УДК 512.647.2+512.562

О ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФОРМАХ ТИТСА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В. М. Бондаренко

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

Д. С. Чеботарев

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 01107, Киев 127, пр.акад. Глушкова, 6

In this paper we study infinite partially ordered sets with involution having a positive Tits form.

Вивчаються нескінченні частково впорядковані множини з інволюцією, що мають позитивно визначену форму Тітса.

Впервые квадратичная форма Титса была введена П. Габриелем [1] для представлений колчанов (ориентированных графов). Эта форма оказалась важной потому, что (как доказано в той же работе) колчан имеет конечное, с точностью до изоморфизма, число неразложимых представлений тогда и только тогда, когда его форма Титса положительно определена (такие колчаны называются колчанами конечного типа). Этот результат П. Габриеля послужил началом новой теории, которая изучает связь между свойствами представлений различных объектов и свойствами квадратичных форм. Для различных классификационных задач было получено много интересных результатов в этом направлении (см., в частности, сборники научных работ [2, 3] и монографии [4, 5] (а также приведенную в них библиографию)). Отметим, что квадратичная форма Титса определена в общей ситуации для задач без соотношений в работах [6, 7] и для колчанов с соотношениями в работе [8].

Вторым (после представлений колчанов) важным классом матричных задач без соотношений являются представления частично упорядоченных множеств, введенные в [9]. Частично упорядоченные множества конечного типа описаны (на языке самих множеств) М. М. Клейнером [10], а Ю. А. Дрозд ввел в этом случае форму Титса и показал, что частично упорядоченное множество имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его форма Титса слабо положительна [11]. Положительно определенные формы при этом не имеют особого значения. Но при более глубоком изучении категорий представлений частично упорядоченных множеств положительно определенные формы Титса играют существенную роль (см. [12]). Заметим, что в работе [12] используется описание положительно определенных форм Титса для бесконечных частично упорядоченных множеств без минимальных и максимальных элементов (такие множества мы называем неограниченными). Рассмотрение бесконечных множеств интересно само по себе, но основной мотивацией их рассмотрения является тот факт, что многие общие свойства проявляются только для достаточно больших конечных частично упорядоченных множеств (более точно, для множеств, порядок которых больше некоторого числа N); и если интересоваться именно такими свойствами конечных множеств, то естественно в первую очередь рассматривать соответствующую задачу в бесконечном случае.

В настоящей статье изучаются неограниченные частично упорядоченные множества с инволюцией, имеющие положительно определенную форму Титса. В первом пункте мы формулируем один из результатов, который, по мнению автора, может быть полезным при решении различных задач в тех областях математики, которые используют современную теорию квадратичных форм. Остальные результаты формулируются в последующих пунктах; там же доказываются все результаты.

1. Положительные и сильно положительные формы Титса, связь между ними. Пусть $S = (A, *)$ — конечное или бесконечное частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество A с инволюцией $*$ и $\sim_*$ — отношение эквивалентности на A, индуцированное инволюцией $*$ (т. е. $j \sim_* i$ при $i \neq j$ тогда и только тогда, когда $j^* = i$). Множество классов эквивалентности относительно $\sim_*$ будем обозначать через A_*. Символом i_*, где $i \in A$, будем обозначать класс эквивалентности, содержащий i; если $i^* = i$, то i_* естественно отождествлять с i. Рассмотрим в декартовом произведении $\mathbb{Z}^{A\cup 0}$, где $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел, подмножество $\mathbb{Z}_0^{A\cup 0}$, состоящее из всех векторов $z = (z_i)$ с конечным числом ненулевых координат, а также целочисленную квадратичную форму $q'_S : \mathbb{Z}^{A\cup 0} \to \mathbb{Z}$, задаваемую равенством

$$q'_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in A} \varepsilon_i z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in A} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in A} z_i,$$

