УДК 517 . 9

КРАЙОВА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

В. Г. Самойленко, Л. В. Хомченко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail:vsam@univ.kiev.ua

The authors propose an algorithm for constructing an asymptotic solution to a Neumann boundary-value problem for a singularly perturbed heat equation with impulses at the fixed moments of time. A theorem on the order with which the asymptotic solution satisfies the original problem is proved.

Запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі Неймана для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з імпульсною дією у фіксовані моменти часу та доведено теорему про порядок, з яким асимптотичний розв'язок задовольняє початкову задачу.

1. Вступ. При вивченні різноманітних явищ та процесів техніки, біології, хімії, медицини виникає необхідність дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній [1 – 4]. Такі диференціальні рівняння мають ряд особливостей, зокрема в загальному випадку розв'язок породжуючої задачі не є границею розв'язку збуреної задачі.

На даний час розроблено низку методів та підходів до дослідження згаданих задач. Так, В. П. Маслов, С. Ю. Доброхотов та Г. О. Омельянов [5, 6] розвинули метод ВКБ для побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з частинними похідними; О. Аксельсон, Є. В. Глушков, Н. В. Глушкова [7] застосували метод локальних функцій Гріна для побудови числового розв'язку сингулярно збурених задач конвекції-дифузії; А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов [8] дослідили сингулярно збурені нелінійні інтегро-диференціальні системи з швидко змінними ядрами за допомогою методу регуляризації; Дж. Мо [9] побудував асимптотичний розв'язок сингулярно збуреної задачі для рівняння реакції-дифузії за допомогою примежових функцій; Л. А. Люстернік і М. І. Вішик за допомогою методу примежових функцій побудували асимптотичні розв'язки для сингулярно збурених диференціальних рівнянь з частинними похідними [10], а А. Б. Васильєва і В. Ф. Бутузов дослідили низку задач, що містять сингулярно збурені звичайні диференціальні рівняння [11, 12].

З іншого боку, багатьом фізичним процесам властива миттєва зміна деяких їх характеристик, яку можна описати за допомогою так званих умов імпульсної дії, що викликає потребу вивчення імпульсних систем [13]. Безумовний пріоритет дослідження систем такого типу належить Київській школі з нелінійної механіки. Різні аспекти імпульсних систем розглядались у працях Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [14, 15] та багатьох інших. Зокрема, в [16] вивчались питання про побудову асимптотичних розв'язків та встановлення асимптотичних оцінок для наближених (асимптотичних) розв'язків сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією

© В. Г. Самойленко, Л. В. Хомченко, 2005

у фіксовані моменти часу. В той же самий час залишилось не розглянутим питання про побудову асимптотичних розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами та умовами імпульсної дії.

У [17] запропоновано алгоритм побудови асимптотичних розв'язків крайової задачі Діріхле для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

У даній статті вивчається крайова задача Неймана для сингулярно збуреного диференціального рівняння параболічного типу з імпульсною дією, для якої на основі методу примежових функцій розвинуто алгоритм побудови її асимптотичних розв'язків.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу Неймана для диференціального рівняння вигляду

$$a(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t} - b(x,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u,x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

де

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{n+k}a_k(x), \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2m+k}b_k(x), \quad m,n \in \mathbf{N},$$

$$f(u,x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(u,x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (0;1)\times(0;+\infty),$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C^{(\infty)}([0;1]), \tag{2}$$

однорідними крайовими умовами

$$\frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1,t,\varepsilon)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0;+\infty), \tag{3}$$

та умовами імпульсної дії у фіксовані моменти часу $t_i > 0,\, i \in \mathbf{N}$:

$$\Delta u(x,t,\varepsilon)\mid_{t=t_i} = u(x,t_i+0,\varepsilon) - u(x,t_i-0,\varepsilon) = I_i(u,x,t_i,\varepsilon), \tag{4}$$

$$I_i(u,x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k I_{ik}(u,x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (0;1)\times(0;+\infty), \quad i \in \mathbf{N}.$$

Тут ε — малий параметр.

Вважаємо, що розв'язок задачі (1) – (4) існує і є неперервним зліва при $t = t_i,\, i \in \mathbf{N}$.

Нехай виконуються такі припущення:

Π_{1^0}) функції $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$, $f(u,x,t,\varepsilon)$, $I_i(u,x,t,\varepsilon)$, $i \in \mathbf{N}$, — нескінченно диференційовні щодо своїх змінних; $t_{i+1} - t_i \geq \delta > 0$, $i \in \mathbf{N}$, для деякого δ;

Π_{2^0}) виконується умова узгодженості $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$;

Π_{3^0}) рівняння $f(u,x,t,0) = 0$ має нескінченно диференційовний розв'язок $\bar{u}_0(x,t)$, визначений для $(x,t) \in [0;1]\times[0;+\infty)$ такий, що $f'_u(\bar{u}_0(x,t),x,t,0) < 0$.

3. Побудова асимптотичного розв'язку. Розв'язок задачі (1) – (4) шукається у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x,t,\varepsilon) = \bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi u(x,t,\varepsilon), \tag{5}$$

де

$$\bar{u}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}_0(x,t) + \varepsilon \bar{u}_1(x,t) + \varepsilon^2 \bar{u}_2(x,t) + \ldots \tag{6}$$

— регулярна частина асимптотики,

$$\begin{aligned}\Pi u(x,t,\varepsilon) = \Pi_0 u(x,\tau_0,\varepsilon) + Qu(\xi,t,\varepsilon) + Q_* u(\xi_*,t,\varepsilon) + P_0 u(\xi,\tau_0,\varepsilon) + \\ + P_{*0} u(\xi_*,\tau_0,\varepsilon) + \sum_{t_i \le t} [\Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon) + P_i u(\xi,\tau_i,\varepsilon) + P_{*i} u(\xi_*,\tau_i,\varepsilon)]\end{aligned} \tag{7}$$

— сингулярна частина асимптотики, причому

$$\tau_0 = t\varepsilon^{-n}, \quad \tau_i = (t - t_i)\varepsilon^{-n}, \quad \xi = x\varepsilon^{-m}, \quad \xi_* = (1-x)\varepsilon^{-m}.$$

Функції, що складають сингулярну частину асимптотики (7), записуються у вигляді таких асимптотичних рядів:

$$\Pi_0 u(x,\tau_0,\varepsilon) = \Pi_{00} u(x,\tau_0) + \varepsilon \Pi_{01} u(x,\tau_0) + \varepsilon^2 \Pi_{02} u(x,\tau_0) + \ldots, \tag{8}$$

де функції $\Pi_{0k} u(x,\tau_0)$, $k \ge 0$, визначено для $x \in [0;1]$, $\tau_0 \ge 0$;

$$Qu(\xi,t,\varepsilon) = Q_0 u(\xi,t) + \varepsilon Q_1 u(\xi,t) + \varepsilon^2 Q_2 u(\xi,t) + \ldots, \tag{9}$$

де функції $Q_k u(\xi,t)$, $k \ge 0$, визначено для $\xi \in [0;\varepsilon^{-m}]$, $t \ge 0$;

$$Q_* u(\xi_*,t,\varepsilon) = Q_{*0} u(\xi_*,t) + \varepsilon Q_{*1} u(\xi_*,t) + \varepsilon^2 Q_{*2} u(\xi_*,t) + \ldots, \tag{10}$$

де функції $Q_{*k} u(\xi_*,t)$, $k \ge 0$, визначено для $\xi_* \in [0;\varepsilon^{-m}]$, $t \ge 0$;

$$\Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon) = \Pi_{i0} u(x,\tau_i) + \varepsilon \Pi_{i1} u(x,\tau_i) + \varepsilon^2 \Pi_{i2} u(x,\tau_i) + \ldots, \tag{11}$$

де функції $\Pi_{ik} u(x,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k \ge 0$, визначено для $x \in [0;1]$, $\tau_i \ge 0$.

Як показано нижче, функції в (8) – (11) є примежовими функціями, а інші функції сингулярної частини асимптотики (7) — кутовими функціями, які записуються у вигляді

$$P_0 u(\xi,\tau_0,\varepsilon) = P_{00} u(\xi,\tau_0) + \varepsilon P_{01} u(\xi,\tau_0) + \varepsilon^2 P_{02} u(\xi,\tau_0) + \ldots, \tag{12}$$

де функції $P_{0k} u(\xi,\tau_0)$, $k \ge 0$, визначено для $\xi_* \in [0;\varepsilon^{-m}]$, $\tau_0 \ge 0$;

$$P_{*0} u(\xi_*,\tau_0,\varepsilon) = P_{*00} u(\xi_*,\tau_0) + \varepsilon P_{*01} u(\xi_*,\tau_0) + \varepsilon^2 P_{*02} u(\xi_*,\tau_0) + \ldots, \tag{13}$$

де функції $P_{*0k}u(\xi_*, \tau_0)$, $k \geq 0$, визначено для $\xi_* \in [0; \varepsilon^{-m}]$, $\tau_0 \geq 0$;

$$P_i u(\xi, \tau_i, \varepsilon) = P_{i0}u(\xi, \tau_i) + \varepsilon P_{i1}u(\xi, \tau_i) + \varepsilon^2 P_{i2}u(\xi, \tau_i) + \ldots, \tag{14}$$

де функції $P_{ik}u(\xi, \tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k \geq 0$, визначено для $\xi \in [0; \varepsilon^{-m}]$, $\tau_i \geq 0$;

$$P_{*i}u(\xi_*, \tau_i, \varepsilon) = P_{*i0}u(\xi_*, \tau_i) + \varepsilon P_{*i1}u(\xi_*, \tau_i) + \varepsilon^2 P_{*i2}u(\xi_*, \tau_i) + \ldots, \tag{15}$$

де функції $P_{*ik}u(\xi_*, \tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k \geq 0$, визначено для $\xi_* \in [0; \varepsilon^{-m}]$, $\tau_i \geq 0$.

Обчислимо похідні кутових та примежових функцій. Маємо

$$\frac{\partial \Pi_{0k}u(x, \tau_0)}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_{0k}u(x, \tau_0)}{\partial \tau_0}\frac{\partial \tau_0}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial \Pi_{0k}u(x, \tau_0)}{\partial \tau_0},$$

$$\frac{\partial P_{ik}u(\xi, \tau_i)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial P_{ik}u(\xi, \tau_i)}{\partial \tau_i}, \quad \frac{\partial^2 P_{ik}u(\xi, \tau_i)}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^{2m}}\frac{\partial^2 P_{ik}u(\xi, \tau_i)}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial P_{*ik}u(\xi_*, \tau_i)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial P_{*ik}u(\xi_*, \tau_i)}{\partial \tau_i}, \quad \frac{\partial^2 P_{*ik}u(\xi_*, \tau_i)}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^{2m}}\frac{\partial^2 P_{*ik}u(\xi_*, \tau_i)}{\partial \xi_*^2}.$$

Підставляючи асимптотичний розклад (5) у рівняння (1) та враховуючи вирази для знайдених вище похідних, з точністю $O(\varepsilon^k)$, $k \in \mathbf{N}$, знаходимо співвідношення

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^n \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j a_j(x) \Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Bigg[\frac{\partial \bar{u}_k(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial \Pi_{0k}u(x,\tau_0)}{\partial \tau_0} + \\
&\qquad + \frac{\partial Q_k u(\xi,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q_{*k}u(\xi_*,t)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial P_{0k}u(\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial \tau_0} + \\
&\qquad + \sum_{t_i \leq t} \left(\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial \Pi_{ik}u(x,\tau_i)}{\partial \tau_i} + \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial P_{ik}u(\xi,\tau_i)}{\partial \tau_i} + \frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)}{\partial \tau_i} \right) \Bigg] \Bigg) - \\
&\qquad - \varepsilon^{2m} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j b_j(x) \Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Bigg[\frac{\partial^2 \bar{u}_k(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_{0k}(x,\tau_0)}{\partial x^2} + \\
&\qquad + \frac{1}{\varepsilon^{2m}} \left(\frac{\partial^2 Q_k u(\xi,t)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_{*k}u(\xi_*,t)}{\partial \xi_*^2} + \frac{\partial^2 P_{0k}u(\xi,\tau_0)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial \xi_*^2} \right) + \\
&\qquad + \sum_{t_i \leq t} \left(\frac{\partial \Pi_{ik}u(x,\tau_i)}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon^{2m}}\frac{\partial^2 P_{ik}u(\xi,\tau_i)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon^{2m}}\frac{\partial^2 P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)}{\partial \xi_*^2} \right) \Bigg] \Bigg) = \\
&\qquad = \bar{f}(x,t,\varepsilon) + \Pi_0 f(x,\tau_0,\varepsilon) + Qf(\xi,t,\varepsilon) + Q_* f(\xi_*,t,\varepsilon) + P_0 f(\xi,\tau_0,\varepsilon) + \\
&\qquad + P_{*0}f(\xi_*,\tau_0,\varepsilon) + \Pi_i f(x,\tau_i,\varepsilon) + P_i f(\xi,\tau_i,\varepsilon) + P_{*i}f(\xi_*,\tau_i,\varepsilon),
\end{aligned} \tag{16}$$

