УДК 517.968

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

А. В. Плотников

Одес. акад. строительства и архитектуры
Украина, 65029, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail: a-plotnikov@ukr.net

А. В. Тумбрукаки

Южно-укр. пед. ун-т
Украина, 65020, Одесса, ул. Старопортофранковская, 26

For an integro-differential inclusion with Hukuhara derivative, we introduce the notion of a quasisolution and give conditions for the set of quasisolutions to coincide with the set of the usual solutions. We also prove theorems on relaxations of the usual solutions and on compactness of the set of such solutions.

Для інтегро-диференціального включення з похідною Хукухари введено поняття квазірозв'язку і наведено умови, за яких множина квазірозв'язків збігається з множиною звичайних розв'язків, а також доведено теореми про релаксацію звичайних розв'язків і компактність їхньої множини.

1. Введение. Понятие дифференциального уравнения с производной Хукухары было введено в работе [1] как обобщение обычного дифференциального уравнения на многозначный случай. Исследования данного уравнения проводились в работах [2–5], а полученные результаты были применены при исследовании, например, свойств множества достижимости обычного дифференциального включения в банаховом пространстве [6] или свойств решений нечеткого дифференциального уравнения [7–10].

В дальнейшем в работе А. В. Плотникова [11] было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары как обобщение обычного дифференциального включения и дифференциального уравнения с производной Хукухары. Свойства данного типа включения исследовались в работах [5, 12–16].

Данная работа является продолжением исследований, опубликованных в [17]. В ней вводится понятие квазирешения и доказывается теорема о связи квазирешений с обычными решениями, а также доказываются теорема о релаксации и компактность множества обычных решений для такого типа включений.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathrm{comp}(R^n)(\mathrm{conv}(R^n))$ — пространство непустых компактных (и выпуклых) подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in \mathrm{comp}(R^n); S_r(x)$ — шар радиуса $r \geq 0$ с центром в $x \in R^n$; $S_r(A) = A + S_r(0)$.

Обозначим через $\mathrm{cc}(R^n)(\mathrm{cocc}(R^n))$ пространство, состоящее из всех непустых компактных (и выпуклых) подмножеств пространства $\operatorname{conv}(R^n)$ с метрикой

$$d(A,B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} h(a,b), \max_{b\in B}\min_{a\in A} h(a,b)\},$$

а через $\operatorname{tend}(A)$ минимальное подмножество множества $A \in \operatorname{cc}(R^n)$ такое, что

$$\operatorname{conv}\operatorname{tend}(A) \equiv \operatorname{conv}A,$$

где $\operatorname{conv}A$ — выпуклая оболочка множества $A \in \operatorname{cc}(R^n)$.

Рассмотрим интегро-дифференциальное включение

$$D_h X \in F\left(t, X, \int\limits_0^t \Phi(s, X(s))ds\right), \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $D_hX(t)$ — производная Хукухары от многозначного отображения $X(\cdot)$ в точке $t \in \in [0,T]$, т. е. существует Δ-окрестность точки t такая, что $(t-\Delta, t+\Delta) \subset [0,T]$ и для любых $t', t'' \in (t-\Delta, t+\Delta)$ и $t' < t''$ существует множество $G(t',t'') \in \operatorname{conv}(R^n)$, которое называется разностью Хукухары множеств $X(t'')$ и $X(t')$,

$$G(t',t'') = X(t'') \overset{h}{-} X(t'),$$

такое, что

$$X(t'') = X(t') + G(t',t'')$$

и выполняется тождество

$$\lim_{\Delta\to 0_+} h(\Delta^{-1}\times(X(t+\Delta) \overset{h}{-} X(t)), D_hX(t)) = \lim_{\Delta\to 0_+} h(\Delta^{-1}\times(X(t) \overset{h}{-} X(t-\Delta)), D_hX(t));$$

$\Phi(\cdot,\cdot) : R^1 \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{cc}(R^m)$, $F(\cdot,\cdot,\cdot) : R^1 \times \operatorname{conv}(R^n) \times \operatorname{cocc}(R^m) \to \operatorname{cc}(R^n)$ — многозначные отображения, интеграл в (1) понимается в смысле Ауманна – Хукухары [5, 11, 13].