где $\varepsilon_i = 1$, если $i^* = i$, и $\varepsilon_i = \dfrac{1}{2}$, если $i^* \neq i$ (если все ε_i равны 1, то эта форма называется формой Титса ч. у. множества A). *Формой Титса ч. у. множества с инволюцией* $S = (A, *)$ называется квадратичная форма, которая получается из формы q'_S отождествлением z_{i^*} с z_i для всех $i \in A$ таких, что $i^* \neq i$. Более того, это квадратичная форма

$$q = q_S(x) : \mathbb{Z}_0^{A_*\cup 0} \to \mathbb{Z},$$

получающаяся из $q'_S(z)$ заменой z_i и z_{i^*} на x_{i_*} для любого $i \in A$ (форма Титса для широкого класса задач — так называемых представлений боксов — определена в [6,7]; предлагаемая здесь интерпретация формы Титса для ч. у. множеств с инволюцией принадлежит первому из авторов).

Являющуюся положительно определенной форму $q_S = q_S(x)$ будем называть в дальнейшем просто *положительной* (это означает, что $q_S(y) > 0$ для любого ненулевого $y \in \mathbb{Z}_0^{A_*\cup 0}$); в этом случае пишем $q_S > 0$ или $q_S(x) > 0$.

Пусть $S = (A, *)$ — ч. у. множество с инволюцией. На каждом подмножестве $B \subset A$ действует следующая инволюция $\circ = *_B$, индуцируемая инволюцией $* : i^\circ = j$, если $i^* = j$ и $j \in B$; в противном случае $i^\circ = i$. Подмножество B будем называть *замкнутым*, если оно замкнуто относительно действия $*$, т. е. $i^* \in B$ всякий раз, когда $i \in B$ (в этом случае будем писать $*$ вместо $*_B$). Ч. у. множество с инволюцией вида $T = (B, \circ) = (B, *_B)$, где $B \subseteq A$, будем называть подмножеством $S = (A, *)$ и писать $T \subseteq S$. Будем называть его *замкнутым*, если таковым является B. Положительную форму Титса

q_S назовем *сильно положительной*, если форма Титса q_T положительна для любого подмножества $T \subset S$ (для замкнутого T это, очевидно, выполняется всегда).

В настоящей статье доказана, в частности, следующая теорема, которая может найти применения в областях математики, использующих современную теорию квадратичных форм.

Теорема 1. *Пусть $S = (A, *)$ — неограниченное ч. у. множество с инволюцией и $I(S)$ — множество всех элементов $a \in A$ таких, что $a^* \neq a$. Если $I(S)$ конечно, то форма Титса $q_S(x)$ сильно положительна тогда и только тогда, когда она положительна.*

Остальные теоремы, которые описывают строение неограниченных ч. у. множеств с инволюцией $S = (A, *)$, имеющих положительную и сильно положительную формы Титса, формулируются в третьем и четвертом пунктах (там же приводятся все доказательства). При этом в случае сильно положительных форм мы не накладываем на (неограниченные) множества никаких дополнительных условий, а в случае положительных форм предполагаем, что $I(S)$ конечно. Это связано с тем, что понятие сильной положительности более естественно, чем понятие положительности, и поэтому положительные формы мы изучаем в той степени, в какой это нужно для сильно положительных форм.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $S = (A, *)$ — ч. у. множество с инволюцией; элементы множества A будем называть также точками. Точку $i \in A$ будем называть малой (соответственно большой), если $i^* = i$ (соответственно $i^* \neq i$). Для элемента $i \in A$ положим $C(i) = \{j \in A \mid j < i\} \cup \{j \in A \mid j > i\},\ N(i) = A \backslash (C(i) \cup \{i\})$.

Задавая не совпадающий с естественным (а точнее — являющийся более слабым, чем он) частичный порядок на некотором подмножестве в $\mathbb{Z}$, будем использовать знак $\prec$; при этом сам порядок определяется с точностью до транзитивности.

Лемма 1. *Если $q_S(x) > 0$, то точки i и i^* (множества A) всегда сравнимы.*

Действительно, в противном случае $q_S(x) = 0$ при $x_0 = 1$, $x_{i_*} = 1$ и $x_p = 0$ для любого $p \neq i_*$ из A_*.

