УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of $C^1[\tau(1),+\infty)$-solutions of the quasilinear differential-functional equation

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(\tau(t)) + c\dot{x}(\tau(t)) + f(x(t), x(\tau(t))), \quad \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty,$$

in a neighbourhood of the singular point $t = +\infty$.

Встановлено нові властивості $C^1[\tau(1),+\infty)$-розв'язків квазілінійного диференціально-функціонального рівняння

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(\tau(t)) + c\dot{x}(\tau(t)) + f(x(t), x(\tau(t))), \quad \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty,$$

в околі особливої точки $t = +\infty$.

В данной работе рассматривается квазилинейное дифференциально-функциональное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(\tau(t)) + c\dot{x}(\tau(t)) + f(x(t), x(\tau(t))), \tag{1}$$

где $\{a, b, c\} \subset R$; непрерывная функция $f : R^2 \to R$ такова, что $f(0) = 0$ и для любых x, y, $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\max\{|x|, |y|, |\widetilde{x}|, |\widetilde{y}|\} \le \sigma$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(\widetilde{x}, \widetilde{y})| \le \delta(\sigma)|x - \widetilde{x}| + \eta(\sigma)|y - \widetilde{y}|. \tag{2}$$

Здесь функции $\delta(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ являются определенными на $[0, +\infty)$ и такими, что $\delta(\sigma) \to 0$, $\eta(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$; отклонение $\tau(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, +\infty)$ и такой, что выполняются соотношения

$$\tau(0) = 0, \quad 0 < \inf_{t\ge0} \dot{\tau}(t) \le \sup_{t\ge0} \dot{\tau}(t) < 1. \tag{3}$$

Будем исследовать свойства $C^1[\tau(1), +\infty)$-решений уравнения (1).

Различные частные случаи таких уравнений изучались многими математиками, и в настоящее время имеется ряд интересных результатов, касающихся изучения свойств их решений. Так, в [1] достаточно полно исследованы асимптотические свойства решений уравнения (1) при $\tau(t) = qt$, $c = 0$, $f \equiv 0$, в [2] установлены новые свойства решений этого уравнения при $\tau(t) = qt$, $a = 0$, $c = 0$, $f \equiv 0$, в [3] получены условия существования аналитических, почти периодических решений уравнения (1) при $\tau(t) = qt$,

$c = 0$, $f \equiv 0$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $\tau(t) = qt$, $|c| > 1$, $f \equiv 0$, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] определены мажоранты для решений уравнения (1). Несмотря на обилие результатов, посвященных исследованию асимптотических свойств решений широких классов дифференциально-функциональных уравнений и их важные приложения (см. [7, 8] и приведенную в них библиографию), многие вопросы теории дифференциально-функциональных уравнений вида (1) изучены недостаточно. Особенно это касается исследования свойств решений уравнения (1) в окрестности особой точки $t = +\infty$. Поэтому главной целью данной работы является установление новых свойств непрерывно дифференцируемых на $[\tau(1), +\infty)$ решений уравнения (1) при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов a, b, c и функции f.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что выполняются условия:*
1) $a < 0$;
2) $C + \dfrac{B}{|a|} < 1$, *где* $B \stackrel{\text{df}}{=} \sup\limits_{t\geq 1}\left|b + a\dfrac{c}{\tau'(t)} + \dfrac{c\tau''(t)}{(\tau'(t))^2}\right|$, $C \stackrel{\text{df}}{=} \sup\limits_{t\geq 1}\left|\dfrac{c}{\tau'(t)}\right|$.
Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Перепишем уравнение (1) в эквивалентной интегральной форме

$$x(t) = \frac{c}{\tau'(t)}x(\tau(t)) + \left(x(1) - \frac{c}{\tau'(1)}x(\tau(1))\right)e^{a(t-1)} + \\ + \int\limits_1^t e^{a(t-s)}\left(b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2}\right)x(\tau(s))ds + \\ + \int\limits_1^t e^{a(t-s)}f(x(s), x(\tau(s)))ds$$

и рассмотрим начальную задачу

$$x(t) = \frac{c}{\tau'(t)}x(\tau(t)) + \left(g(1) - \frac{c}{\tau'(1)}g(\tau(1))\right)e^{a(t-1)} + \\ + \int\limits_1^t e^{a(t-s)}\left(b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2}\right)x(\tau(s))ds + \\ + \int\limits_1^t e^{a(t-s)}f(x(s), x(\tau(s)))ds, \ \ t > 1, \tag{4}$$

$$x(t) = g(t), \quad t \in [\tau(1), 1],$$

где $g(t)$ — некоторая функция из класса $C[\tau(1),1]$. Для решения этой задачи воспользуемся методом последовательных приближений, полагая

