УДК 517 . 9

СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗАНИХ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З ЦЕНТРАЛЬНИМ ЕЛЕМЕНТОМ: СТІЙКІСТЬ СИНХРОНІЗОВАНОГО СТАНУ

І. В. Омельченко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We study stability of the synchronized state in the systems of coupled one-dimensional piecewise linear maps which include a central element interacting with every other, peripheral, element of the system. Two types of systems are considered: when the peripheral elements interact with each other and when there is no such an interaction. We find conditions for strong and weak stability of the synchronized state in considered systems.

Досліджується стійкість синхронізованого стану у системах зв'язаних одновимірних кусково-лінійних відображень, що за структурою зв'язків містять центральний елемент, тобто елемент, який взаємодіє з кожним іншим, периферійним, елементом системи. Розглядаються системи двох типів: при наявності та відсутності взаємодії між периферійними елементами системи. Отримано умови сильної та слабкої стійкості синхронізованого стану у розглянутих системах.

1. Вступ. Багато математичних моделей, що виникають у техніці [1], біології [2, 3], медицині [4] та соціальних науках [5], описуються як системи зв'язаних нелінійних осциляторів або відображень. Залежно від типу та кількості елементів у системі, сили зв'язку між ними, початкових умов динаміка таких систем може бути як періодичною, так і хаотичною. При цьому важливим проявом колективної поведінки елементів є стани повної або часткової синхронізації, коли всі елементи системи або певна їх частина з часом ведуть себе однаково. Зрозуміло, що встановлення умов реалізації цих станів та дослідження їх стійкості має важливе значення для практичних застосувань.

Відомо [6], що стан повної синхронізації може досягатись лише у системі, що складається з ідентичних елементів. Якщо ж взаємодіючі відображення або осцилятори не однотипні, то у системах можливе виникнення станів часткової [7] або фазової [8] синхронізації. Ряд практичних застосувань приводить до оберненої задачі: встановлення умов десинхронізації у системах взаємодіючих однотипних елементів [9].

Синхронізаційні властивості взаємодіючих осциляторів або відображень залежать не лише від типу елементів системи, а й від топологічної структури зв'язків у ній. Тому в останні роки інтенсивно досліджується вплив структури зв'язків у системі на існування та стійкість синхронізованих станів у ній [10]. Виникнення моделей типу „світ тісний" (small-world) [11] призвело до ще більшого підвищення уваги до цього питання. У системах типу „світ тісний" поєднуються регулярні зв'язки (наприклад, глобальні зв'язки у групі, або зв'язки лише між сусідніми елементами) та певним чином вибрані зв'язки між різними групами або віддаленими елементами системи, внаслідок чого досягнення станів синхронізації у системі стає значно ефективнішим. Крім цього, зазначені структури є дуже близькими до будови багатьох біологічних та соціальних систем [5].

У даній роботі запропоновано два типи структур зв'язків у системах взаємодіючих відображень, що містять центральний елемент, тобто елемент, що безпосередньо взаємодіє з кожним з решти елементів системи, які назвемо периферійними. Метою роботи є дослідження стійкості повністю синхронізованого стану у цих системах, а саме визначення умов для різних типів стійкості та нестійкості.

Нагадаємо спочатку основні означення. Нехай систему різницевих рівнянь

$$\mathbf{u}^{t+1} = F(\mathbf{u}^t), \quad \mathbf{u}^t = (u_1^t, \ldots, u_M^t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

задано за допомогою M-вимірного відображення $F : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$.

Говорять, що у цій системі має місце стан *повної синхронізації*, якщо

$$u_i^t = u_j^t$$

для всіх $i, j \in \mathbb{Z}_M^+ = \{1, 2, \ldots, M\}$ і для всіх $t \in \mathbb{Z}^+$.

При повній синхронізації поведінка розв'язку системи (1) з часом реалізується на діагоналі M-вимірного фазового простору

$$D_M = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M | u_i = u_j \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}_M^+\}.$$

Нехай $A_D \subset D_M$ — деяка підмножина з цієї діагоналі, інваріантна відносно відображення F, тобто $F(A_D) \subseteq A_D$.

Означення 1. *Множину A_D називають сильно (асимптотично) стійкою, якщо для будь-якого її околу $U(A_D) \subset \mathbb{R}^M$ існує інший окіл $V(A_D) \subset \mathbb{R}^M$, такий що для всіх $\mathbf{u} \in V(A_D)$ виконується:*

1) $F^n(\mathbf{u}) \in U(A_D)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;

2) $\rho(F^n(\mathbf{u}), A_D) \to 0$ для $n \to \infty$, де $\rho(\cdot,\cdot)$ — відстань між точкою та множиною в $\mathbb{R}^M$.

Областю притягування множини A_D називається множина

$$B(A_D) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M | \omega(\mathbf{u}, F) \subset A_D\},$$

де через $\omega(\mathbf{u}, F) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{F^k(\mathbf{u}) : k > n\}}$ позначено ω-граничну множину траєкторії відображення F з початковою умовою $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$.

Множиною прообразів A_D називається множина $\mathrm{Pre}(A_D) = \big\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M | \ \exists\ n \in \mathbb{N} : F^n(\mathbf{u}) \in A_D\big\}$. Очевидно, що $\mathrm{Pre}(A_D) \subseteq B(A_D)$.