Лемма 2. *Пусть $q_S(x) > 0$ и $i \in A$ — большая точка. Тогда $C(i) \cap C(i^*)$ не содержит:*

a) двух несравнимых между собой малых точек;

b) двух больших, связанных между собой инволюцией, точек.

Действительно, если подмножество $C(i) \cap C(i^*)$ (для сравнимых, в силу леммы 1, точек i и i^*) содержит две несравнимые между собой малые точки j и k (соответственно большие точки j и j^*), то $q_S(x) = 0$ при $x_0 = 0,\ x_{i_*} = -1,\ x_j = x_k = 1$ и $x_p = 0$ для любого $p \neq i_*, j, k$ (соответственно $x_0 = 0,\ x_{i_*} = -1,\ x_{j_*} = 1$ и $x_p = 0$ для любого $p \neq i_*, j_*$).

Лемма 3. *Пусть $q_S(x) > 0$ и $i \in A$ — большая точка. Тогда $N(i) \cap N(i^*)$ не содержит:*

c) двух несравнимых между собой малых точек;

d) двух больших, связанных между собой инволюцией, точек.

Действительно, если подмножество $N(i) \cap N(i^*)$ (для сравнимых, в силу леммы 1, точек i и i^*) содержит две несравнимые между собой малые точки j и k (соответственно большие точки j и j^*), то $q_S(x) = 0$ при $x_0 = 2$, $x_{i_*} = 1$, $x_j = x_k = 1$ и $x_p = 0$ для любого $p \neq i_*, j, k$ (соответственно $x_0 = 2,\ x_{i_*} = 1,\ x_{j_*} = 1$ и $x_p = 0$ для любого $p \neq i_*, j_*$).

Лемма 4. *Пусть $q_S(x) > 0$ и $i \in A$ — большая точка. Тогда малые точки подмножеств $C(i) \cap C(i^*)$ и $N(i) \cap N(i^*)$ попарно несравнимы.*

Действительно, если (для сравнимых, в силу леммы 1, точек i и i^*) существуют сравнимые между собой точки $j \in C(i) \cap C(i^*)$ и $k \in N(i) \cap N(i^*)$, то $q_S(x) = 0$ при $x_0 = 1$, $x_{i_*} = 1$, $x_j = -1$, $x_k = 1$ и $x_p = 0$ для остальных $p \in A_*$.

Лемма 5. *Пусть $q_S(x) > 0$ и $i, j \in A$ — большие точки, такие, что $j \in N(i) \cap N(i^*)$ и $j^* \in N(i) \cup N(i^*)$. Тогда пересечение подмножеств $C(i)$, $C(i^*)$, $C(j)$ и $C(j^*)$ не содержит малых точек.*

Доказательство. Предположим противное и зафиксируем в пересечении подмножеств $C(i)$, $C(i^*)$, $C(j)$ и $C(j^*)$ малую точку k. В силу леммы 1 можно считать, что i (соответственно j) сравнима с i^* (соответственно j^*), а в силу леммы 3, случай d), — что $j^* \notin N(i) \cap N(i^*)$. Тогда (замкнутое) подмножество, состоящее из точек i, i^*, j и j^*, изоморфно ч. у. множеству с инволюцией $R = \{1, 2, 3, 4 \mid 1 \prec 2, 3 \prec 4, 1 \prec 4, 1^* = 2, 3^* = 4\}$, и теперь легко указать вектор $x = (x_n)$, $n \in A_*$, на котором форма $q_S(x)$ принимает нулевое значение: $q_S(x) = 0$ при $x_0 = 1$, $x_{i_*} = 1$, $x_{j_*} = 1$, $x_k = -1$ и $x_p = 0$ для остальных $p \in A_*$. Пришли к противоречию.