де використано такі позначення:

$$\bar{f}(x,t,\varepsilon) = f(\bar{u}(x,t,\varepsilon), x, t, \varepsilon),$$

$$\Pi_0 f(x,\tau_0,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+\Pi_0 u(x,\tau_0,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - f(\bar{u}(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon)]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0},$$

$$Qf(\xi,t,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+Qu(\xi,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - f(\bar{u}(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon)]\Big|_{x=\varepsilon^m\xi},$$

$$Q_* f(\xi_*,t,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+Q_* u(\xi_*,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - f(\bar{u}(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon)]\Big|_{x=1-\varepsilon^m\xi_*},$$

$$P_0 f(\xi,\tau_0,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+\Pi_0 u(x,\tau_0,\varepsilon)+Qu(\xi,t,\varepsilon)+P_0(\xi,\tau_0,\varepsilon),x,t,\varepsilon) -$$
$$- \Pi_0 f(x,\tau_0,\varepsilon) - Qf(\xi,t,\varepsilon) - \bar{f}(x,t,\varepsilon)]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0,\, x=\varepsilon^m\xi},$$

$$P_{*0} f(\xi_*,\tau_0,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+\Pi_{*0} u(x,\tau_0,\varepsilon)+Q_* u(\xi_*,t,\varepsilon)+$$
$$+ P_{*0}(\xi_*,\tau_0,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - \Pi_0 f(x,\tau_0,\varepsilon) -$$
$$- Q_* f(\xi_*,t,\varepsilon) - \bar{f}(x,t,\varepsilon)]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0,\, x=1-\varepsilon^m\xi_*},$$

$$\Pi_i f(x,\tau_i,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+\Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - f(\bar{u}(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon)]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0+t_i},$$

$$P_i f(\xi,\tau_i,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t_i,\varepsilon)+\Pi_{i0} u(x,\tau_i,\varepsilon)+Qu(\xi,t,\varepsilon)+P_i(\xi,\tau_i,\varepsilon),x,t,\varepsilon) -$$
$$- \Pi_i f(x,\tau_i,\varepsilon) - Qf(\xi,t,\varepsilon) - \bar{f}(x,t,\varepsilon)]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0+t_i,\, x=\varepsilon^m\xi},$$

$$P_{*i} f(\xi_*,\tau_i,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+\Pi_{i0} u(x,\tau_i,\varepsilon)+Q_* u(\xi_*,t,\varepsilon)+$$
$$+ P_{*ik}(\xi_*,\tau_i,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - \Pi_{*i} f(x,\tau_i,\varepsilon) -$$
$$- Q_* f(\xi_*,t,\varepsilon) - \bar{f}(x,t,\varepsilon)]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0+t_i,\, x=1-\varepsilon^m\xi_*}.$$

Враховуючи вигляд k-ї похідної за параметром ε записаних вище функцій, маємо

$$\Pi_0 f(x,\tau_0,\varepsilon) = [f(\bar{u}(x,t,\varepsilon)+\Pi_0 u(x,\tau_0,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - f(\bar{u}(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon)]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0} =$$
$$= [f(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0) - f(\bar{u}_0(x,0),x,0,0)] +$$
$$+ \varepsilon\left(\left[f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_0 u(x,\tau_0),x,0,0)\Pi_{01}u(x,\tau_0)\right] + G_1(x,\tau_0)\right) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^k\left(\left[f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00} u(x,\tau_0),x,0,0)\Pi_{0k}u(x,\tau_0)\right] + G_k(x,\tau_0)\right) + \ldots,$$

де функції $G_k(x,\tau_0)$, $k\in\mathbf{N}$, залежать від функцій $\Pi_{00}u(x,\tau_0), \Pi_{01}u(x,\tau_0),\ldots,\Pi_{0,k-1}u(x,\tau_0)$;

$$Qf(\xi,t,\varepsilon) = [f(\bar u(x,t,\varepsilon)+Qu(\xi,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - f(\bar u(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon)]\Big|_{x=\varepsilon^m\xi} =$$
$$= [f(\bar u_0(0,t)+Q_0u(\xi,t),0,t,0) - f(\bar u_0(0,t),0,t,0)] +$$
$$+\varepsilon\left(\left[f'_u(\bar u_0(0,t)+Q_0u(\xi,t),0,t,0)Q_1u(\xi,t)\right] + F_1(\xi,t)\right) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^k\left(\left[f'_u(\bar u_0(0,t)+Q_0u(\xi,t),0,t,0)Q_ku(\xi,t)\right] + F_k(\xi,t)\right) + \ldots,$$

де функції $F_k(\xi,t)$, $k\in\mathbf{N}$, залежать від функцій $Q_0u(\xi,t), Q_1u(\xi,t),\ldots,Q_{k-1}u(\xi,t)$;

$$Q_*f(\xi_*,t,\varepsilon) = [f(\bar u(x,t,\varepsilon)+Q_*u(\xi_*,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon) - f(\bar u(x,t,\varepsilon),x,t,\varepsilon)]\Big|_{x=1-\varepsilon^m\xi_*} =$$
$$= [f(\bar u_0(1,t)+Q_{*0}u(\xi_*,t),1,t,0) - f(\bar u_0(1,t),1,t,0)] +$$
$$+\varepsilon\left(\left[f'_u(\bar u_0(1,t)+Q_{*0}u(\xi_*,t),1,t,0)Q_{*1}u(\xi_*,t)\right] + F_{*1}(\xi_*,t)\right) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^k\left(\left[f'_u(\bar u_0(1,t)+Q_{*0}u(\xi_*,t),1,t,0)Q_{*k}u(\xi_*,t)\right] + F_{*k}(\xi_*,t)\right) + \ldots,$$

де функції $F_{*k}(\xi,t)$, $k\in\mathbf{N}$, залежать від функцій $Q_{*0}u(\xi_*,t), Q_{*1}u(\xi_*,t),\ldots,Q_{*,k-1}u(\xi_*,t)$;

$$P_0f(\xi,\tau_0,\varepsilon) = \Big[f(\bar u(x,t,\varepsilon)+\Pi_0u(x,\tau_0,\varepsilon)+Qu(\xi,t,\varepsilon)+P_0(\xi,\tau_0,\varepsilon),x,t,\varepsilon) -$$
$$-\Pi_0f(x,\tau_0,\varepsilon) - Qf(\xi,t,\varepsilon) - \bar f(x,t,\varepsilon)\Big]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0,x=\varepsilon^m\xi} =$$
$$= \Big[f(\bar u_0(x,0)+\Pi_{00}u(0,\tau_0)+Q_0u(\xi,0)+P_{00}u(\xi,\tau_0),0,0,0) -$$
$$- f(\bar u_0(x,0)+\Pi_{00}u(0,\tau_0),0,0,0) - f(\bar u_0(0,0)+Q_0u(\xi,0),0,0,0) +$$
$$+ f(\bar u_0(0,0),0,0,0)\Big] + \varepsilon\Big(\Big[f'_u(\bar u_0(x,0)+\Pi_{00}u(0,\tau_0)+Q_0u(\xi,0) +$$
$$+ P_{00}u(\xi,\tau_0),0,0,0)P_{01}u(\xi,\tau_0)\Big] + H_{01}(\xi,\tau_0)\Big) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^k\Big(\Big[f'_u(\bar u_0(x,0)+\Pi_{00}u(0,\tau_0) +$$
$$+ Q_0u(\xi,0)+P_{00}u(\xi,\tau_0),0,0,0)P_{0k}u(\xi,\tau_0)\Big] + H_{0k}(\xi,\tau_0)\Big) + \ldots,$$

де функції $H_{0k}(x,\tau_0)$, $k\in\mathbf{N}$, залежать від функцій $P_{00}u(\xi,\tau_0), P_{01}u(\xi,\tau_0),\ldots,P_{0,k-1}u(\xi,\tau_0)$;

$$P_{*0}f(\xi_*,\tau_0,\varepsilon) = \Big[f(\bar u(x,t,\varepsilon)+\Pi_{*0}u(x,\tau_0,\varepsilon)+Q_*u(\xi,t,\varepsilon)+P_{*0}(\xi_*,\tau_0,\varepsilon),x,t,\varepsilon) -$$
$$-\Pi_0f(x,\tau_0,\varepsilon) - Q_*f(\xi_*,t,\varepsilon) - \bar f(x,t,\varepsilon)\Big]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0,x=1-\varepsilon^m\xi_*} =$$

$$= \Big[f(\bar{u}_0(1,0) + \Pi_{00}u(1,\tau_0) + Q_{*0}u(\xi_*,0) + P_{*00}u(\xi_*,\tau_0), 1,0,0) -$$

$$- f(\bar{u}_0(1,0) + \Pi_{*00}u(1,\tau_0), 1,0,0) - f(\bar{u}_0(1,0) + Q_{*0}u(\xi_*,0), 1,0,0) +$$

$$+ f(\bar{u}_0(1,0), 1,0,0)\Big] + \varepsilon\Big(\Big[f'_u(\bar{u}_0(1,0) + \Pi_{*00}u(1,\tau_0) +$$

$$+ Q_{*0}u(\xi_*,0) + P_{*00}u(\xi_*,\tau_0), 1,0,0)P_{*01}u(\xi_*,\tau_0)\Big] + H_{*01}(\xi_*,\tau_0)\Big) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^k\Big(\Big[f'_u(\bar{u}_0(1,0) + \Pi_{*00}u(1,\tau_0) +$$

$$+ Q_{*0}u(\xi_*,0) + P_{*00}u(\xi_*,\tau_0), 1,0,0)P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)\Big] + H_{*0k}(\xi_*,\tau_0)\Big) + \ldots,$$

де функції $H_{*0k}(\xi_*,\tau_0)$, $k \in \mathbf{N}$, залежать від функцій $P_{*00}u(\xi_*,\tau_0)$, $P_{*01}u(\xi_*,\tau_0), \ldots$ $\ldots, P_{0,k-1}u(\xi_*,\tau_0)$;

$$\Pi_i f(x,\tau_i,\varepsilon) = \Big[f(\bar{u}(x,t_i,\varepsilon) + \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon), x,t,\varepsilon) - f(\bar{u}(x,t,\varepsilon), x,t,\varepsilon)\Big]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0+t_i} =$$

$$= \Big[f(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,\tau_i), x,t_i,0) - f(\bar{u}_0(x,t_i), x,t_i,0)\Big] +$$

$$+ \varepsilon\Big(\Big[f'_u(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,\tau_i), x,t_i,0)\cdot\Pi_{i1}u(x,\tau_i)\Big] + G_{i1}(x,\tau_i)\Big) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^k\Big(\Big[f'_u(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,\tau_i), x,t_i,0)\cdot\Pi_{ik}u(x,\tau_i)\Big] + G_{ik}(x,\tau_i)\Big) + \ldots,$$

де функції $G_{ik}(x,\tau_i)$, $k \in \mathbf{N}$, залежать від функцій $\Pi_{i0}u(x,\tau_i), \Pi_{i1}u(x,\tau_i), \ldots, \Pi_{i,k-1}u(x,\tau_i)$;

$$P_i f(\xi,\tau_i,\varepsilon) = \Big[f(\bar{u}(x,t_i,\varepsilon) + \Pi_{i0}u(x,\tau_i,\varepsilon) + Qu(\xi,t_i,\varepsilon) + P_{ik}(\xi,\tau_i,\varepsilon), x,t_i,\varepsilon) -$$

$$- \Pi_i f(x,\tau_i,\varepsilon) - Qf(\xi,t,\varepsilon) - \bar{f}(x,t,\varepsilon)\Big]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0+t_i;\, x=\varepsilon^m\xi} =$$

$$= \Big[f(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i) + Q_0u(\xi,t_i) + P_{i0}u(\xi,\tau_i), 0,t_i,0) -$$

$$- f(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i), 0,t_i,0) - f(\bar{u}_0(0,t_i) + Q_0u(\xi,t_i), 0,t_i,0) +$$

$$+ f(\bar{u}_0(0,t_i), 0,t_i,0)\Big] + \varepsilon\Big(\Big[f'_u(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i) +$$

$$+ Q_0u(\xi,t_i) + P_{i0}u(\xi,\tau_i), 0,t_i,0)P_{i1}u(\xi,\tau_i)\Big] + H_{i1}(\xi,\tau_i)\Big) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^k\Big(\Big[f'_u(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i) +$$

$$+ Q_0u(\xi,t_i) + P_{i0}u(\xi,\tau_i), 0,t_i,0)P_{ik}u(\xi,\tau_i)\Big] + H_{ik}(\xi,\tau_i)\Big) + \ldots,$$

де функції $H_{ik}(x,\tau_i)$, $k\in\mathbf{N}$, залежать від функцій $P_{i0}u(\xi,\tau_i), \Pi_{i1}u(\xi,\tau_i),\ldots,\Pi_{i,k-1}u(x,\tau_i)$;

$$P_{*i}f(\xi_*,\tau_i,\varepsilon)=\Big[f(\bar u(x,t,\varepsilon)+\Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon)+Q_*u(\xi_*,t_i,\varepsilon)+P_{*ik}(\xi_*,\tau_i,\varepsilon),x,t_i,\varepsilon)-$$
$$-\Pi_i f(x,\tau_i,\varepsilon)-Q_*f(\xi_*,t,\varepsilon)-\bar f(x,t,\varepsilon)\Big]\Big|_{t=\varepsilon^n\tau_0+t_i,\,x=\varepsilon^m\xi_*+1}=$$
$$=\Big[f(\bar u_0(1,t_i)+\Pi_{i0}u(1,\tau_i)+Q_0u(\xi_*,t_i)+P_{*i0}u(\xi_*,\tau_i),1,t_i,0)-$$
$$-f(\bar u_0(1,t_i)+\Pi_{i0}u(1,\tau_i),1,t_i,0)-f(\bar u_0(1,t_i)+Q_{*0}u(\xi_*,t_i),1,t_i,0)+$$
$$+f(\bar u_0(1,t_i),1,t_i,0)\Big]+\varepsilon\Big(\Big[f'_u(\bar u_0(1,t_i)+\Pi_{i0}u(1,\tau_i)+Q_{*0}u(\xi_*,t_i)+$$
$$+P_{*i0}u(\xi_*,\tau_i),1,t_i,0)P_{*i1}u(\xi_*,\tau_i)\Big]+H_{*i1}(\xi_*,\tau_i)\Big)+\ldots$$
$$\ldots+\varepsilon^k\Big(\Big[f'_u(\bar u_0(1,t_i)+\Pi_{i0}u(1,\tau_i)+Q_{*0}u(\xi_*,t_i)+$$
$$+P_{*i0}u(\xi_*,\tau_i),1,t_i,0)P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)\Big]+H_{*ik}(\xi_*,\tau_i)\Big)+\ldots,$$

де функції $H_{*ik}(\xi_*,\tau_i)$, $k\in\mathbf{N}$, залежать від функцій $P_{*i0}u(\xi_*,\tau_i)$, $P_{*i1}u(\xi_*,\tau_i),\ldots$ $\ldots,P_{*i,k-1}u(\xi_*,\tau_i)$.

