УДК 517.9

ЯКІСНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ВИПАДКОВО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

О. В. Капустян, О. В. Перегуда, В. Хосе

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

On the basis of the developed abstract theory of random attractors of probability dissipative systems, we study the qualitative behavior of solutions to the reaction-diffusion equation perturbed by a stochastic "cadlag"process in the case where the equation does not have the solution uniqueness property.

На основі розробленої абстрактної теорії випадкових атракторів дисипативних за ймовірністю систем досліджено якісну поведінку розв'язків неоднозначно розв'язного рівняння реакції-дифузії, збуреного випадковим "cadlag"процесом.

Вступ. Теорія випадкових динамічних систем [1] дає зручний апарат для вивчення багатьох випадкових та стохастичних рівнянь. Еволюційні об'єкти, що породжують такі системи, здебільшого мають необмежені в прямому часі траєкторії, тому для опису якісної поведінки подібних систем у роботах [2–4] розвинуто теорію випадкових атракторів — вимірних інваріантних множин, що притягують траєкторії в оберненому часі. Цю теорію застосовано до дослідження однозначно розв'язних скінченновимірних випадкових збурених систем диференціальних рівнянь.

У роботі [5] здійснено узагальнення теорії випадкових атракторів на нескінченновимірний неоднозначно розв'язний випадок, але в припущенні, що відповідна багатозначна випадкова динамічна система є динамічною з імовірністю 1.

У даній роботі теорію випадкових атракторів розвинуто для системи, що є дисипативною за ймовірністю, і на основі цієї теорії досліджено якісну поведінку розв'язків рівняння реакції-дифузії, збуреного стохастичним "cadlag"процесом.

Постановка задачі. Розглядається задача

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\triangle u(t,x) - f(u(t,x)) + h(x) + g(u(t,x))\xi(t,w), \qquad u|_{\partial Q} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{1}$$

де $a > 0$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із гладкою межею, $f,\, g \in C(\mathbb{R})$, $h \in L_2(Q)$, $uf(u) \geq \alpha|u|^p - C$, $|f(u)| \leq C(1 + |u|^{p-1})$, $p \geq 2$, $\alpha > 0$, $|g(u)| \leq C_1|u| + C_2$, $\xi(t,w)$ — стохастичний "cadlag"процес, тобто процес із траєкторіями без розривів 2-го роду. Скориставшись процедурою переходу до канонічного зображення таких процесів, що описана в [1, 6], далі будемо вважати, що $\xi(t,w) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$, де

$$\Omega = D(\mathbb{R}) = \{w(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \forall\, t \in \mathbb{R}\, \exists \lim_{s \to t-} w(s) =: w(t-),\ \lim_{s\to t+} w(s) = w(t)\}$$

є метричним простором Скорохода [6] з борелевою σ-алгеброю Φ, зсувом $\theta_t w(\cdot) = w(t+\cdot)$ і ймовірнісною θ_t-інваріантною мірою $\mathbb{P}$. При цьому $\xi(t,w) = w(t) = \pi(\theta_t w)$, де $\pi : \Omega \to$

$\to \mathbb{R}$, $\pi(w) = w(0)$. Метрика ρ визначається рівністю

$$\rho(w_1, w_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(w_1, w_2)}{1 + \rho_i(w_1, w_2)},$$

де

$$\rho_i(w_1, w_2) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left(\sup_{t \in [-i,i]} |w_1(t) - w_2(\lambda(t))| + \sup_{t \in [-i,i]} |t - \lambda(t)| \right),$$

$\Lambda = \{\lambda(\cdot) : [-i, i] \to [-i, i]$, неперервна, монотонно зростаюча, $\lambda(-i) = -i, \lambda(i) = i\}$.

Зауважимо, що довільна функція $w(\cdot) \in \Omega$ є вимірною, обмеженою на обмежених інтервалах і має не більш ніж зліченну кількість розривів 1-го роду. Крім того, якщо $w_n \to$ $\to w_0$ в Ω, то для будь-яких $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $w_n(t) \to w_0(t)$ майже скрізь на $[a, b]$, $\sup_{t\in[a,b]} |w_n(t)| \le$ $\le A + B \sup_{t\in[a,b]} |w_0(t)|$, де невід'ємні константи A, B не залежать від n. Звідси за теоремою Лебега $w_n \to w_0$ в $L^q(a, b)$ для всіх $1 \le q < \infty$.

З [1] маємо, що $\{\theta_t : \Omega \mapsto \Omega\}_{t\in\mathbb{R}}$ є метричною динамічною системою (ДС), тобто відображення $(w, t) \mapsto \theta_t w$ є вимірним, $\theta_0 w = w$, $\theta_{t+s} w = \theta_t \theta_s w$, $\theta_t \mathbb{P} = \mathbb{P}$.

Наша основна задача полягає в доведенні того, що розв'язки задачі (1) утворюють (взагалі кажучи, багатозначну) випадкову динамічну систему, для якої в фазовому просторі існує мінімальна вимірна притягуюча множина — випадковий атрактор.