Лемма 6. *Пусть $q_S(x) > 0$ и $i, j \in A$ — большие точки, такие, что $j, j^* \in N(i) \cup N(i^*)$. Тогда пересечение подмножеств $C(i)$, $C(i^*)$, $C(j)$ и $C(j^*)$ содержит не более одной малой точки.*

Доказательство. Предположим противное и зафиксируем в пересечении подмножеств $C(i)$, $C(i^*)$, $C(j)$ и $C(j^*)$ малые точки k и s. В силу леммы 1 можно считать, что i (соответственно j) сравнима с i^* (соответственно j^*), а в силу леммы 2, случай a), — что k сравнима с s. Легко видеть, что (замкнутое) подмножество, состоящее из точек i, i^*, j и j^*, изоморфно одному из следующих ч. у. множеств с инволюцией: $R_1 = \{1, 2, 3, 4 \mid 1 \prec 3, 2 \prec 4, 1 \prec 4, 2 \prec 3, 1^* = 3, 2^* = 4\}$, $R_2 = \{1, 2, 3, 4 \mid 1 \prec 3 \prec 4, 2 \prec 4, 1^* = 3, 2^* = 4\}$, $R_3 = R_2^{\mathrm{op}}$. И теперь легко указать вектор, на котором форма $q_S(x)$ принимает нулевое значение: $q_S(x) = 0$ при $x_0 = 1$, $x_{i_*} = 1$, $x_{j_*} = 1$, $x_k = -1$, $x_s = -1$ и $x_p = 0$ для остальных $p \in A_*$. Пришли к противоречию.

Лемма 7. *Форма Титса не является положительной для следующих ч. у. множеств с инволюцией:*

$$T_1 = \{1, 2, \ldots, 9 \mid 2 \prec 3 \prec 4 \prec \ldots \prec 9, 1 \prec 3, 2^* = 3\},$$

$$T_2 = \{1, 2, \ldots, 10 \mid 2 \prec 3 \prec 4 \prec \ldots \prec 10, 1 \prec 3, 1^* = 4, 2^* = 3\},$$

$$T_3 = \{1, 2, \ldots, 10 \mid 1 \prec 2 \prec 4 \prec \ldots \prec 10, 1 \prec 3 \prec 4, 1^* = 2, 3^* = 4\}.$$

.

Действительно, $q_{T_1}(x) = 0$ при $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{2_*} = 3$, $x_4 = x_5 = \ldots = x_9 = -1$; $q_{T_2}(x) = 0$ и $q_{T_3}(x) = 0$ при $x_0 = 1$, $x_{1_*} = 2$, $x_{3_*} = 2$, $x_5 = x_6 = \ldots = x_{10} = -1$.

Напомним, что двойственным к $T = (B, *)$ ч. у. множеством с инволюцией называется множество $T^{\mathrm{op}} = (B^{\mathrm{op}}, *)$, где B^{op} совпадает с B как обычное множество и при этом $x < y$ (соответственно $x^* = y$) в B^{op} тогда и только тогда, когда $x > y$ (соответственно $x^* = y$) в B. Очевидно, что имеет место лемма, двойственная к лемме 7 (т. е. такая, в условии которой вместо T_i рассматриваются двойственные к ним ч. у. множества T_i^{op}); это следует из того, что при переходе к двойственному ч. у. множеству форма Титса не изменяется.

3. Строение ч. у. множеств с инволюцией, имеющих положительную форму Титса. В этом пункте изучается строение неограниченных ч. у. множеств с инволюцией $S = (A, *)$, имеющих положительную форму Титса и таких, что подмножество $I(S)$ является конечным (относительно последнего условия см. конец введения). В частности, будет доказана теорема 1.

Как обычно, отождествляем ч. у. множества $S = (A, *)$ с тривиальной инволюцией $*$ (когда $x^* = x$ для любого $x \in A$) с самими ч. у. множествами A.

