УДК 517.9

ПРО ГЛОБАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Л. М. Клопотюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

В. В. Могильова

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 02057, Київ, пр. Перемоги, 37

О. О. Місяць

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We present conditions under which global solutions of linear difference equations with deviating argument are solutions of ordinary difference equations.

Наведено умови, при яких глобальними розв'язками лінійних різницевих рівнянь з аргументом, що відхиляється, є розв'язки звичайних різницевих рівнянь.

1. Постановка задачі. Дану роботу присвячено питанню існування двосторонніх глобальних розв'язків лінійних різницевих рівнянь з відхиленням аргументу вигляду:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n x_{n+p} + f_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ p = \text{const}, \tag{1}$$

де x_n, f_n — вектори з простору R^d, A_n, B_n — $(d \times d)$-вимірні матриці, n — цілі числа і p — фіксоване ціле число. В залежності від знаку p дане рівняння може бути як рівнянням із запізненням, так і рівнянням з упередженням.

Глобальним розв'язком такого рівняння назвемо функцію x_n, яка при кожному цілому n задовольняє співвідношення (1). Оскільки дане рівняння може бути як з упередженням, так і з запізненням, то проблема відшукання його глобальних розв'язків є нетривіальною. Для розв'язання цієї задачі будемо наслідувати ідеї роботи [1], в якій аналогічна проблема розглядається для диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється.

Відмітимо, що питанню односторонньої продовжуваності розв'язків різницевих рівнянь присвячено багато робіт. З цього приводу відзначимо роботи [2, 3], що містять детальну бібліографію. Щодо двосторонньої продовжуваності розв'язків таких рівнянь, то це питання ще досить мало вивчене. Можна вказати, наприклад, роботи Ю. В. Теплінського та його учнів [4, 5], в яких дане питання розв'язувалося в контексті побудови періодичних розв'язків та тороїдальних многовидів таких рівнянь.

У даній роботі проблема глобальних розв'язків вирішується через побудову для рівняння (1) різницевого рівняння

$$x_{n+1} = C_n x_n + g_n, \quad \det C_n \neq 0, \tag{2}$$

що є рівнянням без відхилення, всі глобальні розв'язки якого були б розв'язками рівняння (1). Зауважимо, що для рівняння (2) питання побудови його глобальних розв'язків розв'язується значно простіше, ніж для рівняння (1). Так, продовжуваність розв'язків вправо тривіально випливає з самого вигляду рівняння, для однозначної ж продовжуваності їх вліво достатньо вимагати невиродженості матриць C_n, тобто щоб $\det C_n \neq 0$.

Спочатку знайдемо для C_n та g_n рівняння вигляду

$$C_n = A_n + B_n X_{n+p}, \tag{3}$$

$$g_n = B_n \sum_{\nu=l}^{n+p-1} \Omega_{\nu+1}^{n+p} g_\nu + f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad p = \mathrm{const}, \tag{4}$$

а потім доведемо основну теорему про їх розв'язність.

Теорема 1. *Нехай A, B, f визначені та обмежені на $\mathbb{Z}$, задовольняють нерівності*

$$\| A_n \| \leq \alpha, \quad \| B_n \| \leq \beta, \quad \| f_n \| \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і такі, що

$$e^{(\alpha+1)|p+1|+1} < 1.$$

Тоді існують визначені та обмежені на $\mathbb{Z}$ розв'язки C, g рівнянь (3), (4), що задовольняють нерівності

$$\| C_n \| \leq M, \quad \| g_n \| \leq M_1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де M, M_1 — деякі сталі, що залежать від $|p|$, β, α.