$$x_0(t) = g(t), \quad t \in [\tau(1), 1],$$

$$x_0(t) = g(1)(2-t), \quad 1 < t < 2,$$

$$x_0(t) = 0, \quad t \geq 2,$$

$$x_m(t) = \frac{c}{\tau'(t)} x_{m-1}(\tau(t)) + \left(g(1) - \frac{c}{\tau'(1)} g(\tau(1))\right) e^{a(t-1)} +$$

$$+ \int_1^t e^{a(t-s)} \left(b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2}\right) x_{m-1}(\tau(s)) ds +$$

$$+ \int_1^t e^{a(t-s)} f\left(x_{m-1}(s), x_{m-1}(\tau(s))\right) ds, \ t > 1, \tag{5}$$

$$x_m(t) = g(t), \quad t \in [\tau(1), 1],$$

$$m \geq 1.$$

Из (3) следует, что существует $T \geq 2$ такое, что для любого $t \geq T$ $\tau(t) \geq 2$. Оценим $|x_1(t) - x_0(t)|$ при $t \geq T$. В силу (5) имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)| = |x_1(t)| = \left| \left(g(1) - \frac{c}{\tau'(1)} g(\tau(1))\right) e^{a(t-1)} + \right.$$

$$+ e^{at} \int_1^T e^{-as} \left(b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2}\right) x_0(\tau(s)) ds +$$

$$\left. + e^{at} \int_1^T e^{-as} f\left(x_0(s), x_0(\tau(s))\right) ds \right| = K_1 e^{at},$$

где

$$K_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \left| \left(g(1) - \frac{c}{\tau'(1)} g(\tau(1))\right) e^{-a} + \right.$$

$$+ \int_1^T e^{-as} \left(b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2}\right) x_0(\tau(s)) ds +$$

$$\left. + \int_1^T e^{-as} f\left(x_0(s), x_0(\tau(s))\right) ds \right|.$$

Отсюда следует, что существует K такое, что $|x_1(t) - x_0(t)| \le Ke^{at}$, $t \ge \tau(1)$. Отметим, что параметр K зависит только от величины $\sup\limits_{\tau(1)\le t\le 1} |g(t)|$. Поскольку $a < 0$ и функция f имеет свойство (2), при $t > 1$ находим

$$|x_2(t) - x_1(t)| \le \left|\frac{c}{\tau'(t)}\right| |x_1(\tau(t)) - x_0(\tau(t))| +$$

$$+ e^{at} \int\limits_1^t e^{-as} \left| b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2} \right| |x_1(\tau(s)) - x_0(\tau(s))| ds +$$

$$+ e^{at} \int\limits_1^t e^{-as} \left(\delta(\sigma)|x_1(s) - x_0(s)| + \eta(\sigma)|x_1(\tau(s)) - x_0(\tau(s))| \right) ds \le$$

$$\le \left|\frac{c}{\tau'(t)}\right| Ke^{a\tau(t)} + e^{at} \int\limits_1^t e^{-as} \left| b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2} \right| Ke^{a\tau(s)} ds +$$

$$+ e^{at} \int\limits_1^t e^{-as} \left(\delta(\sigma)Ke^{as} + \eta(\sigma)Ke^{a\tau(s)} \right) ds.$$

Для сокращения записей введем обозначения $\inf\limits_{t\ge 0}\left(1 - \dfrac{d}{dt}(\tau^m(t))\right) \overset{\text{df}}{=} w_m$, где

$$\tau^m(t) \overset{\text{df}}{=} \underbrace{\tau(\tau(\ldots\ldots(\tau}_{m}(t))\ldots)).$$

Учитывая (3), нетрудно показать, что

$$0 < w_m \to 1, \quad m \to +\infty. \tag{6}$$

Для любого ε существует $D(\varepsilon)$ такое, что $e^{at}t < D(\varepsilon)e^{(a+\varepsilon)t}$, $t \ge 1$. В силу (3) можно выбрать $\varepsilon > 0$ такое, что $1 + \dfrac{\varepsilon}{a} - \dot{\tau}(t) > 0$ при $t > 1 \Rightarrow (a + \varepsilon)t < a\tau(t)$ при $t > 1$. Поскольку

$$\int\limits_1^t e^{-a(s-\tau(s))} ds = \int\limits_1^t \frac{de^{-a(s-\tau(s))}}{-a(1 - \dot{\tau}(s))} \le$$

$$\le \frac{1}{|a|w_1}\left(e^{-a(t-\tau(t))} - e^{-a(1-\tau(1))}\right) \le \frac{e^{-a(t-\tau(t))}}{|a|w_1},$$

то

$$|x_2(t)-x_1(t)| \le CKe^{a\tau(t)} + \frac{KB}{|a|w_1}e^{a\tau(t)} +$$

$$+\delta(\sigma)KD(\varepsilon)e^{(a+\varepsilon)t} + \frac{K}{aw_1}\eta(\sigma)e^{a\tau(t)} \le$$

$$\le \left(C + \frac{B}{|a|w_1} + \delta(\sigma)D(\varepsilon) + \frac{\eta(\sigma)}{aw_1}\right)Ke^{a\tau(t)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} K_1Ke^{a\tau(t)} \text{ при } t \ge \tau(1).$$