Под прямой суммой ч. у. множеств понимаем их объединение (без пересечений) с частичным порядком, который индуцируется заданными порядками; аналогично определяется прямая сумма ч. у. множеств с инволюцией. Любое линейно упорядоченное множество называем цепным, а ч. у. множество с единственной парой несравнимых элементов — почти цепным. Заметим, что в дальнейшем (в частности, при формулировке теорем 2 – 4) допускаются и пустые цепные множества.

Напомним, что неограниченные ч. у. множества A (без инволюции) с положительной формой Титса описываются следующей теоремой [13] (см. также [14]).

Теорема 2. *Пусть A — неограниченное ч. у. множество (без инволюции). Тогда форма Титса $q_A(z)$ положительна в том и только в том случае, когда A является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного подмножеств.*

Перейдем теперь к задаче об описании неограниченных ч. у. множеств с нетривиальной инволюцией $S = (A, *)$, имеющих положительную форму Титса и таких, что подмножество $I(S) = \{a \in A \mid a^* \neq a\}$ конечно.

Предложение 1. *Если $|I(S)| = 2$, то форма Титса $q_S(x)$ положительна тогда и только тогда, когда A является прямой суммой двух цепных подмножеств, одно из которых содержит $I(S)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $I(S) = \{a, a^*\}$. В силу леммы 1 точки a и a^* сравнимы; можно считать, что $a < a^*$ (иначе переобозначим эти точки: $a \to a^*$, $a^* \to a$). Положим $C^+ = \{x \in A | x > a^*\}$, $C^- = \{x \in A | x < a\}$, $C_0 = \{x \in A | a < x < a^*\}$ и $C = C^+ \cup C^- \cup C_0$. Очевидно, что подмножества C^+ и C^- бесконечны, а подмножество C_0 может быть как бесконечным, так и конечным (в том числе и пустым). Кроме того, в силу леммы 2, случай a), подмножества C^+, C^- и C_0 являются цепными, а значит, цепным является и подмножество C (а также $C \cup \{a, a^*\}$).

В силу теоремы 2 ч. у. множество (с тривиальной инволюцией) $B = A \setminus \{a, a^*\}$ является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного подмножеств; обозначим эти подмножества через B_1 и B_2. Тогда $C \subseteq B_1$ и $C \subseteq B_2$, иначе (поскольку C цепное) B не будет прямой суммой B_1 и B_2. Будем считать, что $C \subseteq B_1$. Тогда и точка a, и точка a^* несравнима с каждой точкой из B_2, иначе существуют сравнимые между собой точки $x \in B_1$ и $y \in B_2$ (и B не будет прямой суммой B_1 и B_2). Следовательно, A является прямой суммой подмножеств $\overline{B_1} = B_1 \cup \{a, a^*\}$ и B_2. В силу леммы 4 $B_1 \cap N(a) \cap N(a^*) = \varnothing$; более того, каждая из точек a и a^* сравнима со всеми точками из B_1, так как если бы существовала точка $c \in B_1$, несравнимая с a или a^*, то множество $C \cup \{a, a^*, c\}$ содержало бы подмножество, изоморфное множеству T_1 или T_1^{op} (см. лемму 7), что невозможно в силу положительности формы Титса для S. Наконец, в силу леммы 2, случай a) (соответственно леммы 3, случай c)) подмножество B_1 (соответственно B_2) является цепным. Итак, A является прямой суммой двух цепных подмножеств, одно из которых содержит $I(S)$.

Достаточность. Пусть $S = (A, *)$ — неограниченное ч. у. множество с инволюцией, где A — прямая сумма двух цепных подмножеств A_1 и A_2, и при этом $I(S) \subset A_1$. Докажем, что в этом случае форма Титса $q_S(z)$ положительно определена.