Наступна теорема встановлює властивості розв'язків рівнянь (3), (4), аналогічні властивостям функцій A, B, f.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, а A, B, f є періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними послідовностями. Тоді періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними є розв'язки C, g рівнянь (3), (4).*

2. Деякі допоміжні твердження. Для доведення анонсованих вище результатів нам знадобляться дві леми. Перша лема стосується оцінки сум вигляду

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k. \tag{5}$$

Лема 1. *Справжується оцінка*

$$S_{k-1}(n) \leq \frac{(n+1)^k}{k}. \tag{6}$$

Доведення. Маємо

$$(a+1)^k = a^k + k \cdot a^{k-1} + C_k^2 \cdot a^{k-2} + \ldots + k \cdot a + 1,$$

$$2^k = 1^k + k \cdot 1^{k-1} + C_k^2 \cdot 1^{k-2} + \ldots + k \cdot 1 + 1,$$

$$3^k = 2^k + k \cdot 2^{k-1} + C_k^2 \cdot 2^{k-2} + \ldots + k \cdot 2 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n^k = (n-1)^k + k \cdot (n-1)^{k-1} + C_k^2 \cdot (n-1)^{k-2} + \ldots + k \cdot (n-1) + 1,$$

$$(n+1)^k = n^k + k \cdot n^{k-1} + C_k^2 \cdot n^{k-2} + \ldots + k \cdot n + 1.$$

Позначимо

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k,$$

$$S_{k-1}(n) = 1^{k-1} + 2^{k-1} + 3^{k-1} + \ldots + n^{k-1},$$

$$S_{k-2}(n) = 1^{k-2} + 2^{k-2} + 3^{k-2} + \ldots + n^{k-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тепер додамо рівняння по стовпчиках. Після скорочення дістанемо

$$(n+1)^k = k \cdot S_{k-1}(n) + C_k^2 \cdot S_{k-2}(n) + \ldots + k \cdot S_1(n) + n + 1,$$

$$k \cdot S_{k-1}(n) = (n+1)^k - C_k^2 \cdot S_{k-2}(n) - \ldots - n - 1,$$

$$S_{k-1}(n) = \frac{(n+1)^k - C_k^2 \cdot S_{k-2}(n) - \ldots - n - 1}{k}.$$

Оскільки

$$S_1(n) > 0, \quad S_2(n) > 0, \ldots, S_{k-2}(n) > 0,$$

то

$$S_{k-1}(n) \le \frac{(n+1)^k}{k},$$

що й потрібно було довести.

Наступна лема стосується вигляду матриціанта лінійного рівняння

$$x_{n+1} = x_n + D_n x_n. \tag{7}$$

Лема 2. *Матрицант Ω_0^n рівняння (7) має вигляд*

$$\Omega_0^n = E + \sum_{k=0}^{n-1} D_k + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} + \ldots, \tag{8}$$

і загальний розв'язок даного рівняння подається формулою

$$x_n = \Omega_0^n x_0, \tag{9}$$

причому

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_k = 0. \tag{10}$$

Доведення. Спочатку доведемо збіжність ряду (8).

Оцінимо кожну суму окремо. Для кожного фіксованого n маємо оцінки

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} D_k \right\| \leq A \frac{n+1}{1},$$

де $A = \max\{\|D_0\|, \|D_1\|, \ldots, \|D_{n-1}\|\}$, і

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \right\| \leq A^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{k_1=0}^{k-1} 1 \right) = A^2 \sum_{k=0}^{n-1} k \leq A^2 \frac{(n+1)^2}{1 \cdot 2},$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} \right\| \leq A^3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{2} = \frac{1}{2} A^3 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \leq$$

$$\leq A^3 \frac{(n+1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = A^3 \frac{(n+1)^3}{3!}.$$

Остання оцінка випливає з леми 1. Аналогічно

$$\sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} \sum_{k_3=0}^{k_2-1} D_{k_3} \leq A^4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^3}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} A^4 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3 \leq A^4 \frac{(n+1)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = A^4 \frac{(n+1)^4}{4!}.$$

За методом математичної індукції знаходимо

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} \ldots \sum_{k_{k-1}=0}^{k_{k-2}-1} D_{k_{k-1}} \right\| \leq A^k \frac{(n+1)^k}{k!}.$$

Очевидно, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{(n+1)^k}{k!}$$

є збіжним, а отже, збігається і ряд (8), що й потрібно було довести.

