$$- A(\overline{u}_0(x_0(t),t), x_0(t), t) q_\beta(x_0(t),t) +$$

$$+ \delta_\beta(t) \frac{\partial}{\partial x} \Bigg[\int\limits_{\overline{u}_0(x,t)}^{\overline{u}_0(x,t)+Q_0} A(u,x,t)\ du \Bigg] \Bigg|_{x=x_0(t)} \Bigg\}, \quad (\xi,t) \in \mathbb{R}^\pm \times \mathbb{R}, \tag{40}$$

$$w_\beta^{(\pm)}(0,t) + q_\beta^{(\pm)}(x_0(t),t) + \delta_\beta(t)\frac{\partial \overline{u}_0^{(\pm)}}{\partial x}(x_0(t),t) = 0, \tag{41}$$

$$w^{(-)}(-\infty,t) = w^{(+)}(+\infty,t) = 0. \tag{42}$$

Як і у випадку з задачею (27) – (29), для визначення функції $\delta_\beta(t)$ сформулюємо додаткову умову

$$\frac{\partial w_\beta^{(+)}}{\partial \xi}(0,t) - \frac{\partial w_\beta^{(-)}}{\partial \xi}(0,t) = -\sigma, \tag{43}$$

де $\sigma > 0$ — довільне фіксоване число. Тоді з розкладу (10) та умови (43) маємо

$$\left.\frac{\partial \beta_n}{\partial x}\right|_{x=x_\beta^*(t,\varepsilon)+0} - \left.\frac{\partial \beta_n}{\partial x}\right|_{x=x_\beta^*(t,\varepsilon)-0} = \varepsilon^n \left\{ \frac{\partial w_\beta^{(+)}}{\partial \xi}(0,t) - \frac{\partial w_\beta^{(-)}}{\partial \xi}(0,t) \right\} +$$

$$+ O(\varepsilon^{n+1}) = -\varepsilon^n \sigma + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Отже, при достатньо малих значеннях ε функція β_n задовольняє нерівності $(36)_\beta$.

Аналізуючи задачу (40) – (42) за схемою леми 3, з умови (43) можна отримати диференціальне рівняння щодо функції $\delta_\beta(t)$, а саме:

$$\begin{aligned} &\frac{d\delta_\beta}{dt} = J_x'(x_0(t),t)\delta_\beta + F_\beta(t), \\ &F_\beta(t) := -[\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)]^{-1}\Big\{\sigma - \\ &\qquad - [A(\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t), x_0(t),t) - x_0'(t)] q_\beta^{(+)}(x_0(t),t) + \\ &\qquad + [A(\overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t), x_0(t),t) - x_0'(t)] q_\beta^{(-)}(x_0(t),t)\Big\}. \end{aligned} \tag{44}$$

Враховуючи вигляд $q_\beta(x,t)$ та припущення I і II, легко бачити, що функція $F_\beta(t)$ є знакосталою, причому $\operatorname{sign}[F_\beta(t)] = -\operatorname{sign}[\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)]$. Цей факт і пункт 3 припущення II гарантують, що рівняння (44) має єдиний T-періодичний розв'язок. Цей розв'язок також знакосталий і

$$\operatorname{sign}[\delta_\beta(t)] = -\operatorname{sign}\left[\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)\right]. \tag{45}$$

Після того, як функцію $\delta_\beta(t)$ підставлено у задачу (40) – (42), остання легко розв'язується. Отримана таким чином функція $w_\beta^{(\pm)}(\xi,t)$ задовольняє оцінку вигляду (33).

Функцію $Q_{(n+2)\beta}(\xi,t)$ будемо визначати як розв'язок задачі

$$\frac{\partial^2 Q^{(\pm)}_{(n+2)\beta}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[A(\overline{u}_0^{(\pm)}(x_0(t),t) + Q_0^{(\pm)}, x_0(t), t)Q^{(\pm)}_{(n+2)\beta}\right] + H^{(\pm)}_{(n+2)\beta}(\xi,t), \quad (\xi,t)\in\mathbb{R}^{\pm}\times\mathbb{R},$$

$$Q^{(-)}_{(n+2)\beta}(0,t) = 0, \quad Q^{(+)}_{(n+2)\beta}(0,t) = d_\beta(t,\varepsilon), \tag{46}$$

$$Q^{(-)}_{(n+2)\beta}(-\infty,t) = Q^{(+)}_{(n+2)\beta}(+\infty,t) = 0,$$

де

$$d_\beta(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-(n+2)}\Big\{U_{(n+1)\beta}(x^*_\beta(t,\varepsilon)-0,t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left[q^{(-)}(x^*_\beta(t,\varepsilon),t) + w^{(-)}_\beta(0,t)\right] -$$

$$-U_{(n+1)\beta}(x^*_\beta(t,\varepsilon)+0,t,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\left[q^{(+)}(x^*_\beta(t,\varepsilon),t) + w^{(+)}_\beta(0,t)\right]\Big\}.$$

З визначення функції $U_{(n+1)\beta}(x,t,\varepsilon)$ випливає, що $d_\beta(t,\varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to +0$. Отже, задача (46) є розв'язною, її розв'язок — єдиним і має експоненціальну оцінку вигляду (33), рівномірну щодо всіх ε з півінтервалу $(0,\varepsilon_0]$, де $\varepsilon_0 > 0$ — деяке число.

Таким чином, побудована вище функція β_n при достатньо малих значеннях параметра ε є верхнім розв'язком задачі (1), (2).

Нижній розв'язок α_n будується аналогічним чином. Відмінність полягає лише в тому, що ми беремо $q^{(\pm)}_\alpha(x,t) = -e^{\mp\gamma x}$, а в умові (43) замінюємо параметр σ на $-\sigma$. При цьому за аналогією з (45) отримуємо оцінку

$$\operatorname{sign}[\delta_\alpha(t)] = \operatorname{sign}[\overline{u}_0^{(+)}(x_0(t),t) - \overline{u}_0^{(-)}(x_0(t),t)]. \tag{47}$$

Перевіримо тепер, чи виконується для побудованих функцій α_n та β_n нерівність (37). Для цього розіб'ємо область $\overline{\Omega}$ на три підобласті:

$$\Omega_1 = [a, \min\{x^*_\alpha(t,\varepsilon), x^*_\beta(t,\varepsilon)\}]\times\mathbb{R},$$

$$\Omega_2 = [\min\{x^*_\alpha(t,\varepsilon), x^*_\beta(t,\varepsilon)\}, \max\{x^*_\alpha(t,\varepsilon), x^*_\beta(t,\varepsilon)\}]\times\mathbb{R},$$

$$\Omega_3 = [\max\{x^*_\alpha(t,\varepsilon), x^*_\beta(t,\varepsilon)\}, b]\times\mathbb{R}.$$

Виходячи з визначення (38), (39) та з умов неперервного зшивання асимптотики (18), (28) і т. д., в усіх точках підобласті Ω_2 маємо

$$\beta_n(x,t,\varepsilon) - \alpha_n(x,t,\varepsilon) = -\varepsilon^n[\delta_\beta(t) - \delta_\alpha(t)]\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,t) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Отже, із зауваження 6 і формул (26), (45) та (47) випливає, що при малих ε нерівність $\beta_n(x,t,\varepsilon) - \alpha_n(x,t,\varepsilon) > 0$ виконується для всіх $(x,t)\in\Omega_2$.

Аналогічно в усіх точках підобласті Ω_1 маємо

$$\beta_n(x,t,\varepsilon)-\alpha_n(x,t,\varepsilon)=\left\{Q_0^{(-)}\left(\frac{x-x_\beta^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)-Q_0^{(-)}\left(\frac{x-x_\alpha^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)\right\}+$$

$$+\varepsilon\left\{Q_1^{(-)}\left(\frac{x-x_\beta^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)-Q_1^{(-)}\left(\frac{x-x_\alpha^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)\right\}+$$

$$+\varepsilon^{n+1}\left\{q_\beta^{(-)}(x,t)+w_\beta^{(-)}\left(\frac{x-x_\beta^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)-q_\alpha^{(-)}(x,t)-\right.$$

$$\left.-w_\alpha^{(-)}\left(\frac{x-x_\alpha^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)\right\}+O(\varepsilon^{n+2}).$$

За допомогою формули Лагранжа цей вираз можна переписати у вигляді

$$\beta_n(x,t,\varepsilon)-\alpha_n(x,t,\varepsilon)=-\varepsilon^n[\delta_\beta(t)-\delta_\alpha(t)]\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(\zeta_1(t),t)-$$

$$-\varepsilon^{n+1}[\delta_\beta(t)-\delta_\alpha(t)]\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(\zeta_2(t),t)+$$

$$+\varepsilon^{n+1}\left\{q_\beta^{(-)}(x,t)+w_\beta^{(-)}\left(\frac{x-x_\beta^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)-q_\alpha^{(-)}(x,t)-\right.$$

$$\left.-w_\alpha^{(-)}\left(\frac{x-x_\alpha^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)\right\}+O(\varepsilon^{n+2}),$$

де $\zeta_1(t)$ та $\zeta_2(t)$ — деякі числа з проміжку між $[x-x_\alpha^*(t,\varepsilon)]/\varepsilon$ та $[x-x_\beta^*(t,\varepsilon)]/\varepsilon$.

На підставі зауваження 6 і формул (26), (45) та (47) можна вибрати такі сталі $C_1>0$ та $\nu_1>0$, що

$$-[\delta_\beta(t)-\delta_\alpha(t)]\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(\zeta_1(t),t)\geq C_1\exp\left\{\nu_1\frac{x-\max\left[x_\alpha^*(t,\varepsilon),x_\beta^*(t,\varepsilon)\right]}{\varepsilon}\right\}.$$

Крім того, з оцінок (33) випливає існування сталих $C_2>0$ та $\nu_2>0$ таких, що

$$\left|[\delta_\beta(t)-\delta_\alpha(t)]\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(\zeta_2(t),t)-w_\beta^{(-)}\left(\frac{x-x_\beta^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)+w_\alpha^{(-)}\left(\frac{x-x_\alpha^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)\right|\leq$$

$$\leq C_2\exp\left\{\nu_2\frac{x-\min\left[x_\alpha^*(t,\varepsilon),x_\beta^*(t,\varepsilon)\right]}{\varepsilon}\right\}.$$

Отже, при достатньо малих ε виконується нерівність

$$-\varepsilon^n[\delta_\beta(t)-\delta_\alpha(t)]\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(\zeta_1(t),t)-\varepsilon^{n+1}\Bigg\{[\delta_\beta(t)-\delta_\alpha(t)]\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(\zeta_2(t),t)-$$

$$-w_\beta^{(-)}\left(\frac{x-x_\beta^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)+w_\alpha^{(-)}\left(\frac{x-x_\alpha^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},t\right)\Bigg\}\geq-\frac{\varepsilon^{n+1}q_0}{2},$$

де $q_0:=\min\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\left\{q_\beta^{(-)}(x,t)-q_\alpha^{(-)}(x,t)\right\}$. Тому для малих значень ε маємо

$$\beta_n(x,t,\varepsilon)-\alpha_n(x,t,\varepsilon)\geq\frac{\varepsilon^{n+1}q_0}{2}+O(\varepsilon^{n+2})>0\quad\text{для всіх}\quad(x,t)\in\Omega_1.$$

Різниця $\beta_n(x,t,\varepsilon)-\alpha_n(x,t,\varepsilon)$ у підобласті Ω_3 оцінюється аналогічним чином.

Отже, ми показали, що побудовані вище функції α_n та β_n задовольняють всі умови теореми про диференціальні нерівності, тому задача (1), (2) має класичний розв'язок $u(x,t,\varepsilon)$ такий, що $\alpha_n(x,t,\varepsilon)\leq u(x,t,\varepsilon)\leq\beta_n(x,t,\varepsilon)$. З попереднього аналізу видно, що $\beta_n(x,t,\varepsilon)-\alpha_n(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^n)$, тому $u(x,t,\varepsilon)=\alpha_n(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon^n)$. У випадку, коли $n\geq1$, цю оцінку можна дещо спростити, відкинувши всі доданки, що перевищують її точність.

Остаточним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $A,B\in C^{n+2}(\mathbb{R}\times\overline{\Omega})$, $u_a,u_b\in C^{n+2}(\mathbb{R})$, $n\geq0$, і виконуються припущення I–III. Тоді для достатньо малих значень параметра $\varepsilon>0$ задача (1), (2) має класичний розв'язок $u=u(x,t,\varepsilon)$ такий, що*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}u(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\overline{u}_0^{(-)}(x,t) & \textit{при}\quad a\leq x<x_0(t),\\ \overline{u}_0^{(+)}(x,t) & \textit{при}\quad x_0(t)<x\leq b.\end{cases}\tag{48}$$

Більш того, якщо умова гладкості, накладена на коефіцієнти A, B, u_a та u_b, виконана для $n\geq1$, то $u(x,t,\varepsilon)=U_{n-1}(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon^n)$, де $U_{n-1}(x,t,\varepsilon)$ — сума, визначена формулами (5), (6), з розтягнутою змінною $\xi=[x-x^*(t,\varepsilon)]/\varepsilon$ та лінією переходу $x^*(t,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^kx_k(t)$.

Зауваження 9. У даній роботі досліджено крайову задачу з умовами Діріхле. Але таким же чином можна дослідити і задачу з крайовими умовами більш загального вигляду

$$p_1(t)u(a,t)-r_1(t)u_x(a,t)=u_a(t),\quad p_2(t)u(b,t)+r_2(t)u_x(b,t)=u_b(t),\tag{49}$$

де або $p_i(t)\equiv1$, $r_i(t)\equiv0$, або $p_i(t)\geq0$, $r_i(t)\equiv1$, $i=1,2$. У цьому випадку при побудові асимптотики $U_n(x,t,\varepsilon)$ в задачах (12) та (14) крайові умови Діріхле слід замінити на умови, які випливають з (49). Тоді для задачі (1), (49) можна довести твердження, аналогічне теоремі 1.

Приклад. Розглянемо крайову задачу для узагальненого рівняння Бюргерса

$$
\begin{aligned}
&-u_t + \varepsilon u_{xx} = uu_x + u - \cos t, \quad (x,t) \in \Omega := (-b,b) \times \mathbb{R}, \\
&u(-b,t,\varepsilon) = c + \sin t, \quad u(b,t,\varepsilon) = -c + \sin t, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{50}
$$

де b та c — відомі додатні параметри. Неважко пересвідчитись, що вироджене рівняння

$$
u_t + uu_x + u - \cos t = 0 \tag{51}
$$

має два перших інтеграли: $u + x - \sin t = C_1$ та $\left[u - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right] e^t = C_2$. За допомогою цих інтегралів будуємо два розв'язки рівняння (51), які задовольняють відповідно ліві та праві граничні умови задачі (50):

$$
\overline{u}_0^{(-)}(x,t) = -x + c - b + \sin t, \quad \overline{u}_0^{(+)}(x,t) = -x + b - c + \sin t.
$$

Застосовуючи очевидні оцінки $|\sin t| \leq 1$ та $|x| \leq b$ для всіх $(x,t) \in \overline{\Omega}$, бачимо, що умова $c > 2b + 1$ гарантує виконання нерівностей (4).

Підставляючи знайдені вище функції $\overline{u}_0^{(-)}(x,t)$ та $\overline{u}_0^{(+)}(x,t)$ в формулу (24), отримуємо диференціальне рівняння

$$
x' = -x + \sin t.
$$

Це рівняння має єдиний 2π-періодичний розв'язок $x_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$. Очевидно, що цей розв'язок задовольняє умову $|x_0(t)| < b$, лише якщо $b > \sqrt{2}/2$.

Решта умов припущення II, а також припущення III перевіряються аналогічно шляхом безпосередньої підстановки в них коефіцієнтів задачі (50) і знайдених функцій $\overline{u}_0^{(-)}(x,t)$, $\overline{u}_0^{(+)}(x,t)$ та $x_0(t)$. Отже, з теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 2. *Нехай параметри b та c задовольняють нерівності $b > \sqrt{2}/2$ та $c > 2b+1$. Тоді існує класичний розв'язок задачі (50) з властивостями*

$$
\lim_{\varepsilon \to +0} u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} -x + c - b + \sin t & \textit{при} \quad -b \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \\ -x + b - c + \sin t & \textit{при} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) < x \leq b. \end{cases}
$$

Застосовуючи алгоритм, викладений у пункті 2, для цього розв'язку можна побудувати асимптотичне розвинення за цілими степенями малого параметра ε.

1. *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, вып. 3 (75). — С. 3–73.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. школа, 1990. — 208 с.
4. *Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 7. — С. 4 – 32.
5. *Васильева А. Б., Омельченко О. Е.* Периодические контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного параболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2000. — **36**, № 2. — С. 198 – 208.
6. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: УРСС, 2004. — 472 с.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
8. *Howes F. A.* Singular perturbations and differential inequalities // Mem. Amer. Math. Soc. — 1976. — **168**. — P. 75.
9. *Нефедов Н. Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1995. — **31**, № 4. — С. 719 – 722.
10. *Amann H.* Periodic solutions of semilinear parabolic equations // Nonlinear Analysis: a Collection of Papers in Honor of Erich Rothe. — New York: Acad. Press, 1978. — P. 1 – 29.

Одержано 16.03.2005