В силу определения формы Титса в бесконечном случае это достаточно показать для (конечных) ч. у. множеств $P = P_{m,n-m} = (A_{m,n-m}, *) = \{1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n | 1 \prec \prec 2 \prec \ldots \prec m, m+1 \prec m+2 \prec \ldots \prec n, 1^* = 2\}$, где $m > 1$ и $n \geq m$ — натуральные числа ($A_{m,n-m}$ является прямой суммой двух цепных подмножеств, состоящих из m и $n-m$ элементов). На самом деле нужно было бы требовать, чтобы $i^* = j$ при некоторых $1 \leq i < j \leq m$, но при замене условия $i^* = j$ условием $1^* = 2$ форма Титса во втором случае получается из формы Титса в первом случае с помощью замен $x_1 \leftrightarrow x_i$ и $x_3 \leftrightarrow x_j$ (и, следовательно, обе формы одновременно положительны или неположительны). Более того, поскольку для каждого $z \in \mathbb{Z}^{P \cup 0}$ имеем равенство $q_P(z) = q_Q(z')$, где $Q = P_{n,0}$, $z'_0 = z_0 - \sum_{s=m+1}^{n} z_s$, $z'_{1_*} = z_{1_*}$, $z'_s = z_s$ при $3, \ldots, m$ и $z'_s = -z_s$ при $s = m+1, \ldots, n$, то положительность формы Титса достаточно показать для множеств $Q = P_{m,0}$. А это видно из следующего равенства:

$$q_Q(x) = \Big(x_0 - x_{1_*} - \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{m} x_i\Big)^2 + \Big(x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{m} x_i\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{m} x_i^2.$$

Предложение 1 доказано.
Из этого предложения вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $|I(S)| = 2$ и форма Титса $q_S(x)$ положительна. Тогда $q_S(x)$ является сильно положительной.*

Действительно, поскольку $|I(S)| = 2$, то на любом не являющемся замкнутым подмножестве в S индуцированная инволюция $\circ$ действует тривиальным образом, причем в силу предложения 1 каждое такое подмножество является прямой суммой двух цепных множеств; следовательно, в силу теоремы 2 оно имеет положительную форму Титса. А это и означает, что форма $q_S(x)$ является сильно положительной.

Рассмотрим теперь случай, когда S имеет больше двух больших точек.

Предложение 3. *Если $2 < |I(S)| < \infty$, то форма Титса $q_S(x)$ не является положительной.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда $|I(S)| = 4$. Идея доказательства аналогична той, с помощью которой было доказано предложение 1 (необходимость); при этом роль теоремы 2 играет предложение 1.

Предположим противное, т. е. что форма Титса $q_S(x)$ является положительной, и пусть $I(S) = \{a, a^*, b, b^*\}$. В силу леммы 1 точка a сравнима с точкой a^*, а точка b — с точкой b^*; можно, очевидно, считать, что $a < a^*$ и $b < b^*$. Введем множества $C^+ = \{x \in A | x^* = = x, x > a^*\}$, $C^- = \{x \in A | x^* = x, x < a\}$, $C_0 = \{x \in A | x^* = x, a < x < a^*\}$ и $C = C^+ \cup C^- \cup C_0$. В силу леммы 2, случай a), все эти подмножества являются цепными. Заметим, что подмножества C^+ и C^- бесконечны, а подмножество C_0 может быть как бесконечным, так и конечным (в том числе и пустым).

В силу предложения 1 ч. у. множество $B = A \setminus \{a, a^*\}$ является прямой суммой некоторых цепных подмножеств B_1 и B_2, и при этом одно из них, например B_1, содержит точки b и b^*. Тогда $C \subseteq B_1$ или $C \subseteq B_2$ (см. доказательство предложения 1). Если $C \subseteq B_2$, то каждая из точек a и a^* несравнима с каждой точкой из B_2 (иначе B не будет прямой суммой B_1 и B_2), а следовательно, и с точками b и b^*, что противоречит лемме 3 (случай d)).