Існування розв'язків (1) і апріорні оцінки. Нехай $H = L_2(Q)$ з нормою $\|\cdot\|$ і скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Використовуючи метод гальоркінських апроксимацій, стандартним чином [7, 8] отримуємо, що для будь-якого $w \in \Omega$ існує принаймні один розв'язок $u = u(t, w)u_0$ задачі (1) у класі $W = L_p^{\mathrm{loc}}(0, +\infty; L_p(Q)) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(0, +\infty; H_0^1(Q)) \cap C([0, +\infty); H)$ і для довільного розв'язку $u \in W$ задачі (1) маємо для майже всіх $t > 0$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2a\|u(t)\|^2_{H_0^1(Q)} + 2\alpha\|u(t)\|^p_{L_p(Q)} \le \\ &\quad \le 2C + 2(h, u(t)) + C_\gamma |w(t)| + (2C_1 + \gamma)|w(t)|\|u(t)\|^2, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\gamma > 0$ — довільне, $C_\gamma = \dfrac{C_2^2|Q|}{\gamma}$. З (2) для всіх $t \ge s \ge 0$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 \le \|u(s)\|^2 &+ \left(2C + \frac{1}{a\lambda_1}\|h\|^2\right)(t - s) + \\ &+ C_\gamma \int_s^t |w(p)|dp + \int_s^t ((2C_1 + \gamma)|w(p)| - \lambda_1 a)\|u(p)\|^2 dp, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\lambda_1 > 0$ — перше власне значення $-\triangle$ в $H_0^1(Q)$. Використовуючи лему Гронуолла, для всіх $t \geq 0$ отримуємо

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 \exp\left(\int_0^t ((2C_1+\gamma)|w(p)| - \lambda_1 a)dp\right) +$$

$$+ \int_0^t \exp\left(\int_s^t (2C_1+\gamma)|w(p)| - a\lambda_1)dp\right)\left(2C + \frac{1}{a\lambda_1}\|h\|^2 + C_\gamma |w(s)|\right) ds. \quad (4)$$

Для подальшого нам потрібна наступна лема.

Лема 1. *Нехай* $\{u_n = u_n(t, w_n)u_n^0\} \subset W$ *— довільна послідовність розв'язків задачі (1), де* $w_n \to w_0$ *в* Ω, $u_n^0 \to u_0$ *слабко в* H *і* $t_n \to t_0 > 0$.

Тоді принаймні по підпослідовності $u_n(t_n, w_n)u_n^0 \to u(t_0, w_0)u_0$ *в* H, *де* $u = u(t, w_0)u_0 \in W$ *є розв'язком задачі (1).*

Доведення. Нехай $T > 0$. З оцінок (2), (4) маємо, що послідовність $\{u_n\}$ є обмеженою в $L_p(0, T; L_p(Q)) \cap L_2(0, T; H_0^1(Q)) \cap L_\infty(0, T; H)$. Оскільки для $s \geq \max\left\{1; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) n\right\}$ $H_0^s(Q) \subset L_p(Q) \cap H_0^1(Q)$, то $(H_0^1(Q))^* \subset (H_0^s(Q))^*$ і $L_q(Q) \subset (H_0^s(Q))^*$, де $q = \dfrac{p}{p-1}$. На підставі умов на функцію f є справедливим включення $u_{n_t} \in L_2(0, T; (H_0^1(Q))^*) + L_q(0, T; L_q(Q))$. Отже, послідовність $\{u_{n_t}\}$ є обмеженою в $L_q(0, T; (H_0^s(Q))^*)$. Тоді з леми про компактність [7] маємо, що принаймні по підпослідовності $u_n(\cdot, w_n)u_n^0 \to u(\cdot)$ в $L_2(0, T; H)$ $u_n(t, w_n)u_n^0 \to u(t)$ сильно в H для майже всіх $t \in (0, T)$ і слабко в H рівномірно по $t \in [0, T]$. Переходячи до границі в (1), переконуємося, що $u = u(t, w_0)u_0 \in W$ є розв'язком задачі (1). Позначимо $K := 2C + \dfrac{1}{a\lambda_1}\|h\|^2$, $L_n(p) := (2C_1 + \gamma)|w_n(p)| - \lambda_1 a$, $L_0(p) := (2C_1 + \gamma)|w_0(p)| - \lambda_1 a$. Тоді для функцій

$$J_n(t, w_n) := \|u_n(t)\|^2 - Kt - C_\gamma \int_0^t |w_n(p)|\, dp - \int_0^t L_n(p)\|u_n(p)\|^2 dp,$$

$$J(t, w_0) := \|u(t)\|^2 - Kt - C_\gamma \int_0^t |w_0(p)|\, dp - \int_0^t L_0(p)\|u(p)\|^2 dp,$$

що належать $C([0, T])$, з оцінки (3) маємо, що для всіх $t \geq s$, $t, s \in [0, T]$ $J(t, w_0) \leq J(s, w_0)$, $J_n(t, w_n) \leq J_n(s, w_n)$ і $J_n(t, w_n) \to J(t, w_0)$ для майже всіх $t \in (0, T)$. Тоді легко показати, що $J_n(t, w_n) \to J(t, w_0)$ рівномірно на довільному $[a, b] \subset (0, T)$.

Також зі збіжності $w_n \to w_0$ отримуємо, що $L_n(\cdot) \to L_0(\cdot)$ в $L^1(0, t)$ і $L_n(\cdot)$ обмежені в $L^\infty(0, t)$. Тоді $\int_0^t L_n(p)\|u_n(p)\|^2 dp \to \int_0^t L_0(p)\|u(p)\|^2 dp$. Отже, для довільних $t_n \to t_0 > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} J_n(t_n, w_n) = J(t_0, w_0) \geq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(t_n)\|^2 - Kt_0 - C_\gamma \int_0^{t_0} |w_0(p)|\, dp - \int_0^{t_0} L_0(p)\|u(p)\|^2 dp.$$

Звідси $\|u(t_0)\| \geq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(t_n)\|$, а оскільки $u_n(t_n) \to u(t_0)$ слабко в H, то виконується обернена нерівність, отже,

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n(t_n)\| \leq \|u(t_0)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(t_n)\|,$$

і принаймні по підпослідовності $u_n(t_n)$ збігається сильно в H до $u\,(t_0)$.