Определение 1. *Абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot)$ называется обычным решением интегро-дифференциального включения (1), если оно удовлетворяет (1) почти всюду на $[0,T]$.*

Обозначим через $O(F)$ множество обычных решений интегро-дифференциального включения (1).

Определение 2. *Абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot)$ называется квазирешением интегро-дифференциального включения (1), если существует последовательность многозначных отображений $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:*

1) $X_k(\cdot)$ абсолютно непрерывно на $[0,T]$, $k = 1,2,\dots$;

2) $h(D_hX_k(t), 0) \le m(t)$, $t\in[0,T]$, $k = 1,2,\dots$, $m(\cdot) \in L_1[0,T]$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty} X_k(t) = X(t),\, t \in [0,T]$;

4) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{dist}\left(D_h X_k(t), F\left(t, X_k(t), \int\limits_0^t \Phi(s, X_k(s))ds\right)\right) = 0$ *почти всюду на* $[0,T]$*, где* $\operatorname{dist}(a,B) = \min\limits_{b\in B} h(a,b),\, a \in \operatorname{conv}(R^n),\, B \in \operatorname{cc}(R^n)$.

Обозначим через $Q(F)$ множество квазирешений интегро-дифференциального включения (1).

3. Основной результат. Сначала покажем, что при некоторых условиях, накладываемых на правую часть системы (1), множество квазирешений и множество обычных решений совпадают.

Теорема 1. *Пусть многозначные отображения* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ *и* $\Phi(\cdot,\cdot)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $F(\cdot, X, Y)$ *измеримо для всех* $(X,Y) \in \operatorname{conv}(R^n) \times \operatorname{cocc}(R^m)$ *на* $[t_0, T]$;

2) $F(t, \cdot, Y)$ *непрерывно для всех* $(t, Y) \in [0,T] \times \operatorname{cocc}(R^m)$ *на* R^n;

3) $F(t, X, \cdot)$ *непрерывно для всех* $(t, x) \in [0,T] \times \operatorname{conv}(R^n)$ *на* $\operatorname{cocc}(R^m)$;

4) $\Phi(\cdot, x)$ *измеримо для всех* $X \in \operatorname{conv}(R^n)$ *на* $[0,T]$;

5) $\Phi(t,\cdot)$ *непрерывно для всех* $t \in [0,T]$ *на* $\operatorname{conv}(R^n)$;

6) существует $m(\cdot) \in L_1[0,T]$ *такая, что*

$$d(F(t,X,Y),0) \le m(t), \quad (t,X,Y) \in [0,T] \times \operatorname{conv}(R^n) \times \operatorname{cocc}(R^m);$$

7) существует $k(\cdot) \in L_1[0,T]$ *такая, что*

$$d(\Phi(t,X),0) \le k(t), \quad (t,X) \in [0,T] \times \operatorname{conv}(R^n).$$

Тогда $O(\operatorname{conv}F) = Q(F) = Q(\operatorname{conv}F)$.

Доказательство. Очевидно, что $Q(F) \subset Q(\operatorname{conv}F)$. Покажем, что

$$Q(\operatorname{conv}F) \subset O(\operatorname{conv}F).$$

Пусть $X(\cdot) \in Q(\operatorname{conv}F)$. Тогда существует последовательность многозначных отображений $\{X_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$, сходящаяся к $X(\cdot)$, такая, что:

1) $X_i(\cdot)$ абсолютно непрерывны на $[0,T]$, $i = 1,2,\ldots$;

2) $h(D_h(X_i(t),0) \le m(t), \quad t \in [0,T], i = 1,2,\ldots, m(\cdot) \in L_1[0,T]$;

3) $\lim\limits_{i\to\infty} X_i(t) = X(t),\, t \in [0,T]$;

4) $\lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{dist}\left(D_h X_i(t), F\left(t, X_i(t), \int\limits_0^t \Phi(s, X_i(s))ds\right)\right) = 0$ почти всюду на $[0,T]$.