Покажем теперь, что в случае $C \subseteq B_1$ также можно прийти к противоречию. В силу леммы 2, случай b) (соответственно леммы 3, случай d)) существуют несравнимые (соответственно сравнимые) между собой элементы $x \in \{a, a^*\}$ и $y \in \{b, b^*\}$. Легко видеть с учетом лемм 5 и 6 (и неравенств $a < a^*$ и $b < b^*$), что для отношения частичного порядка на замкнутом подмножестве $D = \{a, a^*, b, b^*\}$ возможны, с точностью до двойственности и замены $a \leftrightarrow b$, $a^* \leftrightarrow b^*$, следующие два варианта: $a < b^* < a^*, b < b^*$ или $a < a^* < b^*, a < b < b^*$ (тот факт, что мы рассматриваем эти случаи с точностью до двойственности, оправдан тем, что при замене множества S двойственным множеством S^{op} подмножество D переходит в подмножество D^{op}).

Теперь воспользуемся леммой 7. Легко видеть, что множество $C \cup D$ содержит подмножество, изоморфное множеству T_2, если рассматривается первый вариант, и подмножество, изоморфное множеству T_3, если рассматривается второй вариант. А это противоречит предположению, что форма Титса $q_S(x)$ положительна.

Предложение 3 доказано.

Поскольку сильно положительная форма является положительной, то из предложений 2 и 3 следует теорема 1, сформулированная в первом пункте.

Кроме того, из предложений 1 и 3 следует теорема, которая описывает строение неограниченных ч. у. множеств с инволюцией, имеющих положительную форму Титса.

Теорема 3. *Пусть $S = (A, *)$ — неограниченное ч. у. множество с инволюцией, такое, что $0 < |I(S)| < \infty$. Тогда форма Титса $q_S(x)$ положительна в том и только в том случае, когда $|I(S)| = 2$ и A является прямой суммой двух цепных подмножеств, одно из которых содержит $I(S)$.*

4. Строение ч. у. множеств с инволюцией, имеющих сильно положительную форму Титса. Заметим, что предложение 3 не имеет места в случае, когда подмножество $I(S)$ бесконечно. В качестве примера можно рассмотреть следующее ч. у. множество с инволюцией $S = (A, *)$, которое имеет положительную форму Титса: A состоит из всех целых, отличных от нуля, чисел, причем $\pm i \prec \pm(i+1)$ и $-i \prec i$, если $i > 0$, и $i^* = -i$ для любого i. Однако в случае, когда $|I(S)| = \infty$, имеет место следующее утверждение (с более слабым, чем в предложении 3, заключением).

Предложение 4. *Если $|I(S)| = \infty$, то форма Титса $q_S(x)$ не является сильно положительной.*

Доказательство. Для элемента $x \in A$ будем обозначать через $\{x\}^>$ (соответственно $\{x\}^<$) множество всех элементов $y \in A$ таких, что $y > x$ (соответственно $y < x$). Для (не обязательно замкнутого) подмножества $B \subset A$ положим $I(B) = \{x \in B | x^* \neq x, x^* \in \in B\}$.

Предположим противное, т. е. что существует множество S такое, что $|I(S)| = \infty$ и форма $q_S(x)$ является сильно положительной (а значит, и положительной). Зафиксируем в A точки a и b такие, что $a^* \neq a$ и $b^* \neq b$. В силу леммы 1 a сравнима с a^*, а b — с b^*; можно, очевидно, считать, что $a < a^*$ и $b < b^*$. Положим $C = \{a\}^< \cap \{b\}^<$.

Рассмотрим сначала случай, когда $C \neq \varnothing$. Тогда подмножество $B = C \cup \{a^*\}^> \cup \{b^*\}^>$ является неограниченным, причем $I(B) = \varnothing$ (другими словами, действующая на B индуцированная инволюция $\circ = *_B$ является тривиальной), так как иначе, сравнимые между собой в силу леммы 1, точки $x, x^* \in I(B) (x^* \neq x)$ были бы сравнимы с точками a, a^* или b, b^*, что противоречит лемме 2, случай b); отметим, что подмножество B может быть как замкнутым, так и незамкнутым. Применяя к ч. у. множеству $B' = B \cup \{a, a^*, b, b^*\}$ (с инволюцией $*'_B$) предложение 3, получаем, что форма Титса для него не является положительной, а значит, форма Титса $q_S(x)$ не является сильно положительной. Пришли к противоречию.