Означення 2. *Множина A_D називається сильно (асимптотично) нестійкою, якщо $B(A_D) = \mathrm{Pre}\,(A_D)$, тобто множина A_D притягує лише свої прообрази.*

Означення 3. *Множина A_D називається слабко стійкою (стійкою за Мілнором [12]), якщо її область притягування $B(A_D)$ має додатну міру Лебега в $\mathbb{R}^M$.*

Множина A_D називається слабко нестійкою (нестійкою за Мілнором) у протилежному випадку, тобто якщо $\mathrm{mes}\, B(A_D) = 0$.

2. Система відображень, що взаємодіють через зв'язок із центральним елементом. Розглянемо $(N+1)$-вимірну систему зв'язаних відображень вигляду

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (1-\varepsilon) f(x_i^t) + \varepsilon f(z^t), \quad i = 1, \ldots, N, \\ z^{t+1} &= (1-\varepsilon) f(z^t) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j^t), \end{aligned} \tag{2}$$

де $(x_1, \ldots, x_N, z) \in \mathbb{R}^{N+1}$, а $t = 0, 1, \ldots$ — дискретний час.

Система (2) складається з групи N ідентичних невзаємодіючих елементів x_i та центрального елемента z, що взаємодіє з кожним з елементів x_i з однаковою силою зв'язку. Сила цього зв'язку задається параметром ε.

Виберемо одновимірне відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у вигляді

$$f(x) = f_{l,p}(x) = \begin{cases} lx + 1 - l - \dfrac{l}{p}, & x \le 1 + \dfrac{1}{p}, \\ px - p, & x > 1 + \dfrac{1}{p}, \end{cases} \tag{3}$$

де $p < -1, 0 < l < \dfrac{p}{p+1}$. Такі кусково-лінійні відображення мають широке застосування у техніці, теорії електронних приладів та інженерії. Відомо [13, 14], що в залежності від значень параметрів l та p поведінка траєкторій відображення (3) може бути періодичною або хаотичною. При цьому слід зазначити, що в більшості випадків динаміка кусково-лінійних відображень суттєво відрізняється від динаміки гладких відображень [15].

Для подальшого розгляду корисними будуть наступні дві леми, доведені у роботі [16], з використанням результатів з [17].

Лема 1. *Для одновимірного відображення $f_{l,p}$, де $p < -1$ і $0 < l < \dfrac{p}{p+1}$, максимально можливий період циклу дорівнює*

$$k = k(l,p) = \left[2 - \frac{\ln\left(l + p(l-1)\right)}{\ln l} \right], \tag{4}$$

де $[\,\cdot\,]$ — ціла частина дійсного числа.

Лема 2. *Для одновимірного відображення $f_{l,p}$, де $p < -1$ і $0 < l < \dfrac{p}{p+1}$, найбільш нестійким серед усіх існуючих циклів (тобто циклом із найбільшим мультиплікатором) є:*

цикл максимального періоду k, якщо $l > |p|$;

нерухома точка відображення $f_{l,p}$, якщо $l < |p|$.
Відповідно, найбільш стійким серед усіх існуючих циклів (тобто циклом із найменшим мультиплікатором) є:

нерухома точка відображення $f_{l,p}$, якщо $l > |p|$;

цикл максимального періоду k, якщо $l < |p|$.

Якщо у системі (2) має місце стан повної синхронізації, то всі змінні x_i, $i = 1, \ldots, N$, та z з часом характеризуються однаковою поведінкою, тобто

$$x_1^t = \ldots = x_N^t = z^t, \quad t \to \infty.$$

Отже, у стані повної синхронізації динаміка системи (2) звужується на діагональ $D_{N+1} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N+1} | u_1 = \ldots = u_{N+1}\}$ розглядуваного $(N+1)$-вимірного фазового простору і визначається одновимірним відображенням $f_{l,p}(x)$.

Нехай $A_D \subset D_{N+1}$ — довільна підмножина діагоналі фазового простору, інваріантна під дією відображення, визначеного системою (2). Оскільки на цій множині реалізується динаміка системи у синхронізованому стані, будемо називати A_D синхронізуючою множиною.

Стійкість синхронізуючої множини очевидним чином залежить від значень трьох параметрів: параметрів l і p, які є кутовими коефіцієнтами лінійних частин одновимірного відображення $f = f_{l,p}$, та параметра зв'язку ε. Нижче, у даному пункті, отримано співвідношення між цими параметрами, які гарантують різні типи стійкості (нестійкості) синхронізуючої множини A_D.

Нехай $x := x_1 = \ldots = x_N = z$, тоді для довільної кількості N периферійних елементів у системі (2) її якобіан має три різних власних значення:

$$\nu_{\|} = f'(x), \quad \nu_{\perp,1} = (1-2\varepsilon)f'(x), \quad \nu_{\perp,2} = (1-\varepsilon)f'(x), \tag{5}$$

причому власне значення $\nu_{\perp,2}$ має кратність $N-1$. Власні значення $\nu_{\perp,1}$ та $\nu_{\perp,2}$ є трансверсальними, тому що відповідні їм власні вектори є ортогональними до синхронізуючого многовиду D_{N+1}. Зауважимо, що трансверсальні власні вектори, які відповідають власним значенням $\nu_{\perp,1}$ та $\nu_{\perp,2}$, не залежать від координат точок на діагоналі, тому необхідною і достатньою умовою сильної стійкості синхронізуючої множини на діагоналі D_{N+1} є стійкість всіх траєкторій, які належать цій множині, в трансверсальних до діагоналі напрямках.