Прирівнюючи в (16) коефіцієнти при однакових степенях ε, отримуємо систему співвідношень для регулярної частини асимптотики (6) вигляду

$$\bar f(\bar u_0(x,t),x,t,0)=0, \tag{17}$$

$$\bar f'_u(\bar u_0(x,t),x,t,0)\bar u_k(x,t)=A_k(x,t),\ k\in\mathbf{N}, \tag{18}$$

де функції $A_k(x,t)$, $k\in\mathbf{N}$, рекурентно визначаються після знаходження функцій $\bar u_0(x,t)$, $\bar u_1(x,t),\ldots,\bar u_{k-1}(x,t)$.

Далі вважаємо, що система (18) має розв'язок $\bar u_0(x,t)$, $\bar u_1(x,t)$, $\ldots$, $(x,t)\in[0;1]\times$ $\times[0;+\infty)$, такий, що для кожного $k\ge 0$ справджується умова

$$\frac{\partial\bar u_k(x,t)}{\partial x}\neq 0,\quad (x,t)\in[0;1]\times[0;+\infty).$$

Спочатку виконаємо побудову сингулярної частини в (7) на проміжку $[0;t_1)$. При цьому побудова сингулярної частини асимптотичного розкладу (7) на проміжку $[0;t_1)$ проводиться з урахуванням початкової умови (2) та крайових умов (3).

З початкової умови (2) знаходимо

$$u(x,0,\varepsilon)=\bar u(x,0,\varepsilon)+\Pi u(x,0,\varepsilon)=\bar u(x,0,\varepsilon)+\Pi_0u(x,0,\varepsilon)+$$
$$+P_0u(\xi,0,\varepsilon)+P_{*0}u(\xi_*,0,\varepsilon)+Qu(\xi,0,\varepsilon)+Q_*u(\xi_*,0,\varepsilon)=\varphi(x).$$

Урахування асимптотичних розкладів для примежових і кутових функцій (8) – (15) та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε в (16) приводить до співвідношень вигляду

$$\Pi_{00}u(x,0)+\bar{u}_0(x,0)=\varphi(x),$$

$$\Pi_{0k}u(x,0)+\bar{u}_k(x,0)=0,\quad k\geq 1,$$

$$Q_k u(\xi,0)+P_{0k}u(\xi,0)=0,\quad k\geq 0,$$

$$P_{*0k}u(\xi_*,0)+Q_{*k}u(\xi_*,0)=0,\quad k\geq 0.$$

З крайової умови (3) при $x=0$ маємо

$$\frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=\frac{\partial \bar{u}(0,t,\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial \Pi u(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial \bar{u}(0,t,\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial \Pi_0 u(0,\tau_0,\varepsilon)}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial P_0 u(0,\tau_0,\varepsilon)}{\partial \xi}+\frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial Q u(0,t,\varepsilon)}{\partial \xi}=0. \quad (19)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε в (19), отримуємо співвідношення

$$\frac{\partial Q_k u(0,t)}{\partial \xi}=0,\quad 0\leq k<m,$$

$$\frac{\partial Q_k u(0,t)}{\partial \xi}=-\frac{\partial \bar{u}_{k-m}(0,t)}{\partial x},\quad k\geq m,$$

$$\frac{\partial P_{0k} u(0,\tau_0)}{\partial \xi}=0,\quad 0\leq k<m,$$

$$\frac{\partial P_{0k} u(0,\tau_0)}{\partial \xi}=-\frac{\partial \Pi_{0,k-m} u(0,\tau_0)}{\partial x},\quad k\geq m.$$

З крайової умови (3) при $x=1$ маємо

$$\frac{\partial u(1,t,\varepsilon)}{\partial x}=\frac{\partial \bar{u}(1,t,\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial \Pi u(1,t,\varepsilon)}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial \bar{u}(1,t,\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial \Pi_0 u(1,\tau_0,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial P_{*0} u(0,\tau_0,\varepsilon)}{\partial \xi_*}-\frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial Q_* u(0,t,\varepsilon)}{\partial \xi}=0. \quad (20)$$

Аналогічно, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях параметра ε в (20), отримуємо співвідношення

$$\frac{\partial Q_{*k} u(0,t)}{\partial \xi_*}=0,\quad 0\leq k<m,$$

$$\frac{\partial Q_{*k} u(0,t)}{\partial \xi_*}=\frac{\partial \bar{u}_{k-m}(1,t)}{\partial x},\quad k\geq m,$$

$$\frac{\partial P_{*0k} u(0,\tau_0)}{\partial \xi_*} = 0, \quad 0 \le k < m,$$

$$\frac{\partial P_{*0k} u(0,\tau_0)}{\partial \xi_*} = \frac{\partial \Pi_{0,k-m} u(1,\tau_0)}{\partial x}, \quad k \ge m.$$

Таким чином, примежові функції $\Pi_{0k}u(x,\tau_0)$, $k \ge 0$, визначаються як розв'язки задач Коші вигляду

$$a_0(x)\frac{\partial \Pi_{00} u(x,\tau_0)}{\partial \tau_0} = f(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_{00}u(x,\tau_0), x, 0, 0), \tag{21}$$

$$\Pi_{00}u(x,0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x,0), \tag{22}$$

$$a_0(x)\frac{\partial \Pi_{0k} u(x,\tau_0)}{\partial \tau_0} = f'_u(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_{00}u(x,\tau_0), x, 0, 0)\Pi_{0k}u(x,\tau_0) + R_{0k}(x,\tau_0), \tag{23}$$

$$\Pi_{0k}u(x,0) = -\bar{u}_k(x,0), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{24}$$

Тут $R_{0k}(x,\tau_0)$, $k \in \mathbf{N}$, рекурентно визначаються через функції $\Pi_{00}u(x,\tau_0)$, $\Pi_{01}u(x,\tau_0), \ldots$ $\ldots, \Pi_{0,k-1}u(x,\tau_0)$, де функції $\bar{u}_k(x,t)$, $k \in \mathbf{N}$, — коефіцієнти при ε^k в регулярній частині асимптотики (6).

Лема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) мають місце припущення $\Pi_{1^0} - \Pi_{3^0}$;

2) $a_0(x) > 0$ *для всіх* $x \in [0;1]$;

3) функція $\Pi_{00}u(x,\tau_0)$, *що є розв'язком задачі (21), (22), задовольняє для деяких додатних сталих* C_0, γ_0 *нерівність*

$$|\Pi_{00}u(x,\tau_0)| \le C_0 e^{-\gamma_0\tau_0}, \quad \tau_0 \ge 0;$$

4) похідна $f'_u(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_{00}u(x,\tau_0), x, 0, 0) < 0$ *для всіх* $x \in [0;1]$, $\tau_0 \ge 0$.

Тоді при кожному натуральному числі k задача Коші (23), (24) має розв'язок $\Pi_{0k}u(x,\tau_0)$, *який задовольняє співвідношення*

$$\lim_{\tau_0 \to +\infty} |\Pi_{0k}u(x,\tau_0)| = 0.$$

Більш того, існують такі додатні сталі C_k, γ_k, $k \in \mathbf{N}$, *що для функції* $\Pi_{0k}u(x,\tau_0)$, $k \in \mathbf{N}$, *справджується нерівність*

$$|\Pi_{0k}u(x,\tau_0)| \le C_k e^{-\gamma_k\tau_0}, \quad \tau_0 \ge 0.$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. Розглянемо спочатку випадок, коли $k = 1$. У цьому випадку функція $R_{01}(x,\tau_0) = G_1(x,\tau_0) - a_1(x)\dfrac{\partial \Pi_{00}u(x,\tau_0)}{\partial \tau_0}$ (див.

розклад за малим параметром ε для функції $\Pi_0 f$), а розв'язок задачі Коші (23), (24) має вигляд

$$\Pi_{01}u(x,\tau_0) = -\bar{u}_1(x,0)\exp\left(\int\limits_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)+$$

$$+\frac{1}{a_0(x)}\int\limits_0^{\tau_0}\exp\left(\frac{1}{a_0(x)}\int\limits_s^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,s),x,0,0)ds\right)R_{01}(x,s)ds.$$

Функція $R_{01}(x,\tau_0)$ задовольняє нерівність

$$\Big|R_{01}(x,\tau_0)\Big| = \Big|f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0)\bar{u}_1(x,0)+$$

$$+f'_t(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0)n\tau_0+f'_\varepsilon(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0)-$$

$$-f'_u(\bar{u}_0(x,0),x,0,0)\bar{u}_1(x,0)-f'_t(\bar{u}_0(x,0),x,0,0)n\tau_0-$$

$$-f'_\varepsilon(\bar{u}_0(x,0),x,0,0)-a_1(x)\frac{\partial\Pi_{00}u(x,\tau_0)}{\partial\tau_0}\Big| \le (c_1\tau_0+c_0)\,e^{-\gamma_0\tau_0},$$

де c_0, c_1 — деякі сталі, а отже,

$$|\Pi_{01}u(x,\tau_0)| = \left|\bar{u}_1(x,0)\exp\left(\int\limits_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{1}{a_0(x)}\int\limits_0^{\tau_0}\exp\left(\frac{1}{a_0(x)}\int\limits_\sigma^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\sigma),x,0,0)d\sigma\right)R_{01}(x,\sigma)d\sigma\right|\le\right.$$

$$\le|\bar{u}_1(x,0)|\exp\left(\int\limits_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)+$$

$$+\left|\frac{1}{a_0(x)}\int\limits_0^{\tau_0}\exp\left(\frac{1}{a_0(x)}\int\limits_\sigma^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\sigma),x,0,0)d\sigma\right)R_{01}(x,\sigma)d\sigma\right|.$$

Оскільки $\Pi_{00}u(x,\tau_0)\to 0$ при $\tau_0\to\infty$ і згідно з умовою 4 виконується нерівність $f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0) < 0$, то враховуючи припущення Π_{3^0}, маємо, що існують такі числа $0<\kappa<\gamma_0$, $\tau_{00}>0$, для яких справджується нерівність

$$f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0) < -\kappa \quad \text{для всіх} \quad \tau_0\ge\tau_{00}.$$

Звідси випливає, що

$$\int\limits_{\tau_{00}}^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau \le -\kappa(\tau_0-\tau_{00}),$$

а отже,

$$\exp\left(\int\limits_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar u_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)\le Ce^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})}$$

для деякої додатної сталої C.

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned}|\Pi_{01}u(x,\tau_0)| &\le C|\bar u_1(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})}+\\ &+\max_{x\in[0;1]}\left(\frac{1}{a_0(x)}\right)\int\limits_0^{\tau_0}Ce^{-\kappa(\tau_0-\sigma-\tau_{00})}\left(c_1\sigma+c_0\right)e^{-\gamma_0\sigma}d\sigma\le\\ &\le C|\bar u_1(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})}+\tilde C\left(\int\limits_0^{\tau_0}e^{-\kappa(\tau_0-\sigma)}(c_1\sigma+c_0)e^{-\gamma_0\sigma}d\sigma\right)\le\\ &\le C|\bar u_1(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})}+\tilde C\left(\int\limits_0^{\tau_0}e^{-\kappa\tau_0}(c_1\sigma+c_0)e^{(\kappa-\gamma_0)\sigma}d\sigma\right)\le\\ &\le C|\bar u_1(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})}+\\ &+\tilde C\left(\left[\frac{1}{\kappa-\gamma_0}c_1\tau_0-\frac{c_1}{(\kappa-\gamma_0)^2}+\frac{1}{\kappa-\gamma_0}c_0\right]e^{(\kappa-\gamma_0)\tau_0}+\right.\\ &\left.+\frac{c_1}{(\kappa-\gamma_0)^2}-\frac{c_0}{\kappa-\gamma_0}\right)e^{-\kappa\tau_0},\end{aligned}$$

де

$$\tilde C=Ce^{\kappa\tau_{00}}\max_{x\in[0;1]}\left(\frac{1}{a_0(x)}\right).$$

Очевидно, що для кожного $\kappa>0$ знайдеться таке κ_1, що $0<\kappa_1<\kappa$ і виконується нерівність

$$e^{-\kappa\tau_0}\tau_0\le\tilde C_1e^{-\kappa_1\tau_0},$$

звідки випливає

$$|\Pi_{01}u(x,\tau_0)|\le C_1e^{-\gamma_1\tau_0},\quad \tau_0\ge0,$$

для деяких додатних сталих C_1, γ_1 та всіх $\tau_0\ge0$.

Нехай тепер лема є справедливою для деякого значення $k=s>1$, і покажемо її справедливість для $k=s+1$. Для цього розглянемо задачу Коші (23), (24) для $k=s+1$.