Тепер покажемо, що формула (9) задає розв'язок рівняння (7). Маємо

$$x_{n+1} = \Omega_0^{n+1}x_0 = \left(E + \sum_{k=0}^{n} D_k + \sum_{k=0}^{n} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} + \sum_{k=0}^{n} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} + \ldots\right) x_0 =$$

$$= \left(E + D_n + \sum_{k=0}^{n-1} D_k + D_n \sum_{k_1=0}^{n-1} D_{k_1} + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} + \right.$$

$$\left. + D_n \sum_{k_1=0}^{n-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} + \ldots\right) x_0 =$$

$$= \left(E + \sum_{k=0}^{n-1} D_k + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} + \ldots\right) x_0 +$$

$$+ D_n \left(E + \sum_{k_1=0}^{n-1} D_{k_1} + \sum_{k_1=0}^{n-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} + \sum_{k_1=0}^{n-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} \sum_{k_3=0}^{k_2-1} D_{k_3} + \ldots\right) x_0 =$$

$$= \Omega_0^n x_0 + D_n \Omega_0^n x_0 = x_n + D_n x_n.$$

3. Виведення рівнянь (3), (4). Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = C_n x_n + g_n$$

у припущенні, що C_n — $(d \times d)$-вимірна матриця, а g_n — d-вимірна вектор-функція такі, що

$$\|C_n\| \leq M, \quad \|g_n\| \leq M_1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Згідно з [2] загальний його розв'язок має вигляд

$$x_n = \Omega_0^n x_0 + \sum_{\nu=0}^{n-1} \Omega_{\nu+1}^n g_\nu \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

або більш загальніше

$$x_n = \Omega_l^n x_0 + \sum_{\nu=l}^{n-1} \Omega_{\nu+1}^n g_\nu \quad \forall n, l \in \mathbb{Z}$$

(при $l = n \Rightarrow \Omega_l^n = E$). Ця ж сама функція буде розв'язком рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n x_{n+p} + f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ p = \text{const},$$

якщо

$$x_{n+1} = C_n\left(\Omega_l^n x_0 + \sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu\right) + g_n =$$

$$= A_n\left(\Omega_l^n x_0 + \sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu\right) + B_n\left(\Omega_l^{n+p} x_0 + \sum_{\nu=l}^{n+p-1}\Omega_{\nu+1}^{n+p} g_\nu\right) + f_n,$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad p = \mathrm{const}.$$

Покладемо $x_0 = 0$:

$$C_n\sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu + g_n = A_n\sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu + B_n\sum_{\nu=l}^{n+p-1}\Omega_{\nu+1}^{n+p} g_\nu + f_n,$$

тоді

$$C_n\Omega_l^n = A_n\Omega_l^n + B_n\Omega_l^{n+p},$$

а при $l = n$

$$C_n = A_n + B_n\Omega_n^{n+p}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Підставимо отриманий вираз для C_n у рівняння

$$C_n\sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu + g_n = A_n\sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu + B_n\sum_{\nu=l}^{n+p-1}\Omega_{\nu+1}^{n+p} g_\nu + f_n.$$

В результаті отримаємо

$$A_n\sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu + B_n\sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n\Omega_n^{n+p} g_\nu + g_n = A_n\sum_{\nu=l}^{n-1}\Omega_{\nu+1}^n g_\nu + B_n\sum_{\nu=l}^{n+p-1}\Omega_{\nu+1}^{n+p} g_\nu + f_n.$$

Після скорочення перших доданків, враховуючи властивість матриціанта

$$\Omega_{\nu+1}^n\Omega_n^{n+p} = \Omega_{\nu+1}^{n+p}(C),$$

остаточно отримуємо вираз для g_n :

$$g_n = B_n\sum_{\nu=n}^{n+p-1}\Omega_{\nu+1}^{n+p} g_\nu + f_n.$$

Отже, якщо будь-який розв'язок рівняння

$$x_{n+1} = C_n x_n + g_n$$

є глобальним ($\forall n \in \mathbb{Z}$) розв'язком рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n x_{n+p} + f_n,$$

то матриця C_n задовольняє рівняння

$$C_n = A_n + B_n \Omega_n^{n+p}(C),$$

а функція g_n — рівняння

$$g_n = B_n \sum_{\nu=l}^{n+p-1} \Omega_{\nu+1}^{n+p} g_\nu + f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ p = \mathrm{const}.$$