Як показано в роботах [18, 19], синхронізуюча множина втрачає сильну стійкість через біфуркацію розрідження, коли найбільш нестійкий періодичний цикл одновимірного відображення втрачає стійкість у трансверсальному напрямку. Перехід до сильної нестійкості відбувається при втраті трансверсальної стійкості найбільш стійкого періодичного циклу одновимірного відображення [20].

З огляду на лему 2 зручно окремо розглянути два випадки для співвідношення параметрів одновимірного відображення $f_{l,p}$. При цьому слід зазначити, що з урахуванням нерівності $0 < l < \dfrac{p}{p+1}$ ситуація $l > |p|$ є можливою лише при $-2 < p < -1$.

Теорема 1. *Нехай індивідуальне одновимірне відображення у системі (2) має форму $f_{l,p}$, де $-2 < p < -1$ і $|p| < l < \dfrac{p}{p+1}$. Тоді:*

1) якщо $l^{k-1}|p| < 3^k$, то синхронізуюча множина A_D є сильно стійкою при

$$\varepsilon \in \left(1 - \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right);$$

2) якщо $l^{k-1}|p| > 3^k$, то синхронізуюча множина A_D не може бути сильно стійкою при жодному значенні параметра ε;

3) синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2|p|}\right) \bigcup \left(1 + \frac{1}{|p|}, +\infty\right).$$

Доведення. Оскільки $l > |p|$, то найбільш нестійким циклом одновимірного відображення $f_{l,p}$ є цикл $B_k = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ максимально можливого періоду k (див. леми 1 і 2). Даний цикл, що реалізується на діагоналі D_{N+1}, є стійким у всіх трансверсальних до діагоналі напрямках, якщо всі його трансверсальні мультиплікатори $\nu_{\perp,i}(B_k) = \nu_{\perp,i}(\beta_1) \ldots \ldots \nu_{\perp,i}(\beta_k)$, $i = 1, 2$, за модулем менші за одиницю. З цих умов отримуємо, що стан повної синхронізації у системі (2) є сильно стійким, якщо виконуються нерівності

$$|l^{k-1}p(1-\varepsilon)^k| < 1, \quad |l^{k-1}p(1-2\varepsilon)^k| < 1.$$

Ці нерівності визначають непорожню множину

$$\varepsilon \in \left(1 - \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right),$$

тільки якщо параметри l та p одновимірного відображення задовольняють нерівність

$$1 - \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k},$$

тобто $l^{k-1}|p| < 3^k$.

Якщо ж $l^{k-1}|p| > 3^k$, то для будь-якого значення параметра зв'язку ε принаймні один з трансверсальних мультиплікаторів за модулем більший за одиницю. Отже, в цьому випадку синхронізуюча множина A_D не є сильно стійкою.

Перехід до сильної нестійкості стану повної синхронізації відбувається при втраті трансверсальної стійкості найбільш стійкого циклу одновимірного відображення, що реалізується на діагоналі D_{N+1}. На підставі леми 2 при $l > |p|$ найбільш стійким циклом одновимірного відображення є його нерухома точка. Вона є нестійкою у трансверсальних напрямках, якщо виконуються нерівності

$$|p^k(1-\varepsilon)^k| > 1, \quad |p^k(1-2\varepsilon)^k| > 1.$$

З останніх умов отримуємо параметричну область сильної нестійкості повністю синхронізованого стану у системі (2):

$$\varepsilon \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2|p|}\right) \bigcup \left(1 + \frac{1}{|p|}, +\infty\right).$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай індивідуальне одновимірне відображення у системі (2) має форму $f_{l,p}$, де $p < -1$ і $0 < l < |p|$. Тоді:*

1) якщо $|p| < 3$, то синхронізуюча множина A_D є сильно стійкою при

$$\varepsilon \in \left(1 - \frac{1}{|p|},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2|p|}\right);$$

2) якщо $|p| > 3$, то синхронізуюча множина A_D не може бути сильно стійкою при жодному значенні параметра ε;

3) якщо $l^{k-1}|p| > 1$, то синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right) \bigcup \left(1 + \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}, +\infty\right);$$

4) якщо $l^{k-1}|p| \leq 1$, то синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty, 1 - \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right) \bigcup \left(1 + \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}, +\infty\right).$$

Доведення. Якщо параметри індивідуального одновимірного відображення $f_{l,p}$ задовольняють умову $l < |p|$, то найбільш нестійким циклом одновимірного відображення $f_{l,p}$ є його нерухома точка (див. лему 2). Вона є стійкою у трансверсальних до діагоналі D_{N+1} напрямках, якщо всі її трансверсальні мультиплікатори задовольняють умови

$$|p^k(1-\varepsilon)^k| < 1, \quad |p^k(1-2\varepsilon)^k| < 1.$$

Останні нерівності визначають непорожню параметричну множину

$$\varepsilon \in \left(1 - \frac{1}{|p|},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2|p|}\right),$$

тільки якщо $1 - \frac{1}{|p|} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2|p|}$, тобто $|p| < 3$.