Лему доведено.

Означимо відображення $G : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times H \mapsto 2^H$:

$$G(t,w)u_0 := \{u(t,w)u_0 \mid u(t,w)u_0 \in W \text{ є розв'язком (1)},\; u(0,w)u_0 = u_0\}. \tag{5}$$

Відображення (5) описує динаміку розв'язків задачі (1), і наша задача полягає у вивченні поведінки (5) при $t \to +\infty$. Будемо робити це методами теорії випадкових атракторів динамічних систем.

Абстрактна теорія багатозначних випадкових динамічних систем (БВДС). Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — сепарабельний банахів простір з борелевою σ-алгеброю $\sigma(X)$, $C(X)$ $(\beta(X))$ — сукупність усіх непорожніх замкнених (непорожніх обмежених) підмножин X. Для $A, B \subset X$ означимо $\|A\| := \sup_{a\in A} \|a\|$, $\operatorname{dist}(A,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a-b\|$, $B_\delta(A) = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x,A) < \delta\}$, $B_r = \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$, $\overline{A}$ є замиканням A в X. Нехай $(\Omega, \Phi, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, $\{\theta_t : \Omega \mapsto \Omega\}_{t\in\mathbb{R}}$ — метрична ДС і $\overline{\Phi}$ — лебегове поповнення Φ за мірою $\mathbb{P}$. Наступні означення і властивості багатозначних відображень взято з [9]. $F : \Omega \mapsto C(X)$ називається вимірним, якщо для довільної відкритої множини $O \subset X$ $\{w \in \Omega \mid F(w) \cap O \neq \varnothing\} \in \Phi$. Наступні означення є еквівалентними:

1) F є вимірним;

2) $w \mapsto \operatorname{dist}(x, F(w))$ є вимірним для довільного $x \in X$;

3) існують вимірні функції $\{f_n(w)\}_{n=1}^\infty$ такі, що $F(w) = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty f_n(w)}$.

Крім цього, відомо, що якщо F є вимірним, то $w \mapsto \|F(w)\|$ є $\overline{\Phi}$-вимірним, і якщо $G \in \overline{\Phi} \times \sigma(X)$, то $\pi_\Omega G := \{w \in \Omega \mid \exists\, x \in X,\ (w,x) \in G\} \in \overline{\Phi}$.

Означення 1. *Багатозначне відображення $G : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times X \mapsto C(X)$ називається БВДС, якщо:*

1) для довільних $x \in X$ відображення $(t,w) \mapsto G(t,w)x$ є вимірним;

2) $G(0,w)x = x$, $G(t+s,w)x \subset G(t,\theta_s w)G(s,w)x \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R}_+, x \in X, w \in \Omega$.

Слід зауважити, що з огляду на застосування множину Ω можна замінити вимірною, $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$-інваріантною множиною повної міри.

Вимірне відображення $F : \Omega \mapsto C(X)$ будемо називати вимірною множиною $F(w)$.

Означення 2. *Вимірна множина $A(w)$ називається випадковим атрактором для БВДС G, якщо для $\mathbb{P}$-м. в. $w \in \Omega$ маємо:*

1) $A(\theta_t w) \subset G(t,w)A(w)\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+$ (напівінваріантність);

2) $\forall\, B \in \beta(X)$ $\operatorname{dist}(G(t,\theta_{-t}w)B, A(w)) \to 0, t \to +\infty$ (притягання);

3) $A(w)$ є компактом в X.

Проаналізуємо деякі обмеження на БВДС G:

G_1) для будь-якого $B \in \beta(X)$ відображення $(t,w) \mapsto \overline{G(t,w)B}$ є вимірним;

G_2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $R = R(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого $B \in \beta(X)$ існує $T = T(B,R,\varepsilon)$, для якого

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq T} \|G(t,\theta_{-t}w)B\| > R\} < \varepsilon.$$

З умови G_1) маємо вимірність відображення $(t,w) \mapsto \overline{G(t,\theta_{-t}w)B}$. Дійсно, для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $K_1 = \{(t,\xi) \mid \operatorname{dist}(x, G(t,\xi)B) < a\}$ є вимірною. Оскільки відображення $v : (t,w) \mapsto (t,\theta_{-t}w)$ є вимірним, то множина $K_2 = v^{-1}(K_1) = \{(t,w) \mid \xi = \theta_{-t}w,\ (t,\xi) \in \in K_1\}$ є вимірною. Але $K_2 = \{(t,w) \mid \operatorname{dist}(x, G(t,\theta_{-t}w)B) < a\}$ і шукане доведено.

З іншого боку, оскільки

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{t\geq T} G(t,\theta_{-t}w)B\right) = \inf_{t\geq T} \operatorname{dist}(x, G(t,\theta_{-t}w)B)$$

і

$$\{w \mid \inf_{t\geq T} \operatorname{dist}(x, G(t,\theta_{-t}w)B) < a\} = \pi_\Omega\{(t,w) \mid \operatorname{dist}(x, G(t,\theta_{-t}w)B) < a,\ t \geq T\},$$

то відображення $w \mapsto \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{t\geq T} G(t,\theta_{-t}w)B\right)$ є $\overline{\Phi}$-вимірним. Звідси і відображення $w \mapsto \sup_{t\geq T} \|G(t,\theta_{-t}w)B\|$ є $\overline{\Phi}$-вимірним. Тому при виконанні умови G_1) умова G_2) є коректно означеною.