Аналогично находим

$$|x_3(t)-x_2(t)| \le \left|\frac{c}{\tau'(t)}\right| \left|x_2(\tau'(t)) - x_1(\tau(t))\right| +$$

$$+e^{at}\int\limits_1^t e^{-as}\left|b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2}\right| |x_2(\tau(s)) - x_1(\tau(s))|\, ds +$$

$$+e^{at}\int\limits_1^t e^{-as}\left(\delta(\sigma)|x_2(s)-x_1(s)| + \eta(\sigma)|x_2(\tau(s)) - x_1(\tau(s))|\right) ds \le$$

$$\le \left|\frac{c}{\tau'(t)}\right| K_1Ke^{a\tau^2(t)} + e^{at}\int\limits_1^t e^{-as}\left|b + a\frac{c}{\tau'(s)} + \frac{c\tau''(s)}{(\tau'(s))^2}\right| K_1Ke^{a\tau^2(s)}ds +$$

$$+e^{at}\int\limits_1^t e^{-as}\left(\delta(\sigma)K_1Ke^{a\tau(s)} + \eta(\sigma)K_1Ke^{a\tau^2(s)}\right) ds \le$$

$$\le CK_1Ke^{a\tau^2(t)} + \frac{K_1KB}{|a|w_2}e^{a\tau^2(t)} + \frac{\delta(\sigma)K_1K}{|a|w_1}e^{a\tau(t)} + \frac{\eta(\sigma)K_1K}{|a|w_2}e^{a\tau^2(t)} \le$$

$$\le \left[C + \frac{1}{|a|w_2}\left(B + \eta(\sigma)\right) + \frac{\delta(\sigma)}{|a|w_1}\right] K_1Ke^{a\tau^2(t)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} K_2K_1Ke^{a\tau^2(t)},\ t \ge \tau(1).$$

Рассуждая методом математической индукции, получаем

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \le K_m \ldots K_2K_1Kea\tau^m(t), \quad t \ge \tau(1),\ m \ge 2,$$

где

$$K_m = C + \frac{1}{aw_m}\left(B + \eta(\sigma)\right) + \frac{\delta(\sigma)}{|a|w_{m-1}}.$$

Из (6) следует

$$\lim_{m\to+\infty} K_m = C + \frac{1}{|a|}\left(B + \eta(\sigma) + \delta(\sigma)\right).$$

Поскольку

$$C + \frac{B}{|a|} < 1,$$

при достаточно малом σ имеем $\lim\limits_{m\to+\infty} K_m < 1$, ряд

$$S(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} |x_0(t)| + Ke^{at} + K_1 K e^{a\tau(t)} + K_2 K_1 K e^{a\tau^2(t)} + \ldots + K_m \ldots K_2 K_1 K e^{a\tau^m(t)} + \ldots$$

сходится равномерно при $t \geq 1$ и $S(t) \leq \sigma$ при $\sup\limits_{1\leq t} |x_0(t)| \leq \sup\limits_{\tau(1)\leq t\leq 1} |g(t)| \leq \dfrac{\sigma}{2}$,

$$K = K\left(\sup_{\tau(1)\leq t\leq 1} |g(t)|\right) \leq \frac{\sigma}{2\,(1 + K_1 + K_2K_1 + \ldots + K_m \ldots K_2K_1 + \ldots)}.$$

Таким образом, для любой константы $\varepsilon > 0$ существует константа $0 < \mu = \mu(\varepsilon) \leq \varepsilon$ такая, что задача (4) с $\sup\limits_{\tau(1)\leq t\leq 1} |g(t)| \leq \mu(\varepsilon)$ имеет непрерывное решение $x(t)$, для которого выполняются оценка $\sup\limits_{\tau(1)\leq t} |x(t)| \leq \varepsilon$ и равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Нетрудно показать, что других решений эта задача не имеет.

Множество непрерывных решений задачи (4) для различных начальных функций $\{g \in C[\tau(1), 1] \mid \sup\limits_{\tau(1)\leq t\leq 1} |g(t)| \leq \mu(\varepsilon)\}$ включает в себя множество решений уравнения (1), которые удовлетворяют условию $\sup\limits_{\tau(1)\leq t\leq 1} |x(t)| \leq \mu(\varepsilon)$.

Теорема доказана.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891 – 937.

2. *De Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56 – Indag. Math. — 1953. — **15**. — P. 449 – 464.

3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes. Math. — 1971. — **243**. — P. 249 – 254.

4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 119 с.

5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10.

6. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 1. — С. 48 – 52.

7. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. — Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. — 288 с.

8. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. — 267 p.

Получено 27.12.2004