Якщо $|p| > 3$, то для будь-якого значення параметра зв'язку ε модуль хоча б одного з трансверсальних мультиплікаторів перевищує одиницю. Отже, синхронізуюча множина A_D не може бути сильно стійкою.

На підставі лем 1 та 2 маємо, що при $l < |p|$ найбільш стійким циклом одновимірного відображення $f_{l,p}$ є його цикл максимально можливого періоду k. Цей цикл, що реалізується на діагоналі D_{N+1} фазового простору системи, є нестійким у трансверсальних напрямках, якщо виконуються нерівності

$$|l^{k-1}p(1-\varepsilon)^k| > 1, \quad |l^{k-1}p(1-2\varepsilon)^k| > 1.$$

Останні умови визначають область сильної нестійкості синхронізуючої множини A_D. А саме, якщо $l^{k-1}|p| > 1$, то синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right) \bigcup \left(1 + \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}, +\infty\right).$$

Якщо ж виконується нерівність $l^{k-1}|p| \le 1$, то синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty, 1 - \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right) \bigcup \left(1 + \left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}, +\infty\right).$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Якщо параметри одновимірного індивідуального відображення $f_{l,p}$ у системі (2) задовольняють умову $l = |p|$, то для визначення областей сильної стійкості та сильної нестійкості синхронізуючої множини A_D можна скористатись як теоремою 1, так і теоремою 2, які при $l = |p|$ дають еквівалентні результати.

Припустимо, що одновимірне відображення $f_{l,p}$ характеризується хаотичною поведінкою на інтервалі $[0, 1]$. Тоді за теоремою Ласоти та Йорка [21] для відображення $f_{l,p}$ існує єдина ймовірнісна інваріантна міра $\mu = \mu_{l,p}$, що визначає розподіл траєкторій відображення на множині значень аргументу. Нехай $m = \mu_{l,p}\left(\left\{x \in \left[1 + \dfrac{1}{p},\, 1\right]\right\}\right)$, тобто $m = \displaystyle\int_{1+\frac{1}{p}}^{1} \rho(x)dx$, де $\rho(x)$ — функція щільності ймовірнісної інваріантної міри $\mu_{l,p}$.

Теорема 3. *Нехай індивідуальне одновимірне відображення у системі (2) має форму $f_{l,p}$, де $p < -1$, $0 < l < \dfrac{p}{p+1}$. Тоді:*

1) якщо $l^{1-m}|p|^m < 3$, то синхронізуюча множина A_D є слабко стійкою при

$$\varepsilon \in \left(1 - \frac{1}{l^{1-m}|p|^m},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2l^{1-m}|p|^m}\right)$$

та слабко нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ 1 - \frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2l^{1-m}|p|^m},\ +\infty\right);$$

2) якщо $l^{1-m}|p|^m > 3$, то синхронізуюча множина A_D є слабко нестійкою для всіх значень параметра зв'язку ε.

Доведення. Нехай у системі (2) має місце стан повної синхронізації. Динаміка системи при цьому звужується на діагональ D_{N+1} фазового простору системи і керується одновимірним індивідуальним відображенням $f_{l,p}$. Визначимо трансверсальні показники Ляпунова [22, 23]

$$\lambda_{\perp,j} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \ln|\nu_{\perp,j}(x_i)|, \;\; j = 1, 2, \tag{6}$$

де $\nu_{\perp,j}$ — трансверсальні власні значення (див. формулу (5). Перехід від слабкої стійкості синхронізуючої множини до слабкої нестійкості відбувається, коли показник Ляпунова відображення, що визначає динаміку системи, стає позитивним.

Нехай $\{f^n_{l,p}(x)\}_{n=0,1,\ldots}$ — траєкторія одновимірного кусково-лінійного відображення $f_{l,p}$. Припустимо, що міра μ розподілу точок траєкторії на проміжку $[0, 1]$ нам відома. Оскільки m є мірою інтервалу $\left[1 + \frac{1}{p}, 1\right]$, то міра інтервалу $\left[0, 1 + \frac{1}{p}\right]$ дорівнює $1 - m$. Згідно з теоремою Біркгофа – Хінчина [24] границі (6) існують для майже всіх початкових умов, за винятком множини міри нуль, і визначаються таким чином:

$$\lambda_{\perp,1} = \int_0^1 \ln|f'_{l,p}(x)(1-\varepsilon)|d\mu(x) = \ln|(l(1-\varepsilon))^{1-m}(p(1-\varepsilon))^m|,$$

$$\lambda_{\perp,2} = \int_0^1 \ln|f'_{l,p}(x)(1-2\varepsilon)|d\mu(x) = \ln|(l(1-2\varepsilon))^{1-m}(p(1-2\varepsilon))^m|.$$

Синхронізуюча множина є слабко стійкою, якщо виконуються умови $\lambda_{\perp,1} < 0$, $\lambda_{\perp,2} < < 0$. Дві останні нерівності визначають непорожню параметричну множину

$$\varepsilon \in \left(1 - \frac{1}{l^{1-m}|p|^m},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2l^{1-m}|p|^m}\right),$$

тільки якщо виконується нерівність $1 - \frac{1}{l^{1-m}|p|^m} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2l^{1-m}|p|^m}$, тобто $l^{1-m}|p|^m < 3$. Областю слабкої нестійкості при цьому, відповідно, буде

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ 1 - \frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2l^{1-m}|p|^m},\ +\infty\right).$$

Якщо $l^{1-m}|p|^m > 3$, то для довільного значення параметра ε принаймні один трансверсальний показник Ляпунова є додатним, отже, синхронізуюча множина A_D є слабко нестійкою для всіх значень параметра ε.