Очевидним є і зворотний висновок:
якщо обмежені функції

$$\|C_n\| \leq M \quad \|g_n\| \leq M_1$$

задовольняють наведені вище рівняння, то функція

$$x_n = \Omega_l^n x_0 + \sum_{\nu=l}^{n-1} \Omega_{\nu+1}^n g_\nu$$

є глобальним розв'язком рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n x_{n+p} + f_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Доведення теореми 1. Розглянемо рівняння

$$C_n = A_n + B_n \Omega_n^{n+p}(C).$$

Судячи з вигляду цього рівняння, не втрачаючи загальності, можемо шукати розв'язок у вигляді

$$C = A + BY.$$

Отримаємо

$$A_n + B_n Y_n = A_n + B_n \Omega_n^{n+p}(A + BY),$$

$$B_n Y_n - B_n \Omega_n^{n+p}(A + BY) = 0,$$

$$B_n(Y_n - \Omega_n^{n+p}(A + BY)) = 0,$$

$$Y_n = \Omega_n^{n+p}(A + BY) + B_n^0, \tag{11}$$

де $B_n B_n^0 = 0$.

Відносно змінної

$$Z = Y - B^0 \quad (Y = Z + B^0)$$

рівняння (11) набере вигляду

$$Z_n = \Omega_n^{n+p}(A + BZ).$$

Підставимо Z у вираз для C:

$$C = A + BY = A + B(Z + B^0) = A + BZ.$$

Ця заміна переводить початкове рівняння

$$C_n = A_n + B_n \Omega_n^{n+p}(C)$$

до вигляду

$$A_n + B_n Z_n = A_n + B_n \Omega_n^{n+p}(A_+ BZ).$$

Зокрема, воно справджується, якщо

$$Z_n = \Omega_n^{n+p}(A_+ BZ),$$

розв'язки цього рівняння є обмеженими функціями.

Визначимо оператор S:

$$SZ_n = \Omega_n^{n+p}(A + BZ - E)$$

на просторі $C(m)$ $(d \times d)$-вимірних матриць Z_n, заданих та обмежених на $\mathbb{Z}$ і таких, що

$$\|Z\|_0 = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|Z_n\| \leq m.$$

Для SZ_n має місце оцінка

$$\|SZ\|_0 \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_n^{n+p} \left(\|A\| + \|B\| \, m + \|E\|\right) \leq e^{(p+1)(\alpha + \beta m + 1)}.$$

Щоб показати правильність цієї оцінки, оцінимо кожен член даного ряду для $\|SZ\|_0$, позначивши $P = \|A\| + \|B\| \, m + \|E\|$:

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} (P) \leq (\alpha + \beta m + 1) \frac{p+1}{1},$$

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} (P) \sum_{k_1=n}^{k-1} (P) \leq (\alpha + \beta m + 1)^2 \sum_{k=n}^{n+p-1} \sum_{k_1=n}^{k-1} 1 \leq (\alpha + \beta m + 1)^2 \frac{(n+1)^2}{1 \cdot 2},$$

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} (P) \sum_{k_1=n}^{k-1} (P) \sum_{k_2=n}^{k_1-1} (P) \leq (\alpha + \beta m + 1)^3 \sum_{k=n}^{n+p-1} \sum_{k_1=n}^{k-1} \sum_{k_2=n}^{k_1-1} 1 \leq (\alpha + \beta m + 1)^3 \frac{(n+1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

За методом математичної індукції для N-го члена буде справедливою оцінка

$$\sum_{k=n}^{n+p-1}(P)\sum_{k_1=n}^{k-1}(P)\sum_{k_2=n}^{k_1-1}(P)\ldots\sum_{k_{N-1}=n}^{k_{N-2}-1}(P)\leq(\alpha+\beta m+1)^N\sum_{k=n}^{n+p-1}\sum_{k_1=n}^{k-1}\sum_{k_2=n}^{k_1-1}\ldots\sum_{k_{N-1}=n}^{k_{N-2}-1}1\leq$$

$$\leq(\alpha+\beta m+1)^N\frac{(n+1)^N}{1\cdot 2\cdot 3\ldots N},$$

тобто

$$\|SZ\|_0\leq\sum_{N=0}^{\infty}(\alpha+\beta m+1)^N\frac{(n+1)^N}{1\cdot 2\cdot 3\ldots N}\leq e^{(p+1)(\alpha+\beta m+1)}.$$

Отже, якщо виконується нерівність

$$e^{(p+1)(\alpha+\beta m+1)}\leq m,$$

то оператор S переводить простір $C(m)$ в себе.