Обозначим

$$\psi_i(t) = \int\limits_0^t \Phi(s, X_i(s))ds, \quad \psi(t) = \int\limits_0^t \Phi(s, X(s))ds.$$

Из непрерывности многозначного отображения $\Phi(t,\cdot)$ по X следует, что

$$\lim_{i\to\infty} d(\Phi(t,X_i(t)),\Phi(t,X(t))) = 0$$

для почти всех $t \in [0,T]$, а следовательно, и

$$\lim_{i\to\infty} d(\psi_i(t),\psi(t)) = 0$$

для $t \in [0,T]$.

Из непрерывности многозначного отображения $F(t,\cdot,\cdot)$ по X и Y следует, что

$$\lim_{i\to\infty} d(\mathrm{conv}F(t,X_i(t),\psi_i(t)),\mathrm{conv}F(t,X(t),\psi(t))) = 0$$

для почти всех $t \in [0,T]$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и определим

$$T_i = \left\{ t \in [0,T] | \mathrm{dist}\left(D_h X_i(t), \mathrm{conv}F\left(t, X(t), \int\limits_0^t \Phi(s,X(s))ds \right)\right) > \varepsilon \right\}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{meas}(T_i) = 0$.

Поскольку $\mathrm{conv}F(t,X(t),\psi(t))$ измеримо на $[0,T]$, существует измеримый многозначный селектор $G(\cdot)$ такой, что

$$G(t) \in \mathrm{conv}F(t,X(t),\psi(t)), \quad h(G(t),0) \le m(t)$$

для почти всех $t \in [0,T]$.

Определим

$$U_i(t) = \begin{cases} D_h X_i(t) & \text{для почти всех} \quad t \in [0,T]\backslash T_i, \\ G(t) & \text{для} \quad t \in T_i, \end{cases}$$

которые удовлетворяют включению $U_i(t) \in S_\varepsilon(\mathrm{conv}F(t,X(t),\psi(t)))$ почти всюду на $[0,T]$, и абсолютно непрерывные функции $V_i(\cdot)$, для которых почти всюду на $[0,T]$ $D_h V_i(t) = U_i(t)$.

Следовательно,

$$V_i(t_2) \overset{h}{-} V_i(t_1) \in \int\limits_{t_1}^{t_2} S_\varepsilon \left(\mathrm{conv}F\left(t, X(t), \int\limits_0^t \Phi(s,X(s))ds \right)\right) dt$$

для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ таких, что $t_1 \le t_2$.

Поскольку $\lim\limits_{i\to\infty} h(V_i(t),X(t)) = 0$, то

$$X(t_2) \overset{h}{-} X(t_1) \in \int\limits_{t_1}^{t_2} S_\varepsilon \left(\mathrm{conv}F\left(t, X(t), \int\limits_0^t \Phi(s,X(s))ds \right)\right) dt.$$

Из абсолютной непрерывности $X(\cdot)$ и [17] следует, что для почти всех $t \in [0,T]$

$$D_hX(t) \in S_\varepsilon\left(\mathrm{conv}F\left(t, X(t), \int\limits_0^t \Phi(s, X(s))ds\right)\right).$$

Далее, так как ε — произвольное число, то

$$D_hX(t) \in \mathrm{conv}F\left(t, X(t), \int\limits_0^t \Phi(s, X(s))ds\right)$$

для почти всех $t \in [0,T]$, т. е. $X(\cdot) \in O(\mathrm{conv}F)$.

Теперь пусть $X(\cdot) \in O(\mathrm{conv}F)$. Покажем, что $X(\cdot) \in Q(F)$.

Из предположений теоремы следует, что $F(\cdot, X(\cdot), \psi(\cdot))$ измерима на $[0,T]$ и существуют система непересекающихся компактных подынтервалов $\{I_i^k\}$, а также множество $N \subset [0,T]$, $\mathrm{meas}(N) = 0$ такие, что $[0,T] = \bigcup\limits_i I_i^k \bigcup N$ и:

1) $D_hX(t) \in \mathrm{conv}F\left(t, X(t), \int\limits_0^t \Phi(s, X(s))ds\right)$ почти всюду на $[0,T]$;

2) $h(D_hX(t), D_hX(\tau)) \le 1/k$;

3) $d(F(t, X(t), \psi(t)), F(\tau, X(\tau), \psi(\tau))) \le 1/k$,

где $t, \tau \in I_i^k$, $i = 1, 2, \ldots$, и $k \in \mathbb{N}$ — произвольное.