3. Система відображень з центральним елементом та взаємодією між периферійними елементами. Розглянемо тепер систему зв'язаних відображень з центральним елементом, у якій периферійні елементи також взаємодіють. Нехай ця система має вигляд

$$x_i^{t+1} = (1-\varepsilon)f(x_i^t) + \frac{\varepsilon}{N+1}\left(\sum_{j=1}^{N} f(x_j^t) + f(z^t)\right),$$

$$y_i^{t+1} = (1-\varepsilon)f(y_i^t) + \frac{\varepsilon}{N+1}\left(\sum_{j=1}^{N} f(y_j^t) + f(z^t)\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

$$z^{t+1} = (1-\varepsilon)f(z^t) + \frac{\varepsilon}{2N}\sum_{j=1}^{N}(f(x_j^t) + f(y_j^t)),$$

де $\{x_i\}_{i=1}^N$ та $\{y_i\}_{i=1}^N$ — дві однакові групи з N глобально зв'язаних елементів кожна. Центральний елемент z взаємодіє з кожним із $2N$ периферійних елементів. Сила взаємодії між елементами системи визначається параметром ε. Як і для попередньої системи, індивідуальне одновимірне відображення виберемо у формі (3).

Зауважимо, що структура зв'язків системи (7) є модельною при дослідженні динаміки нейронів головного мозку [25–27].

Нехай у системі (7) має місце стан повної синхронізації:

$$x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots = y_N = z.$$

Тоді динаміка $(2N+1)$-вимірної системи (7) звужується на головну діагональ D_{2N+1} фазового простору системи.

Позначимо $x := x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots = y_N = z$, тоді якобіан системи (7) має чотири різних власних значення:

$$\nu_{\|} = f'(x), \quad \nu_{\perp,1} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{N+1}\right) f'(x),$$

$$\nu_{\perp,2} = \left(1 - \frac{(N+2)\varepsilon}{N+1}\right) f'(x), \quad \nu_{\perp,3} = (1-\varepsilon)\, f'(x),$$

причому $\nu_{\perp,3}$ має кратність $2N-2$. Власні значення $\nu_{\perp,i},\ i = 1,2,3$, є трансверсальними, оскільки відповідні їм власні вектори є ортогональними до синхронізуючого многовиду — діагоналі D_{2N+1}.

Знайдемо параметричні області сильної та слабкої стійкості (нестійкості) синхронізуючої множини $A_D \subset D_{2N+1}$. Як і в попередньому пункті, виходячи з леми 2, розглянемо окремо два випадки для співвідношення параметрів одновимірного відображення $f_{l,p}$.

Теорема 4. *Нехай індивідуальне одновимірне відображення у системі (7) має форму* $f_{l,p}$, *де* $-2 < p < -1$ *і* $|p| < l < \dfrac{p}{p+1}$. *Тоді:*

1) якщо $l^{k-1}|p| < \left(\dfrac{N+3}{N+1}\right)^k$*, то синхронізуюча множина* A_D *є сильно стійкою при*

$$\varepsilon \in \left((N+1)\left(1-\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right), \quad \frac{N+1}{N+2}\left(1+\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right)\right);$$

2) якщо $l^{k-1}|p| > \left(\dfrac{N+3}{N+1}\right)^k$*, то синхронізуюча множина* A_D *не може бути сильно стійкою при жодному значенні параметра* ε*;*

3) синхронізуюча множина A_D *є сильно нестійкою при*

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ \frac{N+1}{N+2}\Big(1-\frac{1}{|p|}\Big)\right)\bigcup\left((N+1)\Big(1+\frac{1}{|p|}\Big), +\infty\right).$$

Доведення. Якщо параметри одновимірного індивідуального відображення задовольняють умову $l > |p|$, то згідно з лемами 1 та 2 найбільш нестійким циклом одновимірного відображення є цикл максимально можливого існуючого періоду k. Даний цикл одновимірного відображення, що реалізується на діагоналі D_{2N+1}, є стійким у трансверсальних до діагоналі напрямках, якщо всі його трансверсальні мультиплікатори задовольняють умови

$$|l^{k-1}p(1-\varepsilon)^k| < 1, \quad \left|l^{k-1}p\left(1-\frac{\varepsilon}{N+1}\right)^k\right| < 1, \quad \left|l^{k-1}p\left(1-\frac{(N+2)\varepsilon}{N+1}\right)^k\right| < 1.$$

Ці нерівності визначають непорожню параметричну множину

$$\varepsilon \in \left((N+1)\left(1-\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right), \quad \frac{N+1}{N+2}\left(1+\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right)\right),$$

якщо виконується умова $l^{k-1}|p| < \left(\dfrac{N+3}{N+1}\right)^k$.