Оцінимо різницю $SZ_n^1-SZ_n^2$ для матриць Z_n^1 та Z_n^2. Позначимо

$$P_n^1=A_n+B_nZ_n^1-E,$$

$$P_n^2=A_n+B_nZ_n^2-E$$

та розглянемо різницю $\Omega_n^{n+p}(P_n^1)-\Omega_n^{n+p}(P_n^2)$. Тоді

$$\sum_{k=n}^{n+p-1}\|B_k\|\left\|Z_k^1-Z_k^2\right\|\leq p\beta\left\|Z^1-Z^2\right\|_0,$$

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p-1}P_k^1\sum_{k_1=n}^{k-1}P_{k_1}^1-\sum_{k=n}^{n+p-1}P_k^2\sum_{k_1=n}^{k-1}P_{k_1}^2\right\|\leq\left\|\sum_{k=n}^{n+p-1}P_k^1\sum_{k_1=n}^{k-1}P_{k_1}^1-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=n}^{n+p-1}P_k^1\sum_{k_1=n}^{k-1}P_{k_1}^2+\sum_{k=n}^{n+p-1}P_k^1\sum_{k_1=n}^{k-1}P_{k_1}^2-\sum_{k=n}^{n+p-1}P_k^2\sum_{k_1=n}^{k-1}P_{k_1}^2\right\|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\|\sum_{k=n}^{n+p-1}P_k^1\sum_{k_1=n}^{k-1}\left\|P_{k_1}^1-P_{k_1}^2\right\|+\sum_{k=n}^{n+p-1}\left\|P_k^1-P_k^2\right\|\sum_{k_1=n}^{k-1}P_{k_1}^2\right\|\leq$$

$$\leq 2\left(\alpha+\beta m+1\right)\beta\left\|Z^1-Z^2\right\|_0\sum_{k=n}^{n+p-1}k\leq$$

$$\leq 2\beta\left(\alpha+\beta m+1\right)\frac{(p+1)^2}{2}\left\|Z^1-Z^2\right\|_0.$$

Аналогічно

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p-1} P_k^1 \sum_{k_1=n}^{k-1} P_{k_1}^1 \sum_{k_2=n}^{k_1-1} P_{k_2}^1 - \sum_{k=n}^{n+p-1} P_k^2 \sum_{k_1=n}^{k-1} P_{k_1}^2 \sum_{k_2=n}^{k_1-1} P_{k_2}^2 \right\| \leq$$

$$\leq 3(\alpha+\beta m+1)^2 \beta \frac{(p+1)^3}{2\cdot 3} \left\| Z^1 - Z^2 \right\|_0 .$$

За методом математичної індукції на N-му кроці будемо мати

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p-1} P_k^1 \sum_{k_1=n}^{k-1} P_{k_1}^1 \sum_{k_N=n}^{k_{N-1}-1} P_{k_N}^1 - \sum_{k=n}^{n+p-1} P_k^2 \sum_{k_1=n}^{k-1} P_{k_1}^2 \ldots \sum_{k_N=n}^{k_{N-1}-1} P_{k_2}^2 \right\| \leq$$

$$\leq N(\alpha+\beta m+1)^{N-1} \beta \frac{(p+1)^N}{2\cdot 3 \cdots N} \left\| Z^1 - Z^2 \right\|_0 .$$

Отже, для шуканої різниці справджується оцінка

$$\left\| SZ_n^1 - SZ_n^2 \right\| \leq \sum_{N=0}^{\infty} \beta |p+1| \frac{(\alpha+\beta m+1)^{N-1}(p+1)^{N-1}}{(N-1)!} \left\| Z^1 - Z^2 \right\|_0 \leq$$

$$\leq \beta |p+1| e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} \left\| Z^1 - Z^2 \right\|_0 .$$