Определим $U_k(\cdot)$ и $\widetilde{F}_k(\cdot)$ следующим образом:

$$U_k(t) = \begin{cases} D_hX(t_i), & t \in I_i^k,\ i = 1, 2, \ldots, \\ 0, & t \in N, \end{cases}$$

$$\widetilde{F}_k(t) = \begin{cases} F(t_i, X(t_i), \psi(t_i)), & t \in I_i^k,\ i = 1, 2, \ldots, \\ 0, & t \in N, \end{cases}$$

где $t_i \in I_i^k$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда $h(U_k(t), D_hX(t)) \le 1/k$, $h(\widetilde{F}_k(t), F(t, X(t), \psi(t))) \le 1/k$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Поскольку

$$D_hX(t_i) \in \mathrm{conv}F(t_i, X(t_i), \psi(t_i))$$

и

$$\mathrm{tend}(F(t_i, X(t_i), \psi(t_i))) = \mathrm{tend}(\mathrm{conv}F(t_i, X(t_i), \psi(t_i))),$$

существует такое множество $S_i^k \in \mathrm{cc}(R^n)$, что $D_hX(t_i) \in S_i^k$ и $\mathrm{tend}(S_i^k) \subset F(t_i, X(t_i), \psi(t_i))$.

Положим

$$S_k(t) = \begin{cases} S_i^k & \text{при } t \in I_i^k, \\ 0 & \text{при } t \in N. \end{cases}$$

Тогда $U_k(t) \in S_k(t)$, $\mathrm{tend}(S_k(t)) \subset \widetilde{F}_k(t)$, $|U_k(t)| \le |S_k(t)| \le m(t)$ почти всюду на $[0,T]$.

Разобьем сегмент $[0,T]$ на m подсегментов $[a_{j-1},a_j]$, $j=\overline{1,m}$, где $a_j=Tj/m$, таких, что $a_j-a_{j-1}<1/k$, $j=\overline{1,m}$.

Обозначим $R(U,I)=\displaystyle\int_I U(s)ds$, где I — измеримое множество из R^1. Существует такое многозначное отображение $W_k(\cdot)$, что $W_k(t)\in \operatorname{tend}(S_k(t))$ почти всюду на $[0,T]$ и $R(U_k,[a_{j-1},a_j])=R(W_k,[a_{j-1},a_j])$ для каждого j.

Пусть $Y_k(t)=R(W_k,[0,T])+X(0)$. Тогда $D_hY_k(t)=W_k(t)\in S_k(t)$, $h(D_hy_k(t),0)\le$ $\le m(t)$ почти всюду на $[0,T]$, а также

$$\operatorname{dist}(D_hY_k(t),F(t,x(t),\psi(t)))\le 1/k$$

почти всюду на $[0,T]$.

Пусть $t\in[0,T]$. Тогда существует $j\in\{1,\ldots,m\}$ такое, что $t\in[a_{j-1},a_j]$ и, следовательно,

$$h(Y_k(t),X(t))\le h(R(W_k,[a_{j-1},t]),R(U_k,[a_{j-1},t]))+$$

$$+h(R(U_k,[0,T]),R(D_hX,[0,T]))\le\ldots\le 2\int\limits_{a_{j-1}}^{t} m(s)ds+T/k.$$

Отсюда получаем $\lim\limits_{k\to\infty}h(Y_k(t),X(t))=0$ для всех $t\in[0,T]$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{dist}(D_hY_k(t),F(t,X(t),$ $\psi(t)))=0$ для почти всех $t\in[0,T]$. Но так как для любого $k\in\mathbb{N}$ и почти всех $t\in[0,T]$

$$D_hY_k(t)\in S_{1/k}(F(t,X(t),\psi(t))),\quad F(t,X(t),\psi(t))\subset S_{1/k}(F(t,Y_k(t),\psi_k(t))),$$

то

$$D_hY_k(t)\in S_{2/k}(F(t,Y_k(t),\psi_k(t))).$$

Следовательно, для почти всех $t\in[0,T]$

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{dist}(D_hY_k(t),F(t,Y_k(t),\psi_k(t)))=0.$$

Тем самым $X(\cdot)\in Q(F)$.