Якщо ж $l^{k-1}|p| > \left(\dfrac{N+3}{N+1}\right)^k$, то для довільного значення ε модуль принаймні одного з трансверсальних мультиплікаторів більший за одиницю, тому при жодному значенні параметра ε синхронізуюча множина A_D не може бути сильно стійкою.

З леми 2 маємо, що при $l > |p|$ найбільш стійким циклом одновимірного відображення $f_{l,p}$ є його нерухома точка. Вона є трансверсально нестійкою, якщо всі її трансверсальні мультиплікатори за модулем більші за одиницю. З таких умов отримуємо параметричну область сильної нестійкості синхронізуючої множини A_D:

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ \frac{N+1}{N+2}\left(1-\frac{1}{|p|}\right)\right)\bigcup\left((N+1)\left(1+\frac{1}{|p|}\right), +\infty\right).$$

Теорему 4 доведено.

Наслідок 1. *Нехай параметри l та p одновимірного відображення $f_{l,p}$ зафіксовано так, що $-2 < p < -1$, $|p| < l < \dfrac{p}{p+1}$. Тоді існує критичне значення розмірності системи (7):*

$$N_{\mathrm{cr}}^1 = \frac{3-(l^{k-1}|p|)^{1/k}}{(l^{k-1}|p|)^{1/k}-1}.$$

А саме, якщо у системі (7) $N < N_{\mathrm{cr}}^1$, то існує непорожня параметрична область сильної стійкості стану повної синхронізації. Якщо ж $N > N_{\mathrm{cr}}^1$, то стан повної синхронізації у системі (7) не може бути сильно стійким.

Теорема 5. *Нехай індивідуальне одновимірне відображення у системі (7) має форму $f_{l,p}$, де $p < -1$ і $l < |p|$. Тоді:*

1) якщо $|p| < \dfrac{N+3}{N+1}$, то синхронізуюча множина A_D є сильно стійкою при

$$\varepsilon \in \left((N+1)\Big(1-\frac{1}{|p|}\Big), \frac{N+1}{N+2}\Big(1+\frac{1}{|p|}\Big)\right);$$

2) якщо $|p| > \dfrac{N+3}{N+1}$, то синхронізуюча множина A_D не може бути сильно стійкою при жодному значенні параметра ε;

3) якщо $l^{k-1}|p| > 1$, то синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty, \frac{N+1}{N+2}\left(1-\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right)\right) \bigcup \left((N+1)\left(1+\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right),\ +\infty\right);$$

4) якщо $l^{k-1}|p| \le 1$, то синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ (N+1)\left(1-\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right)\right) \bigcup \left((N+1)\left(1+\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right),\ +\infty\right).$$

Доведення проведемо аналогічно доведенню теореми 2. З умови, що всі трансверсальні мультиплікатори найбільш нестійкого циклу одновимірного відображення за модулем менші за одиницю, отримуємо область сильної стійкості синхронізуючої множини A_D:

$$\varepsilon \in \left((N+1)\left(1-\frac{1}{|p|}\right), \frac{N+1}{N+2}\left(1+\frac{1}{|p|}\right)\right).$$

Отримана область є непорожньою, лише якщо $|p| < \dfrac{N+3}{N+1}$.

Якщо ж $|p| > \dfrac{N+3}{N+1}$, то для довільного значення параметра ε принаймні один з трансверсальних мультиплікаторів за модулем більший за одиницю, і тому для жодного значення ε синхронізуюча множина не може бути сильно стійкою.

Область сильної нестійкості синхронізуючої множини A_D при $l < |p|$ визначається, як і в попередніх випадках. Якщо $l^{k-1}|p| > 1$, то синхронізуюча множина A_D є сильно нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ \frac{N+1}{N+2}\left(1-\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right)\right)\bigcup\left((N+1)\left(1+\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right),\ +\infty\right).$$

Якщо ж $l^{k-1}|p| \le 1$, то областю сильної нестійкості є

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ (N+1)\left(1-\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right)\right)\bigcup\left((N+1)\left(1+\left(\frac{1}{l^{k-1}|p|}\right)^{1/k}\right),\ +\infty\right).$$

Теорему 5 доведено.

Наслідок 2. *Нехай параметри l та p одновимірного відображення $f_{l,p}$ зафіксовано так, що $p < -1$, $l < |p|$. Тоді існує критичне значення розмірності системи (7):*

$$N_{\text{cr}}^2 = \frac{3-|p|}{|p|-1}.$$

А саме, якщо у системі (7) $N < N_{\text{cr}}^2$, то існує непорожня параметрична область сильної стійкості стану повної синхронізації. Якщо ж $N > N_{\text{cr}}^2$, то стан повної синхронізації у системі (7) не може бути сильно стійким.

Зауваження 2. Якщо параметри одновимірного індивідуального відображення $f_{l,p}$ у системі (7) задовольняють умову $l = |p|$, то для визначення областей сильної стійкості та сильної нестійкості синхронізуючої множини A_D можна скористатись як теоремою 4, так і теоремою 5, які при $l = |p|$ дають еквівалентні результати.