Пусть теперь $C = \varnothing$. В силу леммы 2, случай b), существуют несравнимые между собой точки $x \in \{a, a^*\}$ и $y \in \{b, b^*\}$, и, значит, $a < b^*$ или $b < a^*$; в силу симметрии можно считать, что $a < b^*$. Положим $F = \{a\}^< \cup \{b\}^<$ и $G = \{b\}^< \cup \{b^*\}^>$ (каждое из этих подмножеств может быть как замкнутым, так и незамкнутым). Очевидно, что F является прямой суммой бесконечных подмножеств $\{a\}^<$ и $\{b\}^<$, которые не имеют минимальных точек, а G является неограниченным. Далее, $I(F) = \varnothing$ (соответственно $I(G) = \varnothing$), так как иначе, сравнимые между собой в силу леммы 1, точки x и $x^* \neq x$ из $I(F)$ (соответственно из $I(G)$) были бы сравнимы с точками a, a^* или b, b^* (соответственно с точками b, b^*), что противоречит лемме 2, случай b). Положим $D = F \cup G$ и $\overline{D} = D \cup \{b, b^*\}$. Из изложенного выше следует, что если подмножество D содержит точки y и y^* такие, что $y < y^*$, то $y \in \{a\}^<$ и $y^* \in \{b^*\}^>$; следовательно, в силу леммы 2, случай b), $|I(D)| \leq 2$, а значит, $|I(\overline{D})| \leq 4$. И если $|I(\overline{D})| = 4$, то, применяя предложения 3 к ч. у. множеству $\overline{D}$ (с инволюцией $*_{\overline{D}}$), получаем, что форма Титса для него не является положительной. А если $|I(\overline{D})| = 2$, то, применяя к множеству $\overline{D}$ предложение 1, снова получаем, что форма Титса для него не является положительной. Итак, в обоих случаях форма Титса $q_{\overline{D}}(x)$ не является положительной, а значит, форма Титса $q_S(x)$ не является сильно положительной. Снова пришли к противоречию.

Предложение 4 доказано.

Из этого предложения, предложения 2 и теоремы 3 следует теорема, которая описывает строение неограниченных ч. у. множеств с инволюцией $S = (A, *)$ (без ограничений на $I(S)$), имеющих сильно положительную форму Титса.

Теорема 4. *Пусть $S = (A, *)$ — неограниченное ч. у. множество с нетривиальной инволюцией. Тогда форма Титса $q_S(x)$ сильно положительна в том и только в том случае, когда $|I(S)| = 2$ и A является прямой суммой двух цепных подмножеств, одно из которых содержит $I(S)$.*

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscr. math. — 1972. — **6**. — P. 71 – 103, 309.
2. *Матричные* задачи / Под ред. Ю. А. Митропольского. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — 145 с.
3. *Представления* и квадратичные формы / Под ред. Ю. А. Митропольского. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. — 153 с.
4. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic forms // Lect. Notes Math. — 1984. — **1099**. — 376 p.
5. *Simson D.* Linear representations of partially ordered sets and vector space categories. — Montreux: Gordon and Breach, 1992. — 499 p.
6. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 5 – 70.
7. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Там же. — С. 104 – 114.
8. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Represent. Algebras. — Ottawa, Ontario: Carleton Univ., 1974. — № 5.

9. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1972. — **28**. — С. 5 – 31.

10. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Там же. — С. 32 – 41.

11. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. — 1974. — Вып. 8. — С. 34 – 42.

12. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О подкатегориях конечного ранга категории представлений неограниченного частично упорядоченного множества // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. — 2003. — Вип. 8. — С. 15 – 22.

13. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О квадратичной форме Титса для бесконечных частично упорядоченных множеств // Там же. — 2002. — Вип. 7. — С. 28 – 31.

14. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 1. — С. 3 – 14.

Получено 30.09.2004