Деякі класи систем, для яких виконується умова G_2), можна визначити з наступної леми.

Лема 2. *Якщо для БВДС G виконується умова G_1) і існує обмежена вимірна множина $B(w)$ така, що для $\mathbb{P}$-м.в. $w \in \Omega$, для будь-якого $B \in \beta(X)$ існує $T = T(B,w)$ таке, що $G(t,\theta_{-t}w)B \subset B(w)\ \forall\, t \geq T$, то виконується умова G_2).*

Доведення. Нехай умова G_2) не має місця, тобто існує $\varepsilon^* > 0$ таке, що

$$\forall\, R\, \exists\, B \in \beta(X)\, \forall\, T\ \mathbb{P}\{\sup_{t\geq T} \|G(t,\theta_{-t}w)B\| \geq R\} \geq \varepsilon^*.$$

Оскільки відображення $w \mapsto \|B(w)\|$ є $\overline{\Phi}$-вимірним і $\mathbb{P}$-м. с. обмеженим, то $\mathbb{P}\{\|B(w)\| > > R\} \to 0$, $R \to \infty$. Тоді існує R таке, що $\mathbb{P}\{\|B(w)\| > R\} < \dfrac{\varepsilon^*}{2}$. Оскільки $K_N := \{w \mid \sup_{t\geq N} \|G(t,\theta_{-t}w)B\| > R\}$, $\mathbb{P}\{K_N\} \geq \varepsilon^*$, $K_{N+1} \subset K_N\ \ \forall\, N \geq 1$, то $K = \bigcap_{N=1}^{\infty} K_N$, $\mathbb{P}\{K\} = = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\{K_N\} \geq \varepsilon^*$ і $K \subset \{w \mid \|B(w)\| > R\}$. Звідси $\mathbb{P}\{K\} < \dfrac{\varepsilon^*}{2}$, що приводить до суперечності.

Лему доведено.

Для довільних $B \in \beta(X)$ розглянемо наступні множини:

$$\Lambda_B(w) := \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} G(t, \theta_{-t}w)B}, \quad A(w) := \overline{\bigcup_{B \in \beta(X)} \Lambda_B(w)} = \overline{\bigcup_{M=1}^{\infty} \Lambda_{B_M}(w)}.$$

З результатів роботи [5] маємо, що $\Lambda_B(w)$ складається з границь усіх збіжних послідовностей $\{\xi_n\}$, де $\xi_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}w)B$, $t_n \nearrow \infty$.

Лема 3. *Нехай для довільних $t \in \mathbb{R}_+, w \in \Omega$ відображення $x \mapsto G(t,w)x$ є напівнеперервним зверху і компактнозначним, БВДС G задовольняє умови $G_1), G_2)$ і для будь-якого $w \in \Omega$, $t > 0$, $R > 0$ $G(t,w)B_R$ є передкомпактом в X. Тоді існує множина $\Omega(B)$, $\mathbb{P}(\Omega(B)) = 1$, така, що для всіх $w \in \Omega(B)$ $\Lambda_B(w) \neq \varnothing$, притягує B і є компактною напівінваріантною множиною, тобто $\Lambda_B(\theta_t w) \subset G(t,w)\Lambda_B(w)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$.*

Зауваження 1. Якщо $\dim X < \infty$, то передкомпактність множини $G(t,w)B_R$ випливає з інших умов леми 3.

Доведення. Для довільних $w \in \Omega$ маємо $G(t, \theta_{-t}w)B \subset G(1, \theta_{-1}w)\, G(t-1, \theta_{-(t-1)}\theta_{-1}w)B$. Позначимо $\Omega(N,R,B) := \{w \mid \sup_{t \geq N} \|G(t-1, \theta_{-(t-1)}\theta_{-1}w)B\| \leq R\}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існують $R = R(\varepsilon)$, $N = N(B,R,\varepsilon)$ такі, що $\mathbb{P}\{\Omega(N,R,B)\} \geq 1-\varepsilon$, $\Omega(N,R,B) \subset$ $\subset \Omega(N+1,R,B)$. Звідси $G(t,\theta_{-t}w)B \subset G(1,\theta_{-1}w)B_R$ $\forall\, w \in \Omega(N,R,B)$ $\forall\, t \geq N$. Тоді $\Lambda_B(w)$ є непорожньою компактною множиною. Отже, для будь-якого $w \in \Omega(R,B) :=$ $:= \bigcup_{N \geq N(B,R,\varepsilon)}^{\infty} \Omega(N,R,B)$ маємо, що $\Lambda_B(w)$ є непорожньою компактною і $\mathbb{P}\{\Omega(R,B)\} \geq$ $\geq 1-\varepsilon$. Оскільки $\Omega(R,B) \subset \Omega(R+1,B)$, можемо вибрати $\varepsilon_i \to 0$ і $R_i = R(\varepsilon_i) \nearrow \infty$ так, що для будь-якого $w \in \Omega(B) := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega(R_i,B)$ множина $\Lambda_B(w)$ є непорожнім компактом і $\mathbb{P}\{\Omega(B)\} = 1$.