Якщо виконується нерівність

$$\beta |p+1| e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} < 1,$$

то оператор S є стискуючим. Будемо вимагати одночасного виконання нерівностей

$$e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} \leq m$$

та

$$\beta |p+1| e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} < 1.$$

Розв'яжемо рівняння $e^{(p+1)(\alpha+\beta m+1)} = m$. Якщо $e^{(\alpha+1)|p+1|+1} < 1$, то це рівняння має два розв'язки

$$m - e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} > 0 \quad \text{в} \quad \text{точці} \quad m = \frac{1}{\beta(p+1)}.$$

Умова

$$\frac{1}{\beta(p+1)} - e^{(\alpha+1)(p+1)+1} > 0$$

вказує на наявність двох точок перетину. Тоді

$$e^{(\alpha+1)(p+1)+1} < \frac{1}{\beta(p+1)} \Rightarrow \beta(p+1) e^{(\alpha+1)(p+1)+1} < 1.$$

Отже, для

$$m_1 \leq m < \frac{1}{\beta(p+1)}$$

нерівності

$$e^{(p+1)(\alpha+\beta m+1)} \leq m \quad \text{i} \quad \beta(p+1)e^{(p+1)(\alpha+\beta m+1)} < 1$$

виконуються одночасно, і для таких m оператор

$$SZ_n = \Omega_n^{n+p}(A_n + B_n Z_n - E)$$

відображає простір $C(m)$ в себе і є стискуючим.

Простір $C(m)$ відносно норми

$$\|\cdot\|_0 = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\cdot\|$$

є повним нормованим простором. Отже, оператор S має в $C(m)$ єдину нерухому точку. Вона і є єдиним розв'язком рівняння

$$Z_n = \Omega_n^{n+p}\left(A_n + B_n Z_n - E\right).$$

Тепер розглянемо рівняння

$$g_n = B_n \sum_{v=n}^{n+p-1} \Omega_{\nu+1}^{n+p}(C) g_v + f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ p = \mathrm{const}.$$

Виконавши в ньому заміну змінних

$$g = f + Bz,$$

отримаємо відносно змінної z рівняння

$$f_n + B_n z_n = B_n \sum_{v=n}^{n+p-1} \Omega_{\nu+1}^{n+p}(f_v + B_v z_v) + f_n.$$

Зокрема, воно справджується, якщо

$$z_n = \sum_{v=n}^{n+p-1} \Omega_{\nu+1}^{n+p} f_v + \sum_{v=n}^{n+p-1} \Omega_{\nu+1}^{n+p} B_v z_v.$$

Виконаємо заміну $k = \nu - n$:

$$z_n = \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) f_{k+n} + \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) B_{k+n} z_{k+n}.$$

На просторі $C(M)$ функцій $z = z_n$, заданих та обмежених на $\mathbb{Z}$ і таких, що

$$\|z_n\|_0 = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|z_n\| \leq M,$$

задамо оператор S_1 :

$$S_1 z_n = \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) f_{n+k} + \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) B_{n+k} z_{n+k}.$$

Для S_1 справедливою є оцінка (враховуючи, що $\|f_n\| \leq 1$):

$$\begin{aligned}\|S_1 z\| \leq & \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|f_{k+n}\| + \\ & + \quad \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|B_{k+n}\| \, \|z_{k+n}\| \leq \\ & \leq |p| e^{(\alpha+\beta m+1)(p-k-1)} \cdot 1 + |p| e^{(\alpha+\beta m+1)(p-k-1)} \beta M \leq \\ & \leq |p| e^{(\alpha+\beta m+1)|p|} (1+\beta M).\end{aligned}$$

Оцінимо різницю, як це було показано вище:

$$\begin{aligned}\|S_1 z_1 - S_1 z\| = & \left\| \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|f_{k+n}\| + \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|B_{k+n}\| \, \|z_{k+n}\| \right\| \leq \\ & \leq |p| \beta e^{(\alpha+\beta m+1)|p|} \left\| z_1 - z \right\|_0 ,\end{aligned}$$

де z