УДК 517.946

І. М. Конет

Інтегральні зображення розв'язків стаціонарних задач теплопровідності для двоскладових циліндричних просторів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

The exact analytical solution of a stationary heat problem for two-component cylindric spaces is constructed by the method of integral transforms.

Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [1–3]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [4–6]. Зокрема, в [6] розглянуто необмежені, напівобмежені та обмежені багатошарові за радіальною координатою циліндрично-кругові області.

У цьому повідомленні пропонуються інтегральні зображення стаціонарних задач теплопровідності для двоскладових циліндричних просторів.

Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному двоскладовому за декартовою координатою циліндричному просторі математично зводиться до побудови обмеженого в області $D = \{(r,\varphi,z)\colon r \in (0;\infty); \varphi \in [0;2\pi); z \in (-\infty;0)\bigcup(0;+\infty) \equiv \equiv I_1 \bigcup I_2\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [7]

$$\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j - \chi_j^2 u_j = -f_j(r,\varphi,z), \quad z \in I_j, \quad j = 1,2, \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^k u_1}{\partial z^k}\right|_{z=-\infty} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^k u_2}{\partial z^k}\right|_{z=+\infty} = 0, \qquad k = 0,1; \tag{2}$$

$$\left.u_j(r,\varphi,z)\right|_{r=0} < \infty, \qquad \left.\frac{\partial u_j}{\partial r}\right|_{r=\infty} = 0, \qquad j = 1,2, \tag{3}$$

та умовами неідеального теплового контакту [8]

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\left[\left(b_0\dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right)u_1 - u_2\right]\right|_{z=0} = 0, \\ \left.\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z} - \nu_1\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0, \qquad \nu_1 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Фізико-механічний зміст параметрів і функцій, які беруть участь у формулюванні задачі, розкрито в [7, 8].

Припустимо, що задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень.

До задачі (1)–(4) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [6] та інтегральне перетворення Фур'є–Бесселя щодо радіальної змінної r [6]. Одержуємо задачу про структуру обмеженого на двоскладовій декартовій осі $I_1 \bigcup I_2$ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_j^2 \frac{d^2}{dz^2} - (\lambda^2 + \overline{\chi}_j^2)\right] \widetilde{u}_{jm}(\lambda, z) = -\widetilde{\overline{f}}_{jm}(\lambda, z), \qquad z \in I_j, \qquad j = 1, 2, \tag{5}$$

за крайовими умовами

$$\left.\frac{d^k \widetilde{u}_{1m}}{dz^k}\right|_{z=-\infty} = 0, \qquad \left.\frac{d^k \widetilde{u}_{2m}}{dz^k}\right|_{z=+\infty} = 0, \qquad k = 0, 1, \tag{6}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left.\left[\left(b_0 \dfrac{d}{dz} + 1\right)\widetilde{u}_{1m} - \widetilde{u}_{2m}\right]\right|_{z=0} = 0, \\ \left.\left(\dfrac{d\widetilde{u}_{1m}}{dz} - \nu_1 \dfrac{d\widetilde{u}_{2m}}{dz}\right)\right|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Застосуємо до задачі (5)–(7) інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі з однією точкою спряження щодо змінної z [4]:

$$F_1[g(z)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(z)\overline{V(z,\beta)}\sigma(z)\,dz \equiv \widetilde{g}(\beta), \tag{8}$$

$$F_1^{-1}[\widetilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{Re}[\widetilde{g}(\beta)V(z,\beta)]\Omega_1(\beta)\,d\beta \equiv g(z), \tag{9}$$

$$F_1\left[(a_1^2\theta(-z) + a_2^2\theta(z))\frac{d^2 g}{dz^2}\right] =$$

$$= -\beta^2\widetilde{g}(\beta) - k_1^2 \int\limits_{-\infty}^{0} g_1(z)\overline{V_1(z,\beta)}\sigma_1\,dz - k_2^2 \int\limits_0^{+\infty} g_2(z)\overline{V_2(z,\beta)}\sigma_2\,dz, \tag{10}$$