Доведемо для $w \in \Omega(B)$ властивості напівінваріантності і притягання. Оскільки для всіх $w \in \Omega(B)$ існують R, N такі, що $w \in \Omega(N,R,B)$, то для будь-якої $\{t_n\}$, $t_n \nearrow \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$, маємо $G(t_n+t, \theta_{-(t_n+t)}\theta_t w)B \subset G(t,w)G(t_n, \theta_{-t_n}w)B \subset\subset G(t,w)\overline{G(1,\theta_{-1}w)B_R}$ починаючи з деякого n. Остання множина є компактною, оскільки $G(t,w)$ є напівнеперервним зверху і компактнозначним. Звідси $\Lambda_B(\theta_t w) \neq \varnothing$. Далі, для будь-якого $y \in \Lambda(\theta_t w)$ існує $\{t_n\}$ така, що $y = \lim y_n$, $y_n \in G(t_n+t, \theta_{-(t_n+t)}\theta_t w)B$. Тоді існує $\eta_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}w)B$ таке, що $y_n \in G(t,w)\eta_n$. Оскільки $x \mapsto G(t,w)x$ є напівнеперервним зверху і компактнозначним, то графік відображення $x \mapsto G(t,w)x$ є замкненим [9]. Тоді з компактності множини $\overline{G(1,\theta_{-1}w)B_R}$ маємо існування границі $\eta = \lim \eta_n \in \Lambda_B(w)$ і $y \in G(t,w)\eta \subset$ $\subset G(t,w)\Lambda_B(w)$. Таким чином, напівінваріантність доведено.

Нехай для деякого $w \in \Omega(B)$ множина $\Lambda_B(w)$ не притягує B. Тоді існують $\delta > 0$, $\{t_n\}$, $t_n \nearrow \infty$, такі, що $\operatorname{dist}(G(t_n, \theta_{-t_n}w)B, \Lambda_B(w)) \geq \delta > 0$. Отже, існує $\xi_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}w)B$ таке, що $\operatorname{dist}(\xi_n, \Lambda_B(w)) \geq \delta$. З попередніх міркувань маємо, що $\{\xi_n\}$ є передкомпактною, отже, існує $\xi = \lim \xi_n \in \Lambda_B(w)$, що приводить до суперечності.

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай для всіх $t \in \mathbb{R}_+$, $w \in \Omega$ відображення $x \mapsto G(t,w)x$ є напівнеперервним зверху і компактнозначним, БВДС G задовольняє умови $G_1), G_2)$ і для будь-якого*

$w \in \Omega$, $t > 0$, $R > 0$ $G(t,w)B_R$ є передкомпактом в X. Тоді множина

$$A(w) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{B_n}(w)}$$

є випадковим атрактором для G, причому він єдиний, мінімальною множиною серед замкнених притягуючих множин і максимальною множиною серед компактних вимірних напівінваріантних множин.

Доведення. Доведемо, що $A(w) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{B_n}(w)}$ є компактом для $\mathbb{P}$-м.в. $w \in \Omega$. Для довільної B_n розглянемо множину $\Omega(B_n)$ з леми 3. Оскільки $\Omega(B_{n+1}) \subset \Omega(B_n)$, то множина $\Omega_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(B_n)$ є множиною повної міри і $\Lambda_{B_n}(w)$ задовольняє лему 3 для будь-яких $w \in \Omega_0$ і $n \geq 1$. Розглянемо множину $\Omega_0(R, B_n) := \Omega_0 \cap \Omega(R, B_n)$, де $\Omega(R, B_n)$ означено в лемі 3. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $R = R(\varepsilon)$ таке, що $\mathbb{P}\{\Omega_0(R, B_n)\} \geq 1 - \varepsilon$, $\Omega_0(R, B_{n+1}) \subset \Omega_0(R, B_n)$ $\forall n \geq 1$ і $\Lambda_{B_n}(w) \subset \overline{G(1, \theta_{-1}w)B_R}$ $\forall w \in \Omega_0(R, B_n)$. Тоді для $\Omega_0(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_0(R, B_n)$ маємо $\mathbb{P}\{\Omega_0(R)\} \geq 1 - \varepsilon$ і $A(w) \subset \overline{G(1, \theta_{-1}w)B_R}$ $\forall w \in \Omega_0(R)$. Отже, $A(w)$ є компактом. Візьмемо $\varepsilon_i \to 0$, $R_i = R(\varepsilon_i) \nearrow \infty$. Оскільки $\Omega_0(R_i) \subset \Omega_0(R_{i+1})$, то для довільних $w \in \Omega^0 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_0(R_i)$ множина $A(w)$ є компактом і $\mathbb{P}\{\Omega^0\} = 1$.

Далі все будемо розглядати на множині Ω^0. Притягання отримуємо з леми 3. Крім того, $A(\theta_t w) \subset \overline{\bigcup_{B \in \beta(X)} G(t,w)\Lambda_B(w)} \subset \overline{G(t,w)\overline{\bigcup_{B \in \beta(X)} \Lambda_B(w)}} = \overline{G(t,w)A(w)} = G(t,w)A(w)$, де остання рівність отримується з компактності множини $A(w)$ і напівнеперервності зверху відображення $x \mapsto G(t,w)x$ [9]. Ми можемо показати вимірність $A(w)$ відносно σ-алгебри Φ з $\overline{\Phi}$-вимірності $A(w) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\tau_m \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau_m} G(t, \theta_{-t}w)B_n}}$. Для цього використаємо наступний відомий факт: для довільної компактної $\overline{\Phi}$-вимірної множини $A(w)$ існує компактна Φ-вимірна множина $\tilde{A}(w)$, яка збігається з $A(w)$ $\mathbb{P}$-м.с. [3].