Теорема 6. *Нехай індивідуальне одновимірне відображення у системі (7) має форму $f_{l,p}$, де $p < -1$, $0 < l < \dfrac{p}{p+1}$. Тоді:*

1) якщо $l^{1-m}|p|^m < \dfrac{N+3}{N+1}$, то синхронізуюча множина A_D є слабко стійкою при

$$\varepsilon \in \left((N+1)\left(1-\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right),\ \frac{N+1}{N+2}\left(1+\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right)\right),$$

та слабко нестійкою при

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ (N+1)\left(1-\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right)\right)\bigcup\left(\frac{N+1}{N+2}\left(1+\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right),\ +\infty\right),$$

де m — міра інтервалу $\left[1+\dfrac{1}{p}, 1\right]$, визначена у попередньому пункті;

2) якщо $l^{1-m}|p|^m > \dfrac{N+3}{N+1}$, то синхронізуюча множина A_D є слабко нестійкою для всіх значень параметра зв'язку ε.

Доведення є аналогічним доведенню теореми 3 з урахуванням того, що в даному випадку маємо три різних трансверсальних показники Ляпунова:

$$\lambda_{\perp,1} = \ln\left|\left(l\left(1-\frac{\varepsilon}{N+1}\right)\right)^{1-m}\left(p\left(1-\frac{\varepsilon}{N+1}\right)\right)^{m}\right|,$$

$$\lambda_{\perp,2} = \ln\left|\left(l\left(1-\frac{N+2}{N+1}\varepsilon\right)\right)^{1-m}\left(p\left(1-\frac{N+2}{N+1}\varepsilon\right)\right)^{m}\right|,$$

$$\lambda_{\perp,3} = \ln|(l(1-\varepsilon))^{1-m}(p(1-\varepsilon))^m|.$$

З умови, що всі трансверсальні показники Ляпунова від'ємні, отримуємо параметричну область слабкої стійкості синхронізуючої множини A_D:

$$\varepsilon \in \left((N+1)\left(1-\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right),\ \frac{N+1}{N+2}\left(1+\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right)\right).$$

Отримана область буде непорожньою, якщо виконується умова $l^{1-m}|p|^m < \dfrac{N+3}{N+1}$.

Параметричною областю слабкої нестійкості у цьому випадку, відповідно, буде

$$\varepsilon \in \left(-\infty,\ (N+1)\left(1-\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right)\right)\bigcup\left(\frac{N+1}{N+2}\left(1+\frac{1}{l^{1-m}|p|^m}\right),\ +\infty\right).$$

Якщо виконується умова $l^{1-m}|p|^m > \dfrac{N+3}{N+1}$, то для будь-якого значення параметра ε принаймні один із трансверсальних показників Ляпунова буде додатним, тобто синхронізуюча множина A_D є слабко нестійкою при всіх значеннях параметра ε.

Теорему 6 доведено.

Наслідок 3. *Нехай параметри l та p одновимірного відображення $f_{l,p}$ зафіксовано так, що $p < -1$, $0 < l < \dfrac{p}{p+1}$, і m — міра інтервалу $\left[1+\dfrac{1}{p}, 1\right]$. Тоді існує критичне значення розмірності системи (7):*

$$N_{\mathrm{cr}}^3 = \frac{3-l^{1-m}|p|^m}{l^{1-m}|p|^m-1}.$$

А саме, якщо у системі (7) $N < N_{\mathrm{cr}}^3$, то існує непорожня параметрична область слабкої стійкості стану повної синхронізації. Якщо ж $N > N_{\mathrm{cr}}^3$, то стан повної синхронізації у системі (7) слабко нестійкий для довільного значення параметра зв'язку ε.

Відзначимо основну відмінність між результатами, отриманими для систем (2) та (7). Вона полягає в тому, що межі областей стійкості та нестійкості повністю синхронізованого стану у випадку системи (2) залежать лише від значень параметрів l та p індивідуального одновимірного відображення $f_{l,p}$, а у випадку системи (7) є також залежність від розмірності системи.

Наведемо деякі приклади. Припустимо, що у системі (7) для параметрів одновимірного відображення $f_{l,p}$ вибрано значення: $p = -1,1$, $l = 2$. Тоді сильно стійкий повністю синхронізований стан у системі є можливим, лише якщо кількість відображень у кожній глобально зв'язаній групі $N < 3$. Якщо параметри одновимірного відображення такі: $p = -1,2, l = 1,5$, то реалізація сильно стійкого повністю синхронізованого стану є можливою для $N < 4$. У випадку $l < |p|$, якщо значення параметра p прямує до -1, сильно стійкий синхронізований стан у системі (7) може бути реалізований для довільно великих розмірностей системи.

4. Висновки. У даній роботі запропоновано два нових структурних типи систем взаємодіючих відображень, яким властива наявність так званого центрального елемента, що взаємодіє безпосередньо з усіма іншими елементами у системі. Показано, що запропонована структура зв'язків дозволяє існування стану повної синхронізації. Досліджено стійкість такого стану. У системі (2) межі областей стійкості не залежать від кількості периферійних елементів, тобто встановлення у системі стійкого синхронізованого стану можливе для як завгодно великої кількості однотипних елементів, які взаємодіють лише через зв'язки з центральним елементом.