де

$$V(z,\beta) = V_1(z,\beta)\theta(-z) + V_2(z,\beta)\theta(z); \qquad \sigma(z) = \sigma_1\theta(-z) + \sigma_2\theta(z);$$

$$V_1(z,\beta) = \sqrt{\frac{\nu_1\overline{b_2}(\beta)}{\omega_3(\beta)}}[\omega_3(\beta)\cos(\overline{b_1}(\beta)z) - \omega_5(\beta)\sin(\overline{b_1}(\beta)z)] -$$

$$- i\nu_1\overline{b_2}(\beta)\sqrt{\frac{\omega(\beta)}{\overline{b_1}(\beta)\omega_3(\beta)}}\sin(\overline{b_1}(\beta)z); \quad \overline{b_j}(\beta) = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}; \quad k_j^2 \geqslant 0; \quad j = 1, 2;$$

$$V_2(z,\beta)=\sqrt{\frac{\nu_1\overline{b_1}(\beta)}{\omega_3(\beta)}}[\omega_2(\beta)\cos(\overline{b_2}(\beta)z)-\omega_1(\beta)\sin(\overline{b_2}(\beta)z)]-$$

$$-i\sqrt{\frac{\overline{b_1}(\beta)\omega(\beta)}{\omega_3(\beta)}}[\nu_1 b_0\overline{b_2}(\beta)\cos(\overline{b_2}(\beta)z)+\sin(\overline{b_2}(\beta)z)];$$

$$\sigma_1=\frac{1}{\nu_1 a_1^2};\qquad \sigma_2=\frac{1}{a_1^2};\qquad \omega_1(\beta)=\nu_1 b_0\overline{b_1}(\beta)\overline{b_2}(\beta);\qquad \omega_2(\beta)=\nu_1\overline{b_2}(\beta)+\overline{b_1}(\beta);$$

$$\omega(\beta)=\omega_1^2(\beta)+\omega_2^2(\beta);\qquad \omega_3(\beta)=\omega_1^2(\beta)+\omega_2(\beta);\qquad \omega_5(\beta)=b_0\nu_1^2\overline{b_2}(\beta);$$

$\Omega_1(\beta)=\beta[\overline{b_2}(\beta)\omega(\beta)]^{-1}$; $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Систему диференціальних рівнянь (5) запишемо у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(a_1^2\dfrac{d^2}{dz^2}-\lambda^2-\overline{\chi}_1^2\right)\widetilde{u}_{1m}(\lambda,z)\\ \left(a_2^2\dfrac{d^2}{dz^2}-\lambda^2-\overline{\chi}_2^2\right)\widetilde{u}_{2m}(\lambda,z)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\widetilde{\overline{f}}_{1m}(\lambda,z)\\ \widetilde{\overline{f}}_{2m}(\lambda,z)\end{bmatrix}\tag{11}$$

та зобразимо інтегральний оператор F_1 у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_1[\ldots]=\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\ldots\overline{V_1(z,\beta)}\sigma_1\,dz\ \int\limits_{0}^{+\infty}\ldots\overline{V_2(z,\beta)}\sigma_2\,dz\right].\tag{12}$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-рядок (12) до системи (11). Внаслідок тотожності (10) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$(\beta^2+\lambda^2+\overline{\chi}_1^2+k_1^2)\widetilde{\widetilde{u}}_{1m}(\lambda,\beta)+(\beta^2+\lambda^2+\overline{\chi}_2^2+k_2^2)\widetilde{\widetilde{u}}_{2m}(\lambda,\beta)=\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_{1m}(\beta)+\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_{2m}(\beta),\tag{13}$$

де

$$\widetilde{\widetilde{u}}_{1m}(\lambda,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{0}\widetilde{u}_{1m}(\lambda,z)\overline{V_1(z,\beta)}\sigma_1\,dz;\qquad \widetilde{\widetilde{u}}_{2m}(\lambda,\beta)=\int\limits_{0}^{+\infty}\widetilde{u}_{2m}(\lambda,z)\overline{V_2(z,\beta)}\sigma_2\,dz;$$

$$\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_{1m}(\lambda,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{0}\widetilde{\overline{f}}_{1mn}(\lambda,z)\overline{V_1(z,\beta)}\sigma_1\,dz;\qquad \widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_{2m}(\lambda,\beta)=\int\limits_{0}^{+\infty}\widetilde{\overline{f}}_{2m}(\lambda,z)\overline{V_2(z,\beta)}\sigma_2\,dz.$$

Припустимо, що $\max\{\overline{\chi}_1^2,\overline{\chi}_2^2\}=\overline{\chi}_2^2$ і покладемо всюди $k_1^2=\overline{\chi}_2^2-\overline{\chi}_1^2\geqslant 0$, $k_2^2=0$. Рівняння (13) набуває вигляду

$$(\beta^2+\lambda+\overline{\chi}_2^2)\widetilde{\widetilde{u}}_m(\lambda,\beta)=\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_m(\lambda,\beta),\tag{14}$$