Для доведення єдиності використаємо схему, запропоновану в [5]. Нехай $E(w)$ є напівінваріантною компактною вимірною множиною. Для детермінованої $B \in \beta(X)$ означимо $F = \{w \mid E(w) \subset B\}$. Тоді для $F_\infty = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \theta_n F = \{w \mid \theta_{-n}w \in F \text{ нескінченно часто}\}$ з рекурентної теореми Пуанкаре маємо $\mathbb{P}\{F_\infty\} \geq \mathbb{P}\{F\}$. Якщо $w \in F_\infty$, то $E(\theta_{-n}w) \subset B$ для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}$ і з напівінваріантності $E(w)$ маємо $E(w) \subset G(n, \theta_{-n}w) \times$ $\times E(\theta_{-n}w) \subset G(n, \theta_{-n}w)B$, тобто $E(w) \subset \Lambda_B(w)$. Отже, $\mathbb{P}\{E(w) \subset \Lambda_B(w)\} \geq \mathbb{P}\{E(w) \subset$ $\subset B\}$. Але з [3] маємо, що для довільної компактної вимірної множини $E(w)$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує детермінована компактна множина $K_\varepsilon \subset X$ така, що $\mathbb{P}\{E(w) \subset K_\varepsilon\} >$ $> 1 - \varepsilon$. Отже, $\mathbb{P}\{E(w) \subset A(w)\} \geq \mathbb{P}\{E(w) \subset \Lambda_{K_\varepsilon}(w)\} > 1 - \varepsilon$, звідки $\mathbb{P}\{E(w) \subset A(w)\} =$ $= 1$. Таким чином, випадковий атрактор єдиний і є максимальною множиною серед напівінваріантних компактних вимірних множин.

Тепер нехай $K(w)$ є замкненою притягуючою множиною. Доведемо, що $\Lambda_B(w) \subset$ $\subset K(w)$ для довільних $B \in \beta(X)$, $w \in \Omega^0$. Якщо це не так, то існують $w \in \Omega^0$, $y \in \Lambda_B(w)$, $\delta > 0$ такі, що $\operatorname{dist}(y, K(w)) > \delta$. З іншого боку, існують $t_n \nearrow \infty$, $y_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}w)B$

такі, що $y = \lim y_n$. Тоді існує номер $n(w)$ такий, що $\operatorname{dist}(y_n, K(w)) < \dfrac{\delta}{2}\ \forall\, n \geq n(w)$, що і приводить до суперечності.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Достатньо перевірити умови $G_1), G_2)$ для $B = B_r\ \forall\, r > 0$. Щодо перевірки умови $G_1)$, справедливою є наступна лема.

Лема 4. *Нехай Ω є метричним простором, Φ — борелева σ-алгебра і багатозначне відображення $G : R_+ \times \Omega \times X \mapsto C(X)$ задовольняє умову: якщо $x_n \to x_0$ слабко в X, $t_n \to t_0 > 0$, $w_n \to w_0$ в Ω, $y_n \in G(t_n, w_n)x_n$, то для деякої підпослідовності $y_n \to y_0 \in G(t_0, w_0)x_0$ в X.*

Тоді відображення G задовольняє умову $G_1)$.

Доведення. Згідно із зауваженням 2 достатньо довести вимірність відображення $(t, w) \mapsto \overline{G(t,w)B_r}$. Для довільної замкненої множини $C \subset X$ і $n \geq 1$ розглянемо множину $L_n := \left\{(t,w) \mid t \geq \dfrac{1}{n},\ \overline{G(t,w)B_r} \cap C \neq \varnothing\right\}$. Тоді L_n є замкненою і для множини $L := \{(t,w) \mid \overline{G(t,w)B_r} \cap C \neq \varnothing\}$ маємо

$$L = \left[\begin{array}{l} \bigcup\limits_{n \geq 1} L_n, \ \text{якщо } B_r \cap C = \varnothing, \\ \bigcup\limits_{n \geq 1} L_n \cup \{0 \times \Omega\}, \ \text{якщо } B_r \cap C \neq \varnothing. \end{array}\right.$$

Звідси L є борелевою множиною, і лему доведено.

Застосування до задачі (1). Отримані результати застосуємо до сім'ї відображень (5). А саме, доведемо, що (5) породжує БВДС, для якої існує випадковий атрактор. Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 2. *Нехай процес $\xi(t,w) = w(t)$ задовольняє для деякого $\delta > 0$ наступні умови:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, T > 0 \ \textit{таке, що}\ \ \mathbb{P}\left\{\sup_{t \geq T} \frac{1}{t} \int_{-t}^{0} |w(p)|dp \leq \frac{a\lambda_1}{2C_1 + \gamma} - \delta\right\} > 1 - \varepsilon, \tag{6}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, D \ \textit{таке, що}\ \ \sup_{t \geq 0} \mathbb{P}\left\{\int_{-t}^{0} |w(s)|\, e^{\delta(2C_1 + \gamma)s} ds \leq D\right\} > 1 - \varepsilon, \tag{7}$$

де λ_1 є першим власним значенням $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$ і C_1 є константою з умови $|g(u)| \leq C_1|u| + C_2$, $C_1 > 0$.

Тоді сім'я відображень (5) утворює БВДС, для якої існує випадковий атрактор.