Розв'язок цієї задачі можна записати у вигляді

$$\Pi_{0,s+1}u(x,\tau_0) = -\bar{u}_{s+1}(x,0)\exp\left(\int_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)+$$

$$+\frac{1}{a_0(x)}\int_0^{\tau_0}\exp\left(\frac{1}{a_0(x)}\int_0^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\sigma),x,0,0)d\sigma\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{a_0(x)}\int_0^{\sigma}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\sigma),x,0,0)d\sigma\right)R_{0,s+1}(x,\sigma)d\sigma =$$

$$= -\bar{u}_{s+1}(x,0)\exp\left(\int_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)+$$

$$+\frac{1}{a_0(x)}\int_0^{\tau_0}\exp\left(\frac{1}{a_0(x)}\int_\sigma^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\sigma),x,0,0)d\sigma\right)R_{0,s+1}(x,\sigma)d\sigma.$$

Функції $R_{0,s+1}(x,\tau_1)$ поліноміально залежать від $\Pi_{0l}u(x,\tau_0)$, $l=\overline{1,s}$, а отже, для цієї функції виконується нерівність

$$|R_{0,s+1}(x,\tau_1)| \le \left(c_s e^{-\gamma_s\tau_0}+c_{s-1}e^{-\gamma_{s-1}\tau_0}+\ldots+c_0e^{-\gamma_0\tau_0}\right)\tau_0^{s+1}, \quad \tau_0\ge 0,$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_s$ та $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — деякі додатні сталі.

Звідси для примежової функції $\Pi_{0,s+1}u(x,\tau_0)$ отримуємо

$$|\Pi_{0,s+1}u(x,\tau_0)| = \left|\bar{u}_{s+1}(x,0)\exp\left(\int_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_0(x)}\int_0^{\tau_0}\exp\left(\frac{1}{a_0(x)}\int_\sigma^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\sigma),x,0,0)d\sigma\right)R_{0,s+1}(x,\sigma)d\sigma\right| \le$$

$$\le |\bar{u}_{s+1}(x,0)|\exp\left(\int_0^{\tau_0}\frac{1}{a_0(x)}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right)+$$

$$+\frac{1}{a_0(x)}\int_0^{\tau_0}\exp\left(\frac{1}{a_0(x)}\int_\sigma^{\tau_0}f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\sigma),x,0,0)d\sigma\right)|R_{0,s+1}(x,\sigma)|\,d\sigma.$$

Оскільки $\Pi_{00}u(x,\tau_0) \to 0$ при $\tau_0 \to \infty$ і згідно з умовою 4 виконується нерівність $f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0) < 0$, то, враховуючи припущення Π_{3^0}, можемо стверджувати, що існують такі числа $\tau_{00} > 0$, $\kappa > 0$, що $\kappa < \gamma_k$ для довільного $k = \overline{0,s}$, та справджується нерівність

$$f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau_0),x,0,0) < -\kappa \quad \text{для всіх} \quad \tau_0 \geq \tau_{00}.$$

Звідси випливає, що

$$\int\limits_{\tau_{00}}^{\tau_0} f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau \leq -\kappa(\tau_0-\tau_{00}),$$

а отже,

$$\exp\left(\int\limits_0^{\tau_0} \frac{1}{a_0(x)} f'_u(\bar{u}_0(x,0)+\Pi_{00}u(x,\tau),x,0,0)d\tau\right) \leq Ce^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})}$$

для деякої сталої $C > 0$.

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned}
|\Pi_{0,s+1}u(x,\tau_0)| &\leq C|\bar{u}_{s+1}(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})} + \max_{x\in[0;1]}\left(\frac{1}{a_0(x)}\right)\int\limits_0^{\tau_0} Ce^{-\kappa(\tau_0-\sigma-\tau_{00})}\times \\
&\times\left(c_s e^{-\gamma_s\sigma} + c_{s-1}e^{-\gamma_{s-1}\sigma} + \ldots + c_0 e^{-\gamma_0\sigma}\right)\sigma^{s+1}d\sigma \leq \\
&\leq C|\bar{u}_k(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})} + \\
&+ \tilde{C}\int\limits_0^{\tau_0} e^{-\kappa(\tau_0-\sigma)}\left(c_s e^{-\gamma_s\sigma} + c_{s-1}e^{-\gamma_{s-1}\sigma} + \ldots + c_0 e^{-\gamma_0\sigma}\right)\sigma^{s+1}d\sigma \leq \\
&\leq C|\bar{u}_k(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})} + \\
&+ \tilde{C}e^{-\kappa\tau_0}\int\limits_0^{\tau_0}\left(c_s e^{-\gamma_s\sigma} + c_{s-1}e^{-\gamma_{s-1}\sigma} + \ldots + c_0 e^{-\gamma_0\sigma}\right)e^{\kappa\sigma}\sigma^{s+1}d\sigma. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Оскільки для кожного $\kappa > 0$ існують такі $\tilde{\kappa} > 0$, $\tilde{C}_0 > 0$, що виконується нерівність

$$e^{-\kappa\tau_0}\tau_0^{s+1} \leq \tilde{C}_0 e^{-\tilde{\kappa}\tau_0},$$

то

$$\begin{aligned}
&|\Pi_{0,s+1}u(x,\tau_0)| \leq \\
&\leq C|\bar{u}_k(x,0)|e^{-\kappa(\tau_0-\tau_{00})} + \tilde{C}_2 e^{-\kappa\tau_0}\left(\int\limits_0^{\tau_0} e^{-\kappa_0\sigma}e^{\kappa\sigma}d\sigma + \ldots + \int\limits_0^{\tau_0} e^{-\kappa_s\sigma}e^{\kappa\sigma}d\sigma\right),
\end{aligned}$$

де $\tilde{C}_2, \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_s$ — деякі додатні сталі.

Очевидно, що звідси і з (25) випливає нерівність

$$|\Pi_{0,s+1}u(x,\tau_0)| \le C_{s+1}e^{-\gamma_{s+1}\tau_0}$$

для деяких додатних сталих C_{s+1}, γ_{s+1} та всіх $\tau_0 \ge 0$.

Лему доведено.

Примежові функції $Q_k u(\xi,t)$, $k \ge 0$, визначаються як розв'язки крайових задач вигляду

$$-b_0(0)\frac{\partial^2 Q_0 u(\xi,t)}{\partial \xi^2} = f(\bar{u}_0(0,t) + Q_0 u(\xi,t), 0, t, 0), \tag{26}$$

$$\frac{\partial Q_0 u(0,t)}{\partial \xi} = 0, \quad \lim_{\xi\to\infty} Q_0 u(\xi,t) = 0; \tag{27}$$

$$-b_0(0)\frac{\partial^2 Q_k u(\xi,t)}{\partial \xi^2} = f'_u(\bar{u}_0(0,t) + Q_0 u(\xi,t), 0, t, 0) Q_k u(\xi,t) + Z_k(\xi,t), \tag{28}$$

$$\frac{\partial Q_k u(0,t)}{\partial \xi} = 0, \quad \lim_{\xi\to\infty} Q_k u(\xi,t) = 0, \quad 1 \le k < m, \tag{29}$$

$$-b_0(0)\frac{\partial^2 Q_k u(\xi,t)}{\partial \xi^2} = f'_u(\bar{u}_0(0,t) + Q_0 u(\xi,t), 0, t, 0) Q_k u(\xi,t) + Z_k(\xi,t), \tag{30}$$

$$\frac{\partial Q_k u(0,t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{u}_{k-m}(0,t)}{\partial x}, \quad \lim_{\xi\to\infty} Q_k u(\xi,t) = 0, \quad k \ge m, \tag{31}$$

де функції $Z_k(\xi,\tau_0)$, $k \in \mathbf{N}$, рекурентно знаходяться після знаходження функцій $Q_0 u(\xi,t)$, $Q_1 u(\xi,t), \ldots, Q_{k-1}u(\xi,t)$.

В якості розв'язку крайової задачі (26), (27) можна взяти функцію $Q_0 u(\xi,t) \equiv 0$ (див. розклад функції $Qu(\xi,t)$ в ряд за малим параметром). Аналогічно розв'язком задачі (28), (29) є функція $Q_k u(\xi,t) \equiv 0$ при $k < m$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) мають місце припущення Π_{1^0} – Π_{3^0};

2) $b_0(x) > 0$ *для всіх* $x \in [0;1]$.

Тоді при кожному натуральному $k \ge m$ *існує розв'язок крайової задачі (30), (31)* $Q_k u(\xi,t)$, *для якого при довільному додатному числі* T *існують такі додатні сталі* C_k, γ_k, $k \ge m$, *що функція* $Q_k u(\xi,t)$, $k \ge m$, *задовольняє співвідношення*

$$|Q_k u(\xi,t)| \le C_k e^{-\gamma_k \xi}, \quad \xi \ge 0, \quad t \in [0;T].$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. Розглянемо спочатку випадок, коли $k = m$. Тоді функція $Z_m(\xi, t) \equiv 0$ і розв'язок відповідної крайової задачі запишеться у вигляді $C_1(t) \exp(\lambda\xi) + C_2(t) \exp(-\lambda\xi)$, де

$$\lambda = \lambda(t) = \sqrt{-\frac{1}{b_0(0)} f'_u(\bar{u}_0(0,t), 0, t, 0)} > 0, \quad t \in [0; T].$$

Враховуючи крайову умову (31), розв'язок задачі (30), (31) записуємо у вигляді

$$Q_m u(\xi, t) = \frac{\partial \bar{u}_0(0,t)}{\partial x} e^{-\lambda\xi}.$$

Таким чином, маємо оцінку вигляду

$$|Q_m u(\xi, t)| \leq \left| \frac{\partial \bar{u}_0(0,t)}{\partial x} e^{-\lambda\xi} \right| \leq C_m e^{-\lambda\xi}.$$

Припустимо, що лема 2 є справедливою при деякому натуральному $k > m$, і покажемо її справедливість при $k + 1$.

Оскільки загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння, що відповідає крайовій задачі (30), (31) (t вважаємо параметром), записується у вигляді $C_1(t) \exp(\lambda\xi) + C_2(t) \exp(\lambda\xi)$, де

$$\lambda = \lambda(t) = \sqrt{-\frac{1}{b_0(0)} f'_u(\bar{u}_0(0,t), 0, t, 0)} > 0, \quad t \geq 0,$$

то, враховуючи крайову умову (31), функцію Гріна для задачі (30), (31) записуємо у вигляді

$$G(\xi, s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\lambda} \dfrac{\partial \bar{u}_{k+1-m}(0,t)}{\partial x} \varphi(s) \left(e^{\lambda\xi} - e^{-\lambda\xi} \right), & 0 \leq \xi \leq s, \\ \psi(s) e^{-\lambda\xi}, & s < \xi < \infty, \end{cases} \tag{32}$$

де $\bar{u}_{k+1-m}(x, t)$ — коефіцієнт регулярної частини асимптотики (6).

Функції $\varphi(s)$ та $\psi(s)$ визначаються з системи рівнянь

$$\varphi(s) \left(-\frac{1}{2\lambda} \frac{\bar{u}_{k+1-m}(0,t)}{\partial x} \right) \left(e^{\lambda s} - e^{-\lambda s} \right) = \psi(s) e^{-\lambda s},$$

$$-\lambda\psi(s) e^{-\lambda s} + \frac{1}{2} \frac{\bar{u}_0(0,t)}{\partial x} \varphi(s) \left(e^{\lambda s} + e^{-\lambda s} \right) = -\frac{1}{b_0(0)}$$

і мають вигляд

$$\varphi(s) = -\frac{1}{b_0(0)} \left(\frac{\partial \bar{u}_{k+1-m}(0,t)}{\partial x} \right)^{-1} e^{-\lambda s}, \quad \psi(s) = \frac{1}{2\lambda b_0(0)} \left(e^{\lambda s} - e^{-\lambda s} \right).$$

Таким чином, функція Гріна має вигляд

$$G(\xi, s) = -\frac{1}{2\lambda b_0(0)} \begin{cases} e^{-\lambda(s-\xi)} - e^{-\lambda(s+\xi)}, & 0 \le \xi < s, \\ e^{-\lambda(\xi-s)} - e^{-\lambda(s+\xi)}, & s \le \xi < \infty, \end{cases}$$

а розв'язок крайової задачі (30), (31) можна записати за допомогою формули

$$Q_{k+1}u(\xi, t) = \int_0^\infty G(\xi, s) Z_{k+1}(s, t) ds, \quad t \ge 0.$$

Оскільки функції $Z_{k+1}(\xi, t)$, $k \in \mathbf{N}$, поліноміально залежать від $Q_{0,l}u(\xi, t)$, $l = \overline{1, k}$, то виконується нерівність вигляду

$$|Z_{k+1}(\xi, t)| \le \left(c_k e^{-\gamma_k \xi} + c_{k-1} e^{-\gamma_{k-1}\xi} + \ldots + c_m e^{-\gamma_m \xi}\right) \xi^{k+1}, \quad \xi \ge 0, \ t \in [0; T], \tag{33}$$

де $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_k$ та $\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_k$ — деякі додатні сталі.

Таким чином, для примежової функції $Q_{k+1}u(\xi, t)$ знаходимо оцінку вигляду

$$|Q_{k+1}u(\xi, t)| = \left| \int_0^\infty G(\xi, s) Z_{k+1}(s) ds \right| \le \left| \int_0^\infty \frac{2}{2\lambda b_0(0)} e^{-\lambda|\xi - s|} Z_{k+1}(s, t) ds \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda b_0(0)} \left(\int_0^\xi e^{-\lambda(\xi-s)} |Z_{k+1}(s, t)| ds + \int_\xi^\infty e^{-\lambda(s-\xi)} |Z_{k+1}(s, t)| ds \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda b_0(0)} \left(\int_0^\xi e^{-\lambda(\xi-s)} \left(c_k e^{-\gamma_k s} + c_{k-1} e^{-\gamma_{k-1} s} + \ldots + c_m e^{-\gamma_m s}\right) s^{k+1} ds + \right.$$

$$\left. + \int_\xi^\infty e^{-\lambda(s-\xi)} \left(c_k e^{-\gamma_k s} + c_{k-1} e^{-\gamma_{k-1} s} + \ldots + c_m e^{-\gamma_m s}\right) s^{k+1} ds \right).$$

Оскільки для довільного γ_{m+l}, $l = \overline{0, k-m}$, існують такі додатні сталі κ_{m+l} та $\bar{c}_{m+l}$, $l = \overline{0, k-m}$, що $\kappa_{m+l} < \gamma_{m+l}$ і для довільного $l = \overline{0, k-m}$ виконується нерівність

$$c_{m+l} e^{-\gamma_{m+l} s} s^{k+1} \le \bar{c}_{m+l} e^{-\kappa_{m+l} s}, \quad s \ge 0,$$

то

$$|Q_{k+1}u(\xi,t)| \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda b_0(0)}\left[e^{-\lambda\xi}\left(\bar{c}_k\int\limits_0^\xi e^{(\lambda-\kappa_k)s}ds+\bar{c}_{k-1}\int\limits_0^\xi e^{(\lambda-\kappa_{k-1})s}ds+\ldots\ \bar{c}_m\int\limits_0^\xi e^{(\lambda-\kappa_m)s}ds\right)+\right.$$

$$\left.+\,e^{\lambda\xi}\left(\bar{c}_k\int\limits_\xi^\infty e^{-(\lambda+\kappa_k)s}ds+\bar{c}_{k-1}\int\limits_\xi^\infty e^{-(\lambda+\kappa_{k-1})s}ds+\ldots+\bar{c}_m\int\limits_\xi^\infty e^{-(\lambda+\kappa_m)s}ds\right)\right]\le$$

$$\le C_{k+1}e^{-\gamma_{k+1}\xi},$$

де C_{k+1}, λ_{k+1} — деякі додатні сталі, причому $\lambda_{k+1} < \lambda$.

Лему доведено.

Розглянемо тепер питання про визначення примежових функцій $Q_{*k}u(\xi_*,t)$, $k \ge 0$, які є розв'язками крайової задачі вигляду

$$-b_0(1)\frac{\partial^2 Q_{*0}u(\xi_*,t)}{\partial\xi_*^2} = f(\bar{u}_0(1,t)+Q_{*0}u(\xi_*,t),1,t,0), \tag{34}$$

$$\frac{\partial Q_{*0}u(0,t)}{\partial\xi_*} = 0, \quad \lim_{\xi_*\to\infty} Q_{*0}u(\xi_*,t) = 0; \tag{35}$$

$$-b_0(1)\frac{\partial^2 Q_{*k}u(\xi_*,t)}{\partial\xi_*^2} = f'_u(\bar{u}_0(1,t)+Q_{*0}u(\xi_*,t),1,t,0)Q_{*k}u(\xi_*,t)+Z_{*k}(\xi_*,t), \tag{36}$$

$$\frac{\partial Q_{*0}u(0,t)}{\partial\xi_*} = 0, \quad \lim_{\xi_*\to\infty} Q_{*k}u(\xi_*,t) = 0, \quad 1\le k<m; \tag{37}$$

$$-b_0(1)\frac{\partial^2 Q_{*k}u(\xi_*,t)}{\partial\xi_*^2} = f'_u(\bar{u}_0(1,t)+Q_{*0}u(\xi_*,t),1,t,0)Q_{*k}u(\xi_*,t)+Z_{*k}(\xi_*,t), \tag{38}$$

$$\frac{\partial Q_{*k}u(0,t)}{\partial\xi_*} = -\frac{\partial\bar{u}_{k-m}(1,t)}{\partial x}, \quad \lim_{\xi_*\to\infty} Q_{*k}u(\xi_*,t) = 0, \quad k\ge m, \tag{39}$$

де $Z_{*k}(\xi_*,t)$, $k \in \mathbf{N}$, рекурентно визначаються після знаходження функцій $Q_{*0}u(\xi_*,t)$, $Q_{*1}u(\xi_*,t),\ldots,Q_{*,k-1}u(\xi_*,t)$.

В якості розв'язку задачі (34), (35) можна взяти функцію $Q_{*0}u(\xi_*,t)\equiv 0$, а в якості розв'язку задачі (36), (37) — функцію $Q_{*k}u(\xi_*,t)\equiv 0$, $k<m$.

Лема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) мають місце припущення $\Pi_{1^0} - \Pi_{3^0}$;

2) $b_0(x) > 0$ *для всіх* $x \in [0;1]$.

Тоді при кожному натуральному $k \geq m$ *існує розв'язок крайової задачі (38), (39)* $Q_{*k}u(\xi_*, t)$, *для якого при довільному додатному числі* T *існують такі додатні сталі* $C_k, \gamma_k, k \geq m$, *що функція* $Q_{*k}u(\xi_*, t)$, $k \geq m$, *задовольняє співвідношення*

$$|Q_{*k}u(\xi_*, t)| \leq C_k e^{-\gamma_k \xi_*}, \quad \xi_* \geq 0, \quad t \in [0;T].$$

Доведення леми 3 аналогічне доведенню леми 2.

Кутові функції $P_{0k}u(\xi, \tau_0)$, $k \geq 0$, в (16) визначаються як розв'язки задач Коші вигляду

$$a_0(0)\frac{\partial P_{00}u(\xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} - b_0(0)\frac{\partial^2 P_{00}u(\xi, \tau_0)}{\partial \xi^2} = f(\bar{u}(0,0) + \Pi_{00}u(0, \tau_0) +$$

$$+ P_{00}u(\xi, \tau_0), 0, 0, 0) - f(\bar{u}(0,0) + \Pi_{00}u(0, \tau_0), 0, 0, 0), \tag{40}$$

$$P_{00}u(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial P_{00}u(0, \tau_0)}{\partial \xi} = 0; \tag{41}$$

$$a_0(0)\frac{\partial P_{0k}u(\xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} - b_0(0)\frac{\partial^2 P_{0k}u(\xi, \tau_0)}{\partial \xi^2} = f'_u(\bar{u}(0,0) + \Pi_{00}u(0, \tau_0) =$$

$$+ P_{00}u(\xi, \tau_0), 0, 0, 0)P_{0k}u(\xi, \tau_0) + J_k(\xi, \tau_0), \tag{42}$$

$$P_{00}u(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial P_{00}u(0, \tau_0)}{\partial \xi} = 0, \quad 1 \leq k < m; \tag{43}$$

$$a_0(0)\frac{\partial P_{0k}u(\xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} - b_0(0)\frac{\partial^2 P_{0k}u(\xi, \tau_0)}{\partial \xi^2} = f'_u(\bar{u}(0,0) + \Pi_{00}u(0, \tau_0) +$$

$$+ P_{00}u(\xi, \tau_0), 0, 0, 0)P_{0k}u(\xi, \tau_0) + J_k(\xi, \tau_0), \tag{44}$$

$$P_{0k}u(\xi, 0) = -Q_k u(\xi, 0), \quad \frac{\partial P_{0k}u(0, \tau_0)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Pi_{0,k-m}u(0, \tau_0)}{\partial x}, \quad k \geq m, \tag{45}$$

де $J_k(\xi, \tau_0)$, $k \in \mathbf{N}$, рекурентно визначаються після знаходження функцій $P_{00}u(\xi, \tau_0)$, $P_{01}u(\xi, \tau_0), \ldots, P_{0,k-1}u(\xi, \tau_0)$.

В якості розв'язку задачі (40), (41) можна взяти функцію $P_{00}u(\xi, \tau_0) \equiv 0$, а в якості розв'язку задачі (42), (43) — функцію $P_{0k}u(\xi_*, \tau_0) \equiv 0$ при $k < m$.

Лема 4. *Нехай виконуються умови лем 1 та 2.*

Тоді при кожному натуральному числі $k \geq m$ існує розв'язок крайової задачі (44), (45) $P_{0k}u(\xi,\tau_0)$, для якого існують такі додатні сталі $C_k, \gamma_k, k \geq m$, що справджується нерівність

$$|P_{0k}u(\xi,\tau_0)| \leq C_k e^{-\gamma_k(\xi+\tau_0)}, \quad \tau_0 \geq 0,\, \xi \geq 0.$$

Доведення леми можна провести за допомогою методу математичної індукції. Розглянемо спочатку випадок, коли $k = m$. Тоді розв'язок відповідної крайової задачі запишеться у вигляді [12, с.71]

$$P_{0m}(\xi,\tau_0) = g_m(\xi,\tau_0) + \int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_0^{\infty} G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau)h_m(\xi_0,\tau)d\xi_0 d\tau,$$

де функції $g_m(\xi,\tau_0)$, $h_m(\xi,\tau_0)$ мають вигляд

$$g_m(\xi,\tau_0) = -Q_m u(\xi,0)e^{-\kappa\tau_0} + \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\partial \Pi_{0,0}}{\partial x}(0,\tau_0) - \frac{\partial \Pi_{0,0}}{\partial x}(0,0)e^{-\kappa\tau_0}\right]e^{-\kappa\xi},$$

$$h_m(\xi,\tau_0) = \frac{1}{a_0(0)}\Bigg(J_m(\xi,\tau_0) - a_0(0)\frac{\partial g_m(\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0} + b_0(0)\frac{\partial^2 g_m(\xi,\tau_0)}{\partial \xi^2} +$$

$$+ f'_u(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_{00}u(0,\tau_0),0,0,0)g_m(\xi,\tau_0)\Bigg).$$

Тут κ — деяке додатне число, а функція Гріна $G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau)$ зображується у вигляді

$$G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau) = \Phi(0,\tau_0)(\Phi(0,\tau))^{-1}\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau_0-\tau)}}\times$$

$$\times\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4a(\tau_0-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(\xi+\xi_0)^2}{4a(\tau_0-\tau)}\right]\right\}, \quad \tau_0 \geq \tau, \quad \xi \geq \xi_0,$$

$$\Phi(0,\tau) = \exp\left(\frac{1}{a_0(0)}\int\limits_0^{\tau} f'_u(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_{00}u(0,\tau),0,0,0)d\tau\right), \quad a = \frac{b_0(0)}{a_0(0)}. \tag{46}$$

З (46) і умови 3 леми 1 випливає, що функція Гріна $G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau)$ задовольняє нерівність

$$|G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau)| = \Phi(0,\tau_0)(\Phi(0,\tau))^{-1}\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau_0-\tau)}}\times$$

$$\times\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4a(\tau_0-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi+\xi_0)^2}{4a(\tau_0-\tau)}\right]\right\}\leq$$

$$\leq Ae^{-\gamma_1(\tau_0-\tau)}\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau_0-\tau)}}\times$$

$$\times\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4a(\tau_0-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi+\xi_0)^2}{4a(\tau_0-\tau)}\right]\right\}\leq$$

$$\leq Ae^{-\frac{\gamma_1}{2}(\tau_0-\tau)}e^{-\frac{\gamma_1}{2}(\tau_0-\tau)}\frac{1}{\sqrt{\pi a(\tau_0-\tau)}}\exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4a(\tau_0-\tau)}\right]\leq$$

$$\leq A\frac{1}{\sqrt{\pi a(\tau_0-\tau)}}e^{-\frac{\gamma_1}{2}(\tau_0-\tau)}e^{-\sqrt{\frac{\gamma_1}{8a}}|\xi-\xi_0|}\leq\frac{C}{\sqrt{\tau_0-\tau}}e^{-\kappa(|\xi-\xi_0|+\tau_0-\tau)}, \tag{47}$$

де A, C, κ — деякі додатні сталі.

З розкладу функції $P_0f(\xi,\tau_0,\varepsilon)$ в ряд за малим параметром ε випливає, що для функції $J_m(\xi,\tau_0)$ в (44) справджується оцінка

$$|J_mu(\xi,\tau_0)|\leq c_0e^{-\gamma_0(\xi+\tau_0)}(\xi+\tau_0)^m,$$

де c_0 та γ_0 — деякі додатні сталі.

Тоді для функції $P_{0m}u(\xi,\tau_0)$ маємо оцінку вигляду

$$|P_{0,m}(\xi,\tau_0)|\leq|g_m(\xi,\tau_0)|+\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_0^{\infty}|G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau)|\,|J_m(\xi_0,\tau)|d\xi_0d\tau\leq$$

$$\leq|g_m(\xi,\tau_0)|+\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{C}{\sqrt{\tau_0-\tau}}e^{-\kappa(|\xi-\xi_0|+\tau_0-\tau)}\times$$

$$\times c_0e^{-\gamma_0(\xi_0+\tau)}(\xi_0+\tau)^md\xi_0d\tau\leq C_me^{-\gamma_m(\xi+\tau_0)},$$

де C_m, γ_m — деякі додатні сталі.

Нехай тепер лема є вірною при деякому натуральному k. Покажемо її справедливість при $k+1$. Розв'язок крайової задачі (44), (45) записується за допомогою формули

$$P_{0,k+1}(\xi,\tau_0)=g_{k+1}(\xi,\tau_0)+\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_0^{\infty}G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau)h_{k+1}(\xi_0,\tau)d\xi_0d\tau,$$

де функції $g_{k+1}(\xi,\tau_0)$, $h_{k+1}(\xi,\tau_0)$ мають вигляд

$$g_{k+1}(\xi,\tau_0) = -Q_{k+1}u(\xi,0)e^{-\kappa\tau_0}+ \\ + \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\partial\Pi_{0,k+1-m}}{\partial x}(0,\tau_0) - \frac{\partial\Pi_{0,k+1-m}}{\partial x}(0,0)e^{-\kappa\tau_0}\right]e^{-\kappa\xi},$$

$$h_{k+1}(\xi,\tau_0) = \frac{1}{a_0(0)}\Bigg(J_{k+1}(\xi,\tau_0) - a_0(0)\frac{\partial g_{k+1}(\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0} + b_0(0)\frac{\partial^2 g_{k+1}(\xi,\tau_0)}{\partial\xi^2}+ \\ + f'_u(\bar u_0(0,0)+\Pi_{00}u(0,\tau_0),0,0,0)g_{k+1}(\xi,\tau_0)\Bigg).$$

Тут κ — деяке додатне число, а функція Гріна $G(\xi,\tau_0,\xi_0,\tau)$ зображується у вигляді (46).

Аналогічно розглянутому вище випадку ($k=m$) доводиться оцінка вигляду

$$|P_{0k+1}u(\xi,\tau_0)| \le C_{k+1}e^{-\gamma_{k+1}(\tau_0+\xi)}, \quad \tau_0\ge 0,\ \xi\ge 0,$$

де C_{k+1},γ_{k+1} — деякі додатні сталі.

Лему доведено.

Кутові функції $P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)$, $k\ge 0$, в (13) визначаються як розв'язки крайових задач вигляду

$$a_0(1)\frac{\partial P_{*00}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial\tau_0} - b_0(1)\frac{\partial^2 P_{*00}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial\xi_*^2} = f(\bar u(1,0)+\Pi_{00}u(1,\tau_0)+ \\ + P_{00}u(\xi_*,\tau_0),1,0,0) - f(\bar u(1,0)+\Pi_{00}u(1,\tau_0),1,0,0), \tag{48}$$

$$P_{*00}u(\xi_*,0) = 0, \quad \frac{\partial P_{*00}u(1,\tau_0)}{\partial\xi_*} = 0; \tag{49}$$

$$a_0(1)\frac{\partial P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial\tau_0} - b_0(1)\frac{\partial^2 P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial\xi_*^2} = f'_u(\bar u(1,0)+\Pi_{*00}u(1,\tau_0)+ \\ + P_{*00}u(\xi_*,\tau_0),1,0,0)P_{*0k}(\xi_*,\tau_0) + H_{*k}(\xi_*,\tau_0), \tag{50}$$

$$P_{*0k}u(\xi_*,0) = 0, \quad \frac{\partial P_{*0k}u(1,\tau_0)}{\partial\xi_*} = 0, \quad 1\le k< m; \tag{51}$$

$$a_0(1)\frac{\partial P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial\tau_0} - b_0(1)\frac{\partial^2 P_{*0k}u(\xi_*,\tau_0)}{\partial\xi_*^2}f'_u(\bar u(1,0)+\Pi_{*00}u(1,\tau_0) = \\ + P_{*00}u(\xi_*,\tau_0),1,0,0)P_{*0k}(\xi_*,\tau_0) + H_{*k}(\xi_*,\tau_0), \tag{52}$$

$$P_{*0k}u(\xi_*, 0) = -Q_{*k}u(\xi_*, 0), \quad \frac{\partial P_{*0k}u(0,\tau_0)}{\partial \xi_*} = \frac{\partial \Pi_{0,k-m}u(1,\tau_0)}{\partial x}, \quad k \geq m, \tag{53}$$

де $H_{*k}(\xi_*, \tau_0)$, $k \in \mathbf{N}$, рекурентно визначаються після знаходження функцій $P_{*00}u(\xi_*, \tau_0)$, $P_{*01}u(\xi_*, \tau_0), \ldots, P_{*0,k-1}u(\xi_*, \tau_0)$, $k \in \mathbf{N}$.

В якості розв'язку крайової задачі (48), (49) можна взяти функцію $P_{*00}u(\xi_*, \tau_0) \equiv 0$, а в якості розв'язку задачі (50), (51) — функцію $P_{*0k}u(\xi_*, \tau_0) \equiv 0$ при $k < m$.

Лема 5. *Нехай виконуються умови лем 1 та 3.*

Тоді при кожному натуральному числі $k \geq m$ існує розв'язок крайової задачі (52), (53) $P_{*0k}u(\xi, \tau_0)$, для якого існують такі додатні сталі C_k, γ_k, $k \geq m$, що справджується нерівність

$$|P_{*0k}u(\xi_*, \tau_0)| \leq C_k e^{-\gamma_k(\xi_* + \tau_0)}, \quad \text{де} \quad \tau_0 \geq 0, \ \xi_* \geq 0.$$

Доведення леми 5 аналогічне доведенню леми 4.

Побудуємо тепер асимптотичний розв'язок задачі (1) – (4) на інтервалі $[t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$. Розглянемо умову імпульсної дії (4) в момент часу $t = t_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Враховуючи, що функції $\Pi_0 u(x, \tau_0, \varepsilon)$, $P_0 u(\xi, \tau_0, \varepsilon)$, $P_{*0}u(\xi_*, \tau_0, \varepsilon)$, $Qu(\xi, t, \varepsilon)$ та $Q_* u(\xi_*, t, \varepsilon)$ є неперервними за змінними t, τ_0, ліву частину в формулі (4) можна подати у вигляді

$$\Delta u(x,t,\varepsilon)|_{t=t_i} = u(x, t_i + 0, \varepsilon) - u(x, t_i - 0, \varepsilon) =$$
$$= \Pi_i u(x, 0, \varepsilon) + P_i u(\xi, 0, \varepsilon) + P_{*i}u(\xi_*, 0, \varepsilon). \tag{54}$$

З іншого боку, беручи до уваги зображення (5), (7), (13) – (15), (17) – (18), (21) – (24), (26) – (31), (34) – (39), (40) – (45), (48) – (53), праву частину в формулі (4)

$$I_i(\bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi_0 u(x,\tau_0,\varepsilon) + P_0 u(\xi,\tau_0,\varepsilon) + P_{*0}u(\xi_*,\tau_0,\varepsilon) + Qu(\xi,t,\varepsilon) +$$
$$+ Q_* u(\xi_*, t, \varepsilon) + \Pi_i u(x,t,\varepsilon) + P_i u(\xi, \tau_i, \varepsilon) + P_{*i}u(\xi_*, \tau_i, \varepsilon), x, t, \varepsilon)$$

апроксимуємо виразом вигляду

$$I\Pi_i(x, \tau_i, \varepsilon) + IP_i(\xi, \tau_i, \varepsilon) + IP_{*i}(\xi_*, \tau_i, \varepsilon), \tag{55}$$

де позначено

$$I\Pi_i(x,\tau_i,\varepsilon) = [I(\bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon), x, t, \varepsilon)]\Big|_{t = t_i + \varepsilon^n \tau_i},$$

$$IP_i(\xi,\tau_i,\varepsilon) = [I(\bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon) +$$
$$+ Qu(\xi,\tau_i,\varepsilon) + P_i u(\xi,\tau_i,\varepsilon), x, t, \varepsilon) - I\Pi_i(x,\tau_i,\varepsilon)]\Big|_{x=\varepsilon^m \xi,\, t = t_i + \varepsilon^n \tau_i}, \tag{56}$$

$$IP_{*i}(\xi_*,\tau_i,\varepsilon) = [I(\bar{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi_i u(x,\tau_0,\varepsilon) +$$
$$+ Q_* u(\xi,\tau_i,\varepsilon) + P_{*i}u(\xi,\tau_i,\varepsilon), x, \tau_i, \varepsilon) - I\Pi_i(x,\tau_i,\varepsilon)]\Big|_{x=1-\varepsilon^m \xi_*,\, t = t_i + \varepsilon^n \tau_i}.$$

Розкладаючи функції $I\Pi_i(x,\tau_i,\varepsilon)$, $IP_i(\xi,\tau_i,\varepsilon)$, $IP_{*i}(\xi_*,\tau_i,\varepsilon)$ в асимптотичні ряди за малим параметром ε, з (4), (54), (56) шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε в лівій та правій частинах отриманого співвідношення знаходимо початкові умови при $\tau_i = 0$, $i \in \mathbf{N}$, для функцій $\Pi_{ik}u(x,\tau_i)$, $P_{ik}u(\xi,\tau_i)$, $P_{*ik}u(\xi_*,0)$, $k = 0,1,\ldots$. Маємо:

для функцій $\Pi_{ik}u(x,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0,1,\ldots$:

$$\Pi_{i0}u(x,0) = I_i(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}(x,0), x, t_i, 0),$$

$$\Pi_{ik}u(x,0) = \frac{\partial I_i(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,0), x, t_i, 0)}{\partial u}\Pi_{ik}u(x,0) + M_{ik}(x),$$

де функції $M_{ik}(x)$, $k \in \mathbf{N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $\Pi_{i0}u(x,\tau_i), \Pi_{i1}u(x,\tau_i), \ldots, \Pi_{i,k-1}u(x,\tau_i)$;

для функцій $P_{ik}u(\xi,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0,1,\ldots$:

$$P_{i0}u(\xi,0) = I(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0) + P_{i0}u(\xi,0), 0, t_i, 0) -$$
$$- I(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0), 0, t_i, 0),$$

$$P_{ik}u(\xi,0) = \frac{\partial I_i(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0) + P_{i0}u(\xi,0), 0, t_i, 0)}{\partial u}P_{ik}u(\xi,0) + N_{ik}(\xi),$$

де функції $N_{ik}(\xi)$, $k \in \mathbf{N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $P_{i0}u(\xi,\tau_i)$, $P_{i1}u(\xi,\tau_i), \ldots, P_{i,k-1}u(\xi,\tau_i)$;

для функцій $P_{*ik}u(\xi_*,0)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0,1,\ldots$:

$$P_{*i0}u(\xi_*,0) = I(\bar{u}_0(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,0) + P_{*i0}u(\xi_*,0), 1, t_i, 0) -$$
$$- I(\bar{u}_0(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,0) + P_{*i0}u(\xi_*,0), 1, t_i, 0),$$

$$P_{*ik}u(\xi_*,0) = \frac{\partial I_i(\bar{u}_0(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,0) + P_{*i0}u(\xi_*,0), 1, t_i, 0)}{\partial u}P_{*ik}u(\xi_*,0) + N_{*ik}(\xi_*),$$

де функції $N_{*ik}(\xi_*)$, $i,\ k \in \mathbf{N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $P_{*i0}u(\xi_*,\tau_i)$, $P_{*i1}u(\xi_*,\tau_i), \ldots, P_{*i,k-1}u(\xi_*,\tau_i)$.

Таким чином, функції $\Pi_{ik}u(x,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0,\ 1,\ldots$, можна визначити як розв'язки задач Коші вигляду

$$a_0(x)\frac{\partial \Pi_{i0}u(x,\tau_i)}{\partial \tau_i} = f(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,\tau_i), x, t_i, 0), \tag{57}$$

$$\Pi_{i0}u(x,0) = I_i(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,0), x, t_i, 0); \tag{58}$$

$$a_0(x)\frac{\partial \Pi_{ik}u(x,\tau_i)}{\partial \tau_i} = f'_u(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,\tau_i), x, t_i, 0)\Pi_{ik}u(x,\tau_i) + R_{ik}(x,\tau_i), \tag{59}$$

$$\Pi_{ik}u(x,0) = M_{ik}(x)\left(1 - \frac{\partial I_i(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,0), x, t_i, 0)}{\partial u}\right)^{-1}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{60}$$

де функції $R_{ik}(x,\tau_i)$, $i,\ k \in \mathbf{N}$, рекурентно визначаються після знаходження функцій $\Pi_{i0}u(x,\tau_i), \Pi_{i1}u(x,\tau_i), \ldots, \Pi_{i,k-1}u(x,\tau_i)$.

Використавши (57) – (60), встановимо асимптотичні оцінки для функцій $\Pi_{ik}u(x,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Лема 6. *Нехай виконуються умови:*

1) мають місце припущення $\Pi_{1^0} – \Pi_{3^0}$;

2) $a_0(x) > 0$ *для всіх* $x \in [0;1]$;

3) функція $\Pi_{i0}u(x,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, *що є розв'язком задачі (57), (58), задовольняє співвідношення* $|\Pi_{i0}u(x,\tau_i)| \le C_0 e^{-\gamma_0\tau_i}$ *для деяких додатних сталих* C_0, γ_0;

4) для довільного $i \in \mathbf{N}$ *похідна* $f'_u(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i), 0, t_i, 0) < 0$ *для всіх* $x \in [0;1]$, $\tau_i \ge 0$;

5) для довільного $i \in \mathbf{N}$ *похідна*

$$-\left|\frac{\partial I_i(\bar{u}_0(x,t_i) + \Pi_{i0}u(x,0), x, t_i, 0))}{\partial u}\right| \ge 1 + \delta_1$$

для деякого $\delta_1 > 0$ *та всіх* $x \in [0;1]$.

Тоді при кожному натуральному числі k *задача Коші (59), (60) має розв'язок* $\Pi_{ik}u(x,\tau_i)$, $i,\ k \in \mathbf{N}$, *що задовольняє співвідношення*

$$\lim_{\tau_i \to +\infty} |\Pi_{ik}u(x,\tau_i)| = 0.$$

Більш того, існують додатні сталі C_k, γ_k, $k \in \mathbf{N}$, *такі, що справджується нерівність*

$$|\Pi_{ik}u(x,\tau_i)| \le C_k e^{-\gamma_k\tau_i}, \quad \tau_i \ge 0.$$

Доведення випливає з міркувань, аналогічних використаним при доведенні леми 1.

Крайові умови для функції $P_{ik}u(\xi,\tau_i)$, $i,\ k \in \mathbf{N}$, визначаються з умови узгодженості для кутових та примежових функцій в точці $x = \xi = 0$, яка записується таким чином:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}(x,t,\varepsilon) + Qu(\xi,t,\varepsilon) + \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon) + P_i u(\xi,\tau_i,\varepsilon)\right]\Big|_{x=0,\,\xi=0} = 0, \tag{61}$$

а крайові умови для функції $P_{*ik}u(\xi,\tau_i)$, $i,\ k \in \mathbf{N}$, — з умови узгодженості для кутових та примежових функцій в точці $\xi_* = 0$, $x = 1$, яка записується так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}(x,t,\varepsilon) + Q_*u(\xi_*,t,\varepsilon) + \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon) + P_{*i}u(\xi_*,\tau_i,\varepsilon)\right]\Big|_{x=0,\,\xi_*=0} = 0. \tag{62}$$

З (61) знаходимо

$$\left(\frac{\partial \bar{u}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial Qu(\xi,t,\varepsilon)}{\partial \xi} + \frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial P_i u(\xi,\tau_i,\varepsilon)}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon)}{\partial x}\right)\Big|_{x=0,\,\xi=0} = 0,$$

звідки маємо

$$\frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial P_i u(\xi,\tau_i,\varepsilon)}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon)}{\partial x}\Big|_{x=0,\,\xi=0} = 0.$$

Тут враховано рівності (27), (29), (31).

З (62) отримуємо

$$\left(\frac{\partial \bar u(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial Qu(\xi_*,t,\varepsilon)}{\partial \xi_*} - \frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial P_{*i}u(\xi_*,\tau_i,\varepsilon)}{\partial \xi_*} + \frac{\partial \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon)}{\partial x}\right)\Big|_{x=1,\,\xi_*=0} = 0,$$

звідки маємо

$$-\frac{1}{\varepsilon^m}\frac{\partial P_{*i}u(\xi_*,\tau_i,\varepsilon)}{\partial \xi_*} + \frac{\partial \Pi_i u(x,\tau_i,\varepsilon)}{\partial x}\Big|_{x=1,\,\xi_*=0} = 0.$$

Тут враховано рівності (35), (37), (39).

Таким чином, кутові функції $P_{ik}u(\xi,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \ldots$, визначаються як розв'язки крайових задач вигляду

$$a_0(0)\frac{\partial P_{i0}u(\xi,\tau_i)}{\partial \tau_i} - b_0(0)\frac{\partial^2 P_{i0}u(\xi,\tau_i)}{\partial \xi^2} = f(\bar u(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i)+$$

$$+ P_{i0}u(\xi,\tau_i), 0, t_i, 0) - f(\bar u(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i), 0, t_i, 0), \qquad (63)$$

$$P_{i0}u(\xi,0) = I(\bar u_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0) + P_{i0}u(\xi,0), 0, t_i, 0)-$$

$$- I(\bar u_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0) + Q_0u(\xi,t_i) + P_{i0}u(\xi,\tau_i), 0, t_i, 0), \qquad (64)$$

$$\frac{\partial P_{i0}u(0,\tau_i)}{\partial \xi} = 0;$$

$$a_0(0)\frac{\partial P_{ik}u(\xi,\tau_i)}{\partial \tau_i} - b_0(0)\frac{\partial^2 P_{ik}u(\xi,\tau_i)}{\partial \xi^2} = f'_u(\bar u(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i)+$$

$$+ P_{i0}u(\xi,\tau_i), 0, t_i, 0)P_{ik}u(\xi,\tau_i) + J_{ik}(\xi,\tau_i), \qquad (65)$$

$$P_{ik}u(\xi,0) = N_k(\xi)\left[1 - \frac{\partial I_i(\bar u_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0) + P_{i0}u(\xi,0), 0, t_i, 0)}{\partial u}\right]^{-1}, \qquad (66)$$

$$\frac{\partial P_{ik}u(0,\tau_i)}{\partial \xi} = 0, \quad 1 \le k < m; \qquad (67)$$

$$a_0(0)\frac{\partial P_{ik}u(\xi,\tau_i)}{\partial \tau_i} - b_0(0)\frac{\partial^2 P_{ik}u(\xi,\tau_i)}{\partial \xi^2} = f'_u(\bar u(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,\tau_i)+$$

$$+ P_{i0}u(\xi,\tau_i), 0, t_i, 0)P_{ik}u(\xi,\tau_i) + J_{ik}(\xi,\tau_i), \qquad (68)$$

$$P_{ik}u(\xi,0) = N_k(\xi)\left[1 - \frac{\partial I_i(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0) + P_{i0}u(\xi,\tau_i),0,t_i,0)}{\partial u}\right]^{-1}, \tag{69}$$

$$\frac{\partial P_{ik}u(0,\tau_i)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Pi_{i,k-m}u(0,\tau_i)}{\partial x}, \quad k \ge m, \tag{70}$$

де $J_{ik}(\xi,\tau_i)$, i, $k \in \mathbf{N}$, рекурентно визначаються після знаходження функцій $P_{i0}u(\xi,\tau_i)$, $P_{i1}u(\xi,\tau_i),\ldots,P_{i,k-1}u(\xi,\tau_i)$.

В якості розв'язку задачі (63), (64) можна взяти функцію $P_{i0}u(\xi,\tau_i) \equiv 0$, а в якості розв'язку задачі (65), (66) при $k < m$ — функцію $P_{ik}u(\xi,\tau_i) \equiv 0$.

Лема 7. *Нехай виконуються умови:*

1) мають місце умови лем 3 та 6;

2) для довільного $i \in \mathbf{N}$ похідна

$$\left|\frac{\partial I_i(\bar{u}_0(0,t_i) + \Pi_{i0}u(0,0)),0,t_i,0)}{\partial u}\right| \ge 1 + \delta_1$$

для деякого $\delta_1 > 0$.

Тоді при кожному натуральному числі $k \ge m$ існує розв'язок мішаної крайової задачі (68)–(70) $P_{ik}u(\xi,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, для якого існують такі додатні сталі C_k, γ_k, $k \ge m$, що справджується нерівність

$$|P_{ik}u(\xi,\tau_i)| \le C_k e^{-\gamma_k(\xi+\tau_i)}, \quad \xi \ge 0, \ \tau_i \ge 0.$$

Доведення аналогічне доведенню леми 4.

Аналогічно, кутові функції $P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0,1,\ldots$, визначаються як розв'язки мішаної крайової задачі вигляду

$$a_0(1)\frac{\partial P_{*i0}u(\xi_*,\tau_i)}{\partial \tau_i} - b_0(1)\frac{\partial^2 P_{*i0}(\xi_*,\tau_i)}{\partial \xi_*^2} = f(\bar{u}(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,\tau_i) +$$
$$+ P_{00}u(\xi_*,\tau_i),1,t_i,0) - f(\bar{u}(1,t_i) + \Pi_{i0}(1,\tau_i),1,t_i,0), \tag{71}$$

$$P_{*i0}(\xi_*,0) = I(\bar{u}_0(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,0) + P_{*i0}u(\xi,0),1,t_i,0) -$$
$$- I(\bar{u}_0(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,0),1,t_i,0), \quad \frac{\partial P_{*i0}u(0,\tau_i)}{\partial \xi_*} = 0; \tag{72}$$

$$a_0(1)\frac{\partial P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)}{\partial \tau_i} - b_0(1)\frac{\partial^2 P_{*ik}(\xi_*,\tau_i)}{\partial \xi_*^2} f'_u(\bar{u}(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,\tau_i) =$$
$$+ P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i),1,t_i,0)P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i) + H_{ik}(\xi_*,\tau_i), \tag{73}$$

$$P_{*ik}u(\xi_*,0) = N_{*ik}(\xi_*)\left[1 - \frac{\partial I_i(\bar{u}_0(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,0) + P_{*ik}u(\xi_*,0),1,t_i,0)}{\partial u}\right]^{-1}, \qquad (74)$$

$$\frac{\partial P_{*ik}u(0;\tau_i)}{\partial \xi_*} = 0, \quad 1 \le k < m, \qquad (75)$$

$$a_0(1)\frac{\partial P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)}{\partial \tau_i} - b_0(1)\frac{\partial^2 P_{*ik}(\xi_*,\tau_i)}{\partial \xi_*^2} = f'_u(\bar{u}(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,\tau_i) +$$

$$+ P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i),1,t_i,0)P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i) + H_{ik}(\xi_*,\tau_i), \qquad (76)$$

$$P_{*ik}u(\xi_*,0) = N_{*ik}(\xi_*)\left[1 - \frac{\partial I_i(\bar{u}_0(1,t_i) + \Pi_{i0}u(1,0) + P_{*ik}u(\xi_*,0),1,t_i,0)}{\partial u}\right]^{-1}, \qquad (77)$$

$$\frac{\partial P_{*ik}u(0,\tau_i)}{\partial \xi_*} = \frac{\partial \Pi_{i,k-m}u(1,\tau_i)}{\partial x}, \quad k \ge m, \qquad (78)$$

де функції $N_{*ik}(\xi_*)$, $i \in \mathbf{N}$, $k = 0,1,\ldots$, можна знайти з умов імпульсної дії (4) аналогічно до описаного вище (див. формули (55) – (70)).

В якості розв'язку задачі (71), (72) можна взяти функцію $P_{i*0}u(\xi_*,\tau_i) \equiv 0$, а в якості розв'язку задачі (69), (70) при $k < m$ — функцію $P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i) \equiv 0$.

Лема 8. *Нехай виконуються умови:*
1) мають місце умови лем 3 та 6;
2) для довільного $i \in \mathbf{N}$ похідна

$$\left|\frac{\partial I_i(\bar{u}_0(t_i) + \Pi_{i0}u(1,0),1,t_i,0)}{\partial u}\right| \ge 1 + \delta_1$$

для деякого $\delta_1 > 0$.

Тоді при кожному натуральному числі $k \ge m$ існує розв'язок мішаної крайової задачі (76) – (78) $P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)$, $i \in \mathbf{N}$, для якого існують такі додатні сталі C_k, γ_k, $k \ge m$, що справджується нерівність

$$|P_{*ik}u(\xi_*,\tau_i)| \le C_k e^{-\gamma_k(\xi_*+\tau_i)}, \quad \tau_i \ge 0,\, \xi_* \ge 0.$$

Доведення аналогічне доведенню леми 5.

З лем 1 – 8 випливає обґрунтування апроксимації правої частини в формулі (4) за допомогою виразу (55).

На підставі лем 1 – 8 можна довести наступну теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови лем 1 – 8.*

Тоді ряд (5) – (7) є асимптотичним рядом для розв'язку $u(x,t,\varepsilon)$ задачі (1) – (4) в тому сенсі, що для довільного $N = 0, 1, \ldots$ та довільної замкненої лінійно зв'язної множини $\mathcal{K} \subset \Omega$ справжується асимптотична оцінка вигляду

$$\max_{\mathcal{K}} |u(x,t,\varepsilon) - u_N(x,t,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{N+1}),$$

де $(x,t) \in \Omega = (0;1) \times (0;T)$, T — довільне додатне число, функція $u_N(x,t,\varepsilon)$ визначена згідно з формулою

$$u_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \Big\{ \left(\bar{u}_k(x,t) + \Pi_{0k} u\left(x, t\varepsilon^{-n}\right) + \right.$$
$$+ Q_k u\left(x\varepsilon^{-m}, t\right) + Q_{*k} u\left((1-x)\varepsilon^{-m}, t\right) +$$
$$+ P_{0k} u\left(x\varepsilon^{-m}, t\varepsilon^{-n}\right) + P_{*0k} u\left((1-x)\varepsilon^{-m}, t\varepsilon^{-n}\right) + \sum_{t_i \le t} \left[\Pi_{ik} u\left(x, (t-t_i)\varepsilon^{-n}\right) + \right.$$
$$\left. + \; P_{ik} u\left(x\varepsilon^{-m}, (t-t_i)\varepsilon^{-n}\right) + P_{*ik} u\left((1-x)\varepsilon^{-m}, (t-t_i)\varepsilon^{-n}\right)\right] \Big\}. \tag{79}$$

Доведення. Покладемо $\omega_N(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) - \mathcal{U}_N(x,t,\varepsilon)$, де

$$\mathcal{U}_N(x,t,\varepsilon) = u_N(x,t,\varepsilon) + \sum_{k=N+1}^{N+m} \varepsilon^k \left[Q_k(x\varepsilon^m, t) + Q_{*,k}(1 - x\varepsilon^m, t) + \right.$$
$$\left. + \; P_k(x\varepsilon^m, t\varepsilon^n) + P_{*,k}(1 - x\varepsilon^m, t\varepsilon^n)\right],$$

а функція $u_N(x,t,\varepsilon)$ визначена згідно з формулою (79).

Інтервал $[0;T]$ містить лише скінченну кількість моментів імпульсної дії t_i, $i \in \mathbf{N}$, тобто для деякого натурального числа p маємо $t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1}$, де $t_{p-1} \le T$, а $t_p > T$. Не втрачаючи загальності вважаємо $p > 1$.

Розглянемо інтервал $(0;t_1) \subset [0;T]$. Функція $\omega_N(x,t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$a(x,\varepsilon)\frac{\partial \omega_N}{\partial t} - b(x,\varepsilon)\frac{\partial^2 \omega_N}{\partial x^2} - f'_u(u,x,t,\varepsilon)\omega_N = h(\omega_N, x, t, \varepsilon), \tag{80}$$

де

$$f'_u(u,x,t,\varepsilon) = f'_u\left(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00} u\left(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\right), x, t, \varepsilon\right),$$

$$h(\omega_N, x, t, \varepsilon) = f(\omega_N + \mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) - a(x, \varepsilon)\frac{\partial \mathcal{U}_N}{\partial t} + b(x, \varepsilon)\frac{\partial^2 \mathcal{U}_N}{\partial x^2} -$$
$$-f'_u\left(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00}u\left(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\right), x, t, \varepsilon\right)\omega_N.$$

Неважко встановити такі властивості функції $h(\omega_n, x, t, \varepsilon)$:

1^0) функція $h(0, x, t, \varepsilon)$ для $(x,t) \in (0;1) \times (0;t_1)$ задовольняє асимптотичне за малим параметром ε співвідношення

$$h(0, x, t, \varepsilon) = f(\mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) - a(x, \varepsilon)\frac{\partial \mathcal{U}_N}{\partial t} + b(x, \varepsilon)\frac{\partial^2 \mathcal{U}_N}{\partial x^2} = O(\varepsilon^{N+1}); \tag{81}$$

2^0) якщо функції $\nu_1(x,t,\varepsilon)$, $\nu_2(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in (0;1) \times (0;t_1)$, такі, що $|\nu_1(x,t,\varepsilon)| < \varepsilon C$, $|\nu_2(x,t,\varepsilon)| < \varepsilon C$, то існують такі додатні сталі C_1 та ε_0, що для всіх $(x,t) \in (0;1) \times (0;t_1)$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$|h(\nu_1, x, t, \varepsilon) - h(\nu_2, x, t, \varepsilon)| \le \varepsilon C_1 |\nu_1 - \nu_2|. \tag{82}$$

Властивість 1^0 випливає з формули (81) та з побудови функції $u_N(x,t,\varepsilon)$ (див. формулу (79)).

Властивість 2^0 можна довести за допомогою таких міркувань:

$$|h(\nu_1, x, t, \varepsilon) - h(\nu_2, x, t, \varepsilon)| = \Big| f(\nu_1 + \mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) - a(x, \varepsilon)\frac{\partial \mathcal{U}_N}{\partial t} + b(x, \varepsilon)\frac{\partial^2 \mathcal{U}_N}{\partial x^2} -$$
$$- f'_u\Big(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00}u\Big(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\Big), x, t, \varepsilon\Big)\nu_1 - f(\nu_2 + \mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) + a(x, \varepsilon)\frac{\partial \mathcal{U}_N}{\partial t} -$$
$$- b(x, \varepsilon)\frac{\partial^2 \mathcal{U}_N}{\partial x^2} + f'_u\Big(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00}u\Big(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\Big), x, t, \varepsilon\Big)\nu_2\Big| =$$
$$= \Big| f(\nu_1 + \mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) - f'_u\Big(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00}u\Big(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\Big), x, t, 0\Big)\nu_1 -$$
$$- f(\nu_2 + \mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) + f'_u\Big(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00}u\Big(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\Big), x, t, \varepsilon\Big)\nu_2\Big| =$$
$$= \Big| f(\mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) + f'_u(\mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon)\nu_1 + O(\nu_1^2) - f(\mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) -$$
$$- f'_u(\mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon)\nu_2 - O(\nu_2^2) + f'_u\Big(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00}u\Big(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\Big), x, t, \varepsilon\Big)(\nu_2 - \nu_1)\Big| =$$
$$= \Big| (\nu_1 - \nu_2)\Big[f'_u(\mathcal{U}_N, x, t, \varepsilon) - f'_u\Big(\bar{u}_0(x,t) + \Pi_{00}u\Big(x, \frac{t}{\varepsilon^n}\Big), x, t, \varepsilon\Big)\Big] +$$
$$+ (\nu_1 - \nu_2)O(\nu_1 + \nu_2)\Big| \le \varepsilon C|\nu_1 - \nu_2|,$$

де C — деяка додатна константа.

Функція $\omega_N(x,t,\varepsilon)$ задовольняє однорідну початкову умову

$$\omega_N(x,0,\varepsilon) = 0 \tag{83}$$

та однорідні крайові умови

$$\left.\frac{\partial\omega_N}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\omega_N}{\partial x}\right|_{x=1} = 0. \tag{84}$$

Крайову задачу (80), (83), (84) можна записати в еквівалентному вигляді за допомогою такого інтегрального рівняння [19]:

$$\omega_N(x,t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \int\limits_0^x G(x,t,x_1,\theta,\varepsilon)\, h(\omega_N(x_1,t_1,\varepsilon),x_1,\theta,\varepsilon)\, dx_1\, d\theta \equiv$$

$$\equiv \mathcal{L}_N[\omega_N(x,t,\varepsilon)], \quad (x,t) \in (0;1)\times(0;t_1), \tag{85}$$

де $G(x,t,x_1,\theta,\varepsilon)$ — функція Гріна задачі (80), (83), (84), для якої має місце співвідношення

$$|G(x,t,x_1,\theta,\varepsilon)| \le \frac{C_0}{\varepsilon^{k_0}\sqrt{t-\theta}} \exp\left(-\gamma_0\frac{t-\theta}{\varepsilon^n}\right) \exp\left(-\gamma_0\frac{(x-x_1)^2}{\varepsilon^{2m-n}(t-\theta)}\right), \tag{86}$$

де C_0, γ_0, k_0 — деякі додатні сталі.

Таким чином, оператор $\mathcal{L}_N[\cdot]$ має такі властивості:

1^0) справедливим є асимптотичне співвідношення

$$\mathcal{L}_N[0] = O(\varepsilon^{N+1}), \quad N = 0,1,\ldots; \tag{87}$$

дана асимптотична оцінка випливає з формул (81), (85), (86);

2^0) оператор $\mathcal{L}_N[\cdot]$ задовольняє нерівність

$$|\mathcal{L}_N[\nu_1(x,t,\varepsilon)] - \mathcal{L}_N[\nu_2(x,t,\varepsilon)]| \le \varepsilon C|\nu_1(x,t,\varepsilon) - \nu_2(x,t,\varepsilon)|,$$

де функції $\nu_1(x,t,\varepsilon), \nu_2(x,t,\varepsilon)$ такі, що $|\nu_1(x,t,\varepsilon)| < \varepsilon C_1$, $|\nu_2(x,t,\varepsilon)| < \varepsilon C_2$.

Дійсно, враховуючи зображення (85) та нерівність (82), з нерівності (86) знаходимо

$$|\mathcal{L}_N[\nu_1(x,t,\varepsilon)] - \mathcal{L}_N[\nu_2,x,t,\varepsilon)]| \le$$

$$\le \left|\int\limits_0^t \int\limits_0^1 G(x,t,x_1,\theta,\varepsilon)[h(\nu_1,x,t,\varepsilon) - h(\nu_2,x,t,\varepsilon)]dx_1 d\theta\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^t \int\limits_0^x |G(x,t,x_1,\theta,\varepsilon)|\,|h(\nu_1,x,t,\varepsilon) - h(\nu_2,x,t,\varepsilon)|dx_1 d\theta \le$$

$$\le \varepsilon C|\nu_1(x,t,\varepsilon) - \nu_2(x,t,\varepsilon)|, \tag{88}$$

де C — деяка додатна стала.

Розглянемо тепер послідовність $\omega_N^{(i)}(x,t,\varepsilon)$, $i = 0,1,\ldots$, члени якої визначені рекурентним співвідношенням

$$\omega_N^{(i+1)}(x,t,\varepsilon) = \mathcal{L}_N[\omega_N^{(i)}(x,t,\varepsilon)], \quad \omega_N^{(0)}(x,t,\varepsilon) \equiv 0. \tag{89}$$

З (86), (88) випливає, що для всіх $(x,t) \in (0;1)\times(0;t_1)$ та достатньо малих ε справджується нерівність

$$\begin{aligned} |\omega_N^{(i+1)}(x,t,\varepsilon) - \omega_N^{(i)}(x,t,\varepsilon)| = |\mathcal{L}_N[\omega_N^{(i)}(x,t,\varepsilon)] - \mathcal{L}_N[\omega_N^{(i-1)}(x,t,\varepsilon)]| \leq \\ \leq C\varepsilon|\omega_N^{(i)}(x,t,\varepsilon) - \omega_N^{(i-1)}(x,t,\varepsilon)| \leq \ldots \\ \ldots \leq (C\varepsilon)^i|\omega_N^{(1)}(x,t,\varepsilon)|. \end{aligned} \tag{90}$$

Враховуючи неперервність функції $h(0,x,t,\varepsilon)$ при $(x,t) \in [0;1]\times[0;t_1]$ (див. (80)) та обмеженість інтегрального оператора $\mathcal{L}_N[\cdot]$, з (90) одержуємо

$$\begin{aligned} |\omega_N^{(i+1)}(x,t,\varepsilon)| \leq |\omega_N^{(i+1)} - \omega_N^{(i)}|+ \\ + |\omega_N^{(i)} - \omega_N^{(i-1)}| + \ldots + |\omega_N^{(1)} - \omega_N^{(0)}| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{i}(C\varepsilon)^k\mu_1 < \frac{1}{1-C\varepsilon}\mu_1, \end{aligned} \tag{91}$$

де

$$\sup_{(x,t)\in(0;1)\times(0;t_1)} |\omega_N^{(1)}(x,t,\varepsilon)| = \mu_1.$$

Звідси випливає, що послідовність функцій $\omega_N^{(i)}(x,t,\varepsilon)$ рівномірно збігається до деякої функції $\omega_N(x,t,\varepsilon)$, яка, як це нескладно показати, є розв'язком крайової задачі (80), (83), (84).

Функції $\omega_N^{(i)}(x,t,\varepsilon)$, $i \in \mathbf{N}$, що визначені згідно з формулами (89), задовольняють асимптотичну оцінку $\omega_N^{(i)} = O(\varepsilon^{N+1})$. Як наслідок, звідси та з (85) одержуємо, що має місце асимптотичне співвідношення $\omega_N(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$.

Розглянемо тепер умову (4) імпульсної дії при $t = t_1$, з якої знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta\omega_N|_{t=t_1} = \Delta u(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=t_1} - \Delta\mathcal{U}_n(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=t_1} = \\ = I_1(x,t,u(x,t,\varepsilon))\Big|_{t=t_1} - I_1(x,t,\mathcal{U}_n(x,t,\varepsilon))\Big|_{t=t_1}. \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення

$$I_1(x,t,u(x,t,\varepsilon))\Big|_{t=t_1} - I_1(x,t,\mathcal{U}_N(x,t,\varepsilon))\Big|_{t=t_1} = O(\varepsilon^{N+1}), \quad x \in (0;1),$$

яке випливає з методу побудови функцій $u_N(x,t,\varepsilon)$, $N=0,1,\ldots$, отримуємо

$$\Delta\omega_N(x,t,\varepsilon)|_{t=t_1}=O(\varepsilon^{N+1}),\quad x\in(0;1).$$

Таким чином, функція $\omega_N(x,t,\varepsilon)$ задовольняє асимптотичне співвідношення

$$\omega_N(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$$

для всіх $(x,t)\in(0;1)\times(0;t_1]$, $N=0,1,\ldots$.

Аналогічно доводиться асимптотична рівність $\omega_N(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$ для $(x;t)\in(0;1)\times\times(t_i;t_{i+1}]$ для випадку $i\geq 2$ за умови, що $(t_i,t_{i+1}]\subset(0;T)$.

Звідси випливає справедливість теореми.

Відмітимо, що з теореми випливає, що асимптотичний розв'язок (79) задовольняє крайові умови (3) з точністю $O(\varepsilon^{n-m+1})$.

Висновки. Таким чином, у статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку задачі Неймана для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з умовою імпульсної дії у фіксовані моменти часу та доведено теорему про порядок, з яким побудований наближений розв'язок задовольняє початкову задачу.

1. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплоотдача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967. — 491 с.
2. *Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А.* Асимптотическое решение задачи о распространении тепла в тонких телах // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**. № 1. — С. 13–21.
3. *Велижанина К. А., Вожукова Е. А., Нефедов Н. Н.* О влиянии вязкости и теплопроводности среды на характеристики цилиндрического резонатора // Акуст. журн. — 1986. — **32**, вып. 1. — С. 114–116.
4. *Польский Б. С.* Численное моделирование полупроводниковых приборов. — Рига: Зинатне, 1986. — 167 с.
5. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях // Совр. пробл. математики. — М.: ВИНИТИ, 1980. — **15**. — С. 3–94.
6. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. — 1981. — **36**, вып. 3 (219). — С. 63–123.
7. *Аксельсон О., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Метод локальных функций Грина для сингулярно возмущенной задачи конвекции-диффузии // Докл. РАН. — 2003. — **388**, № 2. — С. 166–167.
8. *Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф.* Сингулярно возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами // Мат. заметки. — 2002. — **72**, № 5. — С. 654–664.
9. *Mo Jiaqi.* A class of nonlinear singularly perturbed problems for reaction diffusion equations // Acta Math. Sci. Ser. B. — 2003. — **23**, № 3. — P. 377–385.
10. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, № 5. — С. 3–122.
11. *Васильева А. Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Там же. — 1963. — **18**, № 3. — С. 15–86.
12. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
13. *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. — 1960. — **1**, № 2. — С. 233–237.
14. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1977. — **29**, № 6. — С. 750–762.

15. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 287 с.
16. *Самойленко А. М., Каплун Ю. І., Самойленко В. Г.* Сингулярно збурені диференціальні рівняння з імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 8. — С. 1089 – 1099.
17. *Хомченко Л. В.* Сингулярно збурене рівняння теплопровідності з імпульсною дією // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. — 2004. — Вип. 11 – 12. — С. 101 – 105.
18. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — Київ: Либідь, 2003. — 509 с.
19. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах. — Київ: Либідь, 2003. — 502 с.
20. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с ингегральными условиями // Дифференц. уравнения. — 2004. — **40**, № 4. — С. 547 – 564.

Одержано 03.02.2005