де

$$\widetilde{\widetilde{u}}_m(\lambda,\beta)=\widetilde{\widetilde{u}}_{1m}(\lambda,\beta)+\widetilde{\widetilde{u}}_{2m}(\lambda,\beta);\qquad \widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_m(\lambda,\beta)=\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_{1m}(\lambda,\beta)+\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_{2m}(\lambda,\beta).$$

Із рівняння (14) знаходимо функцію

$$\widetilde{\widetilde{u}}_m(\lambda,\beta) = \frac{\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_m(\lambda,\beta)}{\beta^2+\lambda^2+\overline{\chi}_2^2}. \tag{15}$$

Оскільки суперпозиція операторів F_1 та F_1^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_1^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_1^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{Re}[\ldots V_1(z,\beta)]\Omega_1(\beta)\,d\beta \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{Re}[\ldots V_2(z,\beta)]\Omega_1(\beta)\,d\beta \end{bmatrix}. \tag{16}$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (16) до матриці-елемента $[\widetilde{\widetilde{u}}_m(\lambda,\beta)]$, де функція $\widetilde{\widetilde{u}}_m(\lambda,\beta)$ визначена формулою (15). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (5)–(7):

$$\widetilde{u}_{jm}(\lambda,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}[\widetilde{\widetilde{\overline{f}}}_m(\lambda,\beta)V_j(z,\beta)]}{\beta^2+\lambda^2+\overline{\chi}_2^2}\Omega_1(\beta)\,d\beta, \qquad j=1,2. \tag{17}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\widetilde{u}_{jm}(\lambda,z)$, визначених формулами (17), обернені оператори Фур'є–Бесселя та Фур'є, одержуємо функції

$$u_j(r,\varphi,z) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^0 E_{j1}(r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_1\rho\,d\xi d\alpha d\rho +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\infty E_{j2}(r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_2\rho\,d\xi d\alpha d\rho, \qquad j=1,2, \tag{18}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному двоскладовому циліндричному просторі.

У формулах (18) беруть участь компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}(r,\rho,\varphi,z,\xi) = \frac{1}{\pi^2 a_{rj}^2}\sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m E_{jk,m}(r,\rho,z,\xi)\cos(m\varphi) \tag{19}$$

еліптичної крайової задачі (1)–(4), де

$$E_{jk,m}(r,\rho,z,\xi) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}[V_j(z,\beta)\overline{V_k(\xi,\beta)}]}{\beta^2+\lambda^2+\overline{\chi}_2^2}\Omega_1(\beta)\,d\beta J_m(\lambda r)J_m(\lambda\rho)\lambda\,d\lambda. \tag{20}$$

Відомо [9], що

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\lambda r)J_\nu(\lambda\rho)\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+a^2} \equiv E_\nu(ar,a\rho) = \begin{cases} I_\nu(ar)K_\nu(a\rho), & 0<r<\rho<\infty, \\ I_\nu(a\rho)K_\nu(ar), & 0<\rho<r<\infty, \end{cases} \tag{21}$$

де $I_\nu(x)$ — модифікована циліндрична функція 1-го роду ν-го порядку; $K_\nu(x)$ — модифікована циліндрична функція 2-го роду ν-го порядку.

Отже, формула (20) набуває вигляду

$$E_{jk,m}(r,\rho,z,\xi)=\int\limits_0^\infty E_m\Big(\sqrt{\beta^2+\overline{\chi}_2^2}r,\sqrt{\beta^2+\overline{\chi}_2^2}\rho\Big)\operatorname{Re}[V_j(z,\beta)\overline{V_k(\xi,\beta)}]\Omega_1(\beta)\,d\beta. \qquad (22)$$

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Припустимо, що:*

1) функція $f_1(r,\varphi,z)$ неперервна і має обмежену варіацію за кожною змінною на множині $\{(r,\varphi,z)\colon r\in(0;\infty);\ \varphi\in[0;2\pi);\ z\in I_1\}$, абсолютно сумовна на проміжку I_1 і зникає разом зі своїми частинними похідними першого порядку при $z\to-\infty$;

2) функція $f_2(r,\varphi,z)$ неперервна і має обмежену варіацію за кожною змінною на множині $\{(r,\varphi,z)\colon r\in(0;\infty);\ \varphi\in[0;2\pi);\ z\in I_2\}$, абсолютно сумовна на проміжку I_2 і зникає разом зі своїми частинними похідними першого порядку при $z\to+\infty$;

3) функції $f_j(r,\varphi,z)$, $j=1,2$, абсолютно сумовні з вагою r на проміжку $\{r\colon r>0\}$ і зникають разом зі своїми частинними похідними першого порядку при $r\to\infty$;

4) функції $f_j(r,\varphi,z)$, $j=1,2$, задовольняють умови спряження.