У системі (7) області стійкості повністю синхронізованого стану залежать від числа відображень і звужуються при збільшенні розміру системи. Залежно від значень параметрів індивідуального одновимірного відображення існують критичні значення розмірності системи, при перевищенні яких стійкий синхронізований стан не може бути реалізований у системі. Таким чином, більша кількість зв'язків у системі (7), порівняно з системою (2), не приводить до збільшення розміру областей стійкості синхронізованого стану.

Завдяки тому, що індивідуальне відображення вибрано у формі кусково-лінійного (3), межі областей стійкості у просторі параметрів знайдено аналітично. У загальному випадку для гладких одновимірних відображень межі областей стійкості можна знайти лише шляхом використання числових методів.

1. *Wiesenfeld K., Colet P., and Strogatz S. H.* Synchronization transition in a disordered Josephson series array // Phys. Rev. Lett. — 1999. — **76**. — P. 404 – 407.
2. *Kaneko K.* Relevance of dynamic clustering to biological networks // Physica D. — 1994. — **75**. — P. 55 – 73.
3. *Winfree A. T.* Biological rythms and the behavior of population of coupled oscillators// J. Theor. Biol. – 1967. — **16**. — P. 15 – 42.
4. *Tass P. A.* Effective desynchronization with a stimulation technique based on soft phase resetting // Europhys. Lett. — 2002. — **57**, № 2. — P. 164 – 170.
5. *Strogatz S. H.* Exploring complex networks // Nature. — 2001. — **410**. — P. 268 – 276.
6. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator system // Prog. Theor. Phys. — 1983. — **69**. — P. 32 – 46.
7. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements // Physica D. — 1990. — **41**. — P. 137 – 172.
8. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., and Kurths J.* Phase synchronization of chaotic rotators // Phys. Rev. Lett. — 2002. — **88**. — P. 1 – 4.
9. *Popovych O., Maistrenko Yu., and Mosekilde E.* Loss of coherence in a system of globally coupled maps // Phys. Rev. E. — 2001. — **64**. — P. 1 – 11.
10. *Belykh V. N., Belykh I. V., and Hasler M.* Connection grapf stability method for synchronized coupled chaotic systems // Physica D. — 2004. — **195**. — P. 159 – 187.
11. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of "small-world" networks // Nature. — 1998. – **393**. — P. 440 – 442.

12. *Milnor J.* On the concept of attractor // Communs Math. Phys. — 1985. — **99**. — P. 177 – 195.
13. *Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., and Popovych S. I.* On "unimodal-bimodal" bifurcation in a family of piecewise linear maps // Nonlinear Oscillations. — 1998. — **2**, № 1. — P. 29 – 38.
14. *Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., and Vikul S. I.* On period-adding sequences of attracting cycles in piecewise linear maps // Chaos. — 1998. — **9**. — P. 67 – 75.
15. *Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., and Vikul S. I.* Bifurcations of attracting cycles of piecewise linear interval maps // J. Techn. Phys. — 1996. — **37**. — P. 367 – 370.
16. *Matskiv I. V.* Stability of synchronized and clustered states in coupled piecewise linear maps // Nonlinear Oscillations. — 2004. — **7**, № 2. — P. 217 – 228.
17. *Майстренко В. Л., Майстренко Ю. Л., Сушко И. М.* Аттракторы кусочно-линейных отображений прямой и плоскости. — Киев, 1992. — 52 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики).
18. *Ott E., Sommerer J. C.* Blowout bifurcations: the occurence of riddled basins and on-off intermittency // Phys. Lett. A. — 1994. — **188**. — P. 39 – 47.
19. *Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Popovich A., and Mosekilde E.* Transverse instability and riddled basins on a system of two coupled logistic maps // Phys. Rev. E. — 1998. — **57**. — P. 2713 – 2724.
20. *Hunt D. R., Ott E.* Optimal periodic orbits of chaotic systems // Phys. Rev. Lett. — 1996. — **76**. — P. 2254 – 2257.
21. *Lasota A., Yorke J.* On the existence of invariant measure for piecewise monotonic transformations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — **182**. — P. 481 – 488.
22. *Oseledec V. I.* A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems // Trans. Moscow Math. Soc. — 1968. — **19**. — P. 197 – 221.
23. *Wolf A.* Quantifying chaos with Lyapunov exponents // Chaos / Ed. A.V. Holden. — Manchester: Manchester Univ. Press, 1986. — P. 273 – 290.
24. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
25. *Kazanovich Y. B., Borisyuk R. M.* Object selection by an oscillatory neural network // BioSystems. — 2002. — **67**. — P. 103 – 111.
26. *Kazanovich Y. B., Borisyuk R. M.* Dynamics of neural networks with a central element // Neural Networks. — 1999. — **12**. — P. 441 – 454.
27. *Borisyuk R. M., Kazanovich Y. B.* Oscillatory neural network model of attention focus formation and control // BioSystems. — 2003. — **71**. — P. 29 – 38.

Одержано 01.02.2005