Теорема доказана.

Воспользуемся полученным результатом для доказательства теоремы релаксации.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1, а также условие*
8) $F(t,\cdot,\cdot)$ и $\Phi(t,\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица с константами $l_1,l_2>0$, т. е.

$$h(F(t,X_1,Y_1),F(t,X_2,Y_2))\le l_1(h(X_1,X_2)+d(Y_1,Y_2)),$$

$$d(\Phi(t,X_1),\Phi(t,X_2))\le l_2h(X_1,X_2)$$

и $X(\cdot)\in O(\operatorname{conv}F)$.

Тогда существует последовательность $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к $X(\cdot)$ и $X_k(\cdot)\in$ $\in O(F)$, $k=\overline{1,\infty}$.

Доказательство. Согласно теореме 1 решение $X(\cdot)$ является также квазирешением системы (1), т. е. существует последовательность абсолютно непрерывных многозначных отображений $\{Y_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} Y_k(t) = X(t),\ t \in [0,T]$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k(t) = 0$ для почти всех $t \in [0,T]$, где

$$\rho_k(t) = \operatorname{dist}\left(D_h Y_k(t), F\left(t, Y_k(t), \int\limits_0^t \Phi(s, Y_k(s))ds\right)\right).$$

Из результатов [17] следует, что существуют абсолютно непрерывные функции $X_k(\cdot) \in O(F)$, $k = \overline{1,\infty}$, такие, что:

1) $X_k(t_0) = X_0$;

2) $h(X_k(t), Y_k(t)) \le h(X_k(0), Y_k(0))e^{l(t^2+t)} + \int\limits_0^t e^{l[(t-s)^2+(t-s)]}\rho_k(s)ds$, где $t \in [0,T]$, $l = \max\{l_1, l_1 \cdot l_2\}$ $k = \overline{1,\infty}$.

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} h(X_k(0), Y_k(0)) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k(t) = 0$ для почти всех $t \in [0,T]$, то

$$\lim_{k\to\infty}\left[h(X_k(0), Y_k(0))e^{l(t^2+t)} + \int\limits_0^t e^{l[(t-s)^2+(t-s)]}\rho_k(s)ds\right] = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T].$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} X_k(t) = X(t)$$

для всех $t \in [0,T]$.

Теорема доказана.

Теперь докажем одно из важнейших свойств множества обычных решений — его компактность.

Теорема 3. *Пусть многозначные отображения* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ *и* $\Phi(\cdot,\cdot)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $F(\cdot, X, Y)$ *измеримо для всех* $(X,Y) \in \operatorname{conv}(R^n) \times \operatorname{cocc}(R^m)$ *на* $[0,T]$;

2) $F(t,\cdot,\cdot)$ *непрерывно для всех* $t \in [0,T]$ *на* $\operatorname{conv}(R^n) \times \operatorname{cocc}(R^m)$;

3) $\Phi(\cdot, X)$ *измеримо для всех* $X \in \operatorname{conv}(R^n)$ *на* $[0,T]$;

4) $\Phi(t,\cdot)$ *непрерывно для всех* $t \in [0,T]$ *на* $\operatorname{conv}(R^n)$;

5) существует $m(\cdot) \in L_1[0,T]$ *такая, что*

$$d(F(t,X,Y),0) \le m(t), \quad (t,X,Y) \in [0,T] \times \operatorname{conv}(R^n) \times \operatorname{cocc}(R^m);$$

6) существует $k(\cdot) \in L_1[0,T]$ *такая, что*

$$d(\Phi(t,X),0) \le k(t), \quad (t,X) \in [0,T] \times \operatorname{conv}(R^n);$$

7) для всех $(t,X,Y) \in [0,T] \times \operatorname{conv}(R^n) \times \operatorname{cocc}(R^m)$ *множество* $F(t,X,Y)$ *выпукло.*