Тоді в класі двічі неперервно диференційовних в області D вектор-функцій $u(r,\varphi,z)=\{u_1(r,\varphi,z),u_2(r,\varphi,z)\}$, що задовольняють умови 1–3, єдиний обмежений розв'язок еліптичної періодичної крайової задачі (1)–(4) *визначається формулами* (18).

Зауваження 1. Якщо $\max\{\overline{\chi}_1^2,\overline{\chi}_2^2\}=\overline{\chi}_1^2$, то потрібно покласти $k_1^2=0$, $k_2^2=\overline{\chi}_1^2-\overline{\chi}_2^2\geqslant 0$ і у формулах (22) замість $\sqrt{\beta^2+\overline{\chi}_2^2}$ писати $\sqrt{\beta^2+\overline{\chi}_1^2}$.

Наслідок. *Якщо функції $f_j(r,\varphi,z)$ не залежать від кутової змінної φ, то згідно з формулами* (18), (9), (22) *структуру розв'язку крайової задачі* (1)–(4) *визначають функції*

$$u_j(r,z)=\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^0 E_{j1}^*(r,\rho,z,\xi)f_1(\rho,\xi)\sigma_1\rho\,d\xi d\rho+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{+\infty} E_{j2}^*(r,\rho,z,\xi)f_2(\rho,\xi)\sigma_2\rho\,d\xi d\rho, \qquad (23)$$

де

$$E_{jk}^*(r,\rho,z,\xi)=\frac{1}{\pi a_{rj}^2}\int\limits_0^\infty E_0\Big(\sqrt{\beta^2+\overline{\chi}_2^2}r,\sqrt{\beta^2+\overline{\chi}_2^2}\rho\Big)\operatorname{Re}[V_j(z,\beta)\overline{V_k(\xi,\beta)}]\Omega_1(\beta)\,d\beta.$$

Зауваження 2. При $b_0=0$ безпосередньо з формул (18), (23) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на площині $z=0$ ідеального теплового контакту. Крім того, у випадку $a_{rj}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2>0$ формули (18), (23) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропному двоскладовому циліндричному просторі.

Таким чином, при найбільш загальних припущеннях у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків стаціонарних задач у двоскладових циліндричних просторах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.

2. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
4. *Ленюк М. П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
5. *Конет І. М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
6. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
7. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 336 с.
8. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.

Кам'янець-Подільський державний університет *Надійшло до редакції 26.10.2006*

УДК 512.54

Я. В. Лавренюк

Автоморфізми індуктивних границь з діагональними зануреннями скінченних симетричних та знакозмінних груп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

We show that every automorphism of a diagonal limit of finite symmetric groups is locally inner.

1. Будемо говорити, що занурення симетричних груп $\mathrm{Sym}(X_1) \to \mathrm{Sym}(X_2)$ діагональне, якщо кожна нетривіальна орбіта групи $\mathrm{Sym}(X_1)$ на множині X_2 є природною. Діагональне занурення називається строго діагональним, якщо немає тривіальних орбіт. Так само визначається діагональне занурення у випадку знакозмінних груп. Діагональною границею скінченних симетричних (знакозмінних) груп називатимемо індуктивну границю з діагональними зануреннями скінченних симетричних (знакозмінних) груп, якщо вона не є фінітарною симетричною (знакозмінною) групою.

У роботах [1, 2] досліджувалися автоморфізми діагональних границь у випадку строго діагональних занурень для симетричних і знакозмінних груп. Зокрема, було встановлено, що кожен автоморфізм індуктивної границі із строго діагональними зануреннями скінченних симетричних груп є локально внутрішнім.

Інші властивості діагональних границь скінченних симетричних і знакозмінних груп можна знайти в [3].

У даному повідомленні досліджуються автоморфізми діагональних границь загального вигляду для скінченних симетричних і знакозмінних груп.

2. Нехай (T, v_0) — локально скінченне кореневе дерево з коренем v_0. Для довільних вершин u, v дерева T $(u, v \in V(T))$ відстанню $d(u, v)$ між u та v є довжина найкоротшого