Доведення. З лем 1 і 4 легко отримуємо, що сім'я відображень (5) утворює БВДС (умови означення 1 перевіряються, як і в роботі [5] (твердження 4)), для якої мають місце умова $G_1)$ і передкомпактність множини $G(t,w)B_r$. Крім того, із згаданих лем випливають компактнозначність і напівнеперервність зверху відображення $x \mapsto G(t,w)x$. Отже, для застосування теореми 1 залишилося перевірити умову $G_2)$.

На підставі леми 1 для будь-яких $T_1 > T_2 > 0$ і $w \in \Omega$ існують $t(w) \in [T_1, T_2]$ і $x_0(w) \in \in B_r$ такі, що

$$\sup_{t\in[T_1,T_2]} \|G(t, \theta_{-t}w)B_r\| = \|u(t(w), \theta_{-t(w)}w)x_0(w)\|,$$

і з $\overline{\Phi}$-вимірності $w \mapsto \sup\limits_{t\in[T_1,T_2]} \|G(t, \theta_{-t}w)B_r\|$ маємо $\overline{\Phi}$-вимірність $\|u(t(w), \theta_{-t(w)}w)x_0(w)\|$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і розглянемо (4) для $t \in [T, T+N]$. Означимо множини

$$L^N := \{w : \sup_{t\in[T,T+N]} \|G(t, \theta_{-t}w)B_r\|^2 > R^2\} = \{w : \|u(t(w), \theta_{-t(w)}w)x_0(w)\|^2 > R^2\}.$$

Тоді з оцінки (4) одержимо

$$L^N \subset \left\{ w : r^2 \exp\left(\left(\frac{1}{t(w)} \int\limits_{-t(w)}^{0} |w(p)|dp - \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma}\right)(2C_1+\gamma)t(w)\right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-t(w)}^{0} \exp\left(\left(\frac{1}{s}\int\limits_{s}^{0} |w(p)|dp + \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma}\right)(2C_1+\gamma)s\right)\left(2C + \frac{1}{a\lambda_1}\|h\|^2 + C_\gamma\,|w(s)|\right)ds > R^2 \right\}.$$

Покладемо

$$A_1 := \left\{ w : \; r^2 \exp\left(\left(\frac{1}{t(w)} \int\limits_{-t(w)}^{0} |w(p)|dp - \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma}\right)(2C_1+\gamma)t(w)\right) \geq 1 \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ w : \left(\frac{1}{t(w)} \int\limits_{-t(w)}^{0} |w(p)|dp - \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma}\right) \geq \frac{1}{(2C_1+\gamma)\,t(w)} \ln\left(\frac{1}{r^2}\right) \right\}.$$

Тепер виберемо число $T = T(r)$ так, щоб $\dfrac{1}{(2C_1+\gamma)T} \ln\left(\dfrac{1}{r^2}\right) > -\delta$. Тоді

$$A_1 \subset \left\{ w : \frac{1}{t(w)} \int\limits_{-t(w)}^{0} |w(p)|dp - \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma} > -\delta \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ w : \sup_{t\geq T} \frac{1}{t} \int\limits_{-t}^{0} |w(p)|dp - \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma} > -\delta \right\}.$$

Далі, з умови (6) випливає, що існують $T_1 = T_1(\varepsilon)$, $A_2 \subset \Omega$, $\mathbb{P}\{A_2\} < \dfrac{\varepsilon}{4}$ такі, що для будь-якого $w \in \Omega\backslash A_2$ $\sup\limits_{t\geq T_1} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{-t}^{0} |w(p)|dp - \dfrac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma} \leq -\delta$. Таким чином, існує $T_2 = T_2(\varepsilon, r) \geq$

$\geq T_1 + T(r)$ таке, що для $t(w) \in [T_2, T_2 + N]$ $\mathbb{P}\{A_1\} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Тоді

$$L^N \subset A_1 \cup \Bigg\{ w : \int\limits_{-t(w)}^{0} \exp\Bigg(\Bigg(\frac{1}{s}\int\limits_{s}^{0} |w(p)|dp + \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma}\Bigg)\times$$

$$\times (2C_1+\gamma)s\left(2C + \frac{1}{a\lambda_1}\|h\|^2 + C_\gamma\,|w(s)|\right)\Bigg)ds > R^2 - 1\Bigg\} \subset$$

$$\subset A_1 \cup A_2 \cup \Bigg\{ w : \int\limits_{-T_1}^{0} \left(2C + \frac{1}{a\lambda_1}\|h\|^2 + C_\gamma|w(s)|\right) e^{\left(\frac{1}{s}\int_s^0 |w(p)|dp + \frac{a\lambda_1}{2C_1+\gamma}\right)(2C_1+\gamma)s} ds +$$

$$+ \int\limits_{-T_2-N}^{0} \left(2C + \frac{1}{a\lambda_1}\|h\|^2 + C_\gamma|w(s)|\right) e^{\delta(2C_1+\gamma)s} ds > R^2 - 1\Bigg\} =$$

$$= A_1 \cup A_2 \cup \Bigg\{ w : f_\varepsilon(w) + \int\limits_{-T_2-N}^{0} |w(s)| e^{\delta(2C_1+\gamma)s} ds > \frac{R^2 - A}{B}\Bigg\},$$

де $A > 0$, $B > 0$ — сталі константи, $f_\varepsilon : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ є вимірною $\mathbb{P}$-м.с. обмеженою функцією. Отже, існують $R_1 = R_1(\varepsilon)$ і $A_3 \subset \Omega$ такі, що для будь-якого $w \in A_3$ $f_\varepsilon(w) > R_1$ і $\mathbb{P}\{A_3\} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Тоді

$$L^N \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \left\{ w : \int\limits_{-T-N}^{0} |w(s)| e^{\delta(2C_1+\gamma)s} ds > \frac{R^2 - A}{B} - R_1(\varepsilon)\right\}.$$

З умови (7) випливає, що існує $D = D(\varepsilon)$ таке, що для будь-якого $t > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ w : \int\limits_{-t}^{0} |w(s)| e^{\delta(2C_1+\gamma)s} ds > D\right\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Виберемо $R = R(\varepsilon)$ таким чином, щоб $\dfrac{R^2 - A}{B} - R_1(\varepsilon) > D$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists R = R(\varepsilon)\ \forall B_r\ \exists T = T(\varepsilon, R, r)\ \forall N \geq 1$ $\mathbb{P}\{L^N\} = \mathbb{P}\{w : \sup\limits_{t\in[T,T+N]} \|G(t, \theta_{-t}w)B_r\|^2 > R^2\} < \varepsilon$. Оскільки $L^N \subset L^{N+1}$, то для $L := \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} L^N$ маємо

$$\mathbb{P}\{L\} < \varepsilon \quad \text{і} \quad \{w : \sup_{t\geq T} \|G(t, \theta_{-t}w)B_r\|^2 > R^2\} = L.$$

Тоді виконано умову 4, і теорему доведено.

Результати попередньої теореми можна отримати, якщо послабити умови на функцію g, натомість посиливши умови на процес $\xi(t,w)$. А саме, нехай функція g задовольняє умову

$$|g(u)| \le C_1 |u|^r + C_2, \tag{8}$$

де $r < p-1$. У цьому випадку умову (7) слід замінити на таку:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists D > 0 \text{ таке, що } \sup_{t \ge 0} \mathbb{P}\left\{ \int_{-t}^{0} |w(p)|^{\frac{p}{p-r-1}} e^{a\lambda_1 s} ds \le D \right\} > 1 - \varepsilon. \tag{9}$$

Теорема 3. *Нехай в умовах попередньої теореми функція g задовольняє умову (8), а процес $\xi(t,w) = w(t)$ задовольняє (6), (9). Тоді сім'я відображень (5) утворює БВДС, для якої існує випадковий атрактор.*

Доведення. Домножаючи (1) на u, отримуємо

$$\frac{d\|u(t)\|^2}{dt} \le -\lambda_1 a \|u(t)\|^2 - \alpha \|u(t)\|_{L_p}^p + 2C_1 |w(t)| \, \|u(t)\|_{L_{r+1}}^{r+1} + 2C_2 |w(t)| \, \|u(t)\|_{L_1} +$$

$$+ 2C + \frac{\|h\|^2}{a\lambda_1} \le -\lambda_1 a \|u(t)\|^2 + C_3 |w(t)|^{\frac{p}{p-r-1}} + C_4.$$

Тоді нерівності (3), (4) набирають вигляду

$$\|u(t)\|^2 \le \|u(s)\|^2 + C_3 \int_s^t |w(s)|^{\frac{p}{p-r-1}} ds + C_4 (t-s), \tag{10}$$

$$\|u(t)\|^2 \le e^{-\lambda_1 a t} \|u_0\|^2 + \int_0^t e^{-\lambda_1 a (t-s)} \left(C_3 |w(s)|^{\frac{p}{p-r-1}} + C_4 \right) ds. \tag{11}$$

Доведення леми 1 проводиться без змін з урахуванням вигляду функції J :

$$J(t,w) = \|u(t)\|^2 - C_4 t - C_3 \int_0^t |w(s)|^{\frac{p}{p-r-1}} ds.$$

Далі перевірка умови $G_2)$ також проводиться, як і в попередній теоремі, з урахуванням того, що для довільної B_r і для довільного $y \in G(t, \theta_{-t} w) B_r$ виконується оцінка

$$\|y\|^2 \le e^{-\lambda_1 a t} r^2 + \int_{-t}^{0} e^{\lambda_1 a p} \left(C_3 |w(p)|^{\frac{p}{p-r-1}} + C_4 \right) dp.$$

Висновки. В роботі для багатозначної випадкової динамічної системи, що є дисипативною за ймовірністю, доведено теорему про існування і єдиність випадкового атрактора. На основі цієї теореми доведено, що розв'язки рівняння реакції-дифузії, збуреного стохастичним „cadlag” процесом, утворюють багатозначну випадкову динамічну систему, для якої у фазовому просторі існує випадковий атрактор.

1. *Arnold L.* Random dynamical systems. — Berlin: Springer, 1998. — 581 p.
2. *Crauel H., Flandoli F.* Attractors for random dynamical systems // Probab. Theory Related Fields. — 1994. — **100**. — P. 365 – 393.
3. *Crauel H.* Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets // Ann. mat. pura ed appl. — 1999. — **126**, № 4. — P. 57 – 72.
4. *Schenk-Hoppe K. R.* Random attractors - general properties, existence and applications to stochastic bifurcation theory // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 1998. — **4**, № 1. — P. 99 – 130.
5. *Caraballo T., Langa J. A., and Valero J.* Global attractors for multivalued random dynamical systems // Nonlinear Analisys. — 2002. — **48**. — P. 805 – 829.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 564 с.
7. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. — М.: Наука, 1989. — 292 с.
8. *Капустян А. В.* Глобальные аттракторы неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. — 2002. — **38**, № 10. — С. 1378 – 1382.
9. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston: Birkhauser, 1990. — 457 c.

Одержано 20.02.2005