Тогда множество обычных решений интегро-дифференциального включения (1) компактно в пространстве $C^M[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\{X_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность обычных решений системы (1), т. е. почти для всех $t \in [0,T]$

$$D_h X_n(t) \in F\left(t, X_n(t), \int_0^t \Phi(s, X_n(s))ds\right).$$

Тогда [16] для любых $t, \tau \in [0,T]$ таких, что $t > \tau$, имеем

$$X_n(t) \overset{h}{-} X_n(\tau) \in \int_\tau^t F\left(\xi, X_n(\xi), \int_0^\xi \Phi(s, X_n(s))ds\right) d\xi.$$

Следовательно, для любых $t > \tau, t, \tau \in [0,T]$,

$$h(X_n(t), X_n(\tau)) \le \left|\int_\tau^t m(s)ds\right|.$$

Тем самым последовательность $\{X_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на $[0,T]$, а тогда согласно теореме Асколи – Арцела [18] существует ее подпоследовательность $\{X_{n_k}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся на $[0,T]$ к некоторому абсолютно непрерывному многозначному отображению $X(\cdot)$.

Из условий 2, 4 и 7 получим

$$X(t) \overset{h}{-} X(\tau) \in \limsup_{k\to\infty} \int_\tau^t F\left(\xi, X_{n_k}(\xi), \int_0^\xi \Phi(s, X_{n_k}(s))ds\right) d\xi \subset$$

$$\subset \int_\tau^t \limsup_{k\to\infty} F\left(\xi, X_{n_k}(\xi), \int_0^\xi \Phi(s, X_{n_k}(s))ds\right) d\xi \subset$$

$$\subset \int_\tau^t F\left(\xi, X(\xi), \int_0^\xi \Phi(s, X(s))ds\right) d\xi$$

для всех $t, \tau \in [0,T]$ таких, что $t > \tau$.

Следовательно, $X(\cdot)$ является обобщенным решением системы (1) и на основании результатов [17] имеем

$$D_h X(t) \in F\left(t, X(t), \int_0^t \Phi(s, X(s))ds\right)$$

для почти всех $t \in [0,T]$, т. е. $X(\cdot) \in O(F)$.

Теорема доказана.

1. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Bull. Unione mat. ital. — 1969. — **4**, № 2. — P. 491 – 501.

2. *Brandao Lopes Pinto A. J., De Blasi F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Bull. Unione mat. ital. — 1970. — **4**. — P. 534 – 538.

3. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Bull. Unione mat. ital. — 1971. — **4**, № 4. — P. 941 – 949.

4. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. mat. — 1976. — **9**, № 3. — P. 397 – 408.

5. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.

6. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.

7. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 301 – 317.

8. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — **35**, № 3. — P. 389 – 396.

9. *Kaleva O.* The Peano theorem for fuzzy differential equations revisited // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — **98**, № 1. — P. 147 – 148.

10. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — **22**, № 2. — P. 271 – 279.

11. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления. — Одесса, 1982. — 35 с. — Деп. в ВИНИТИ, № 2036-82.

12. *Плотников А. В.* Теорема существования и непрерывной зависимости от параметра решений дифференциальных включений с производной Хукухары. — Одесса, 1983. — 25 с. — Деп. в ВИНИТИ, № 1949-83.

13. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары. — Одесса, 1987. — 43 с. — Деп. в Укр НИИНТИ, № 989-Ук87.

14. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 1. — С. 121 – 125.

15. *Janiak T., Luczak-Kumorek E.* Bogolubov's type theorem for functional differential inclusions with Hukuhara's derivative // Stud. Univ. Babes-Bolyai. Math. — 1991. – № 1. — P. 41 – 55.

16. *Janiak T., Luczak-Kumorek E.* Method of averaging for integral-differential equation with Hukuhara's derivative // Funct. Different. Equat. — 2004. — **11**, № 3-4. — P. 407 – 427.

17. *Плотников А. В., Тумбрукаки А. В.* Некоторые свойства решений дифференциальных включений с производной Хукухары // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — С. 50 – 58.

18. *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432 с.

Получено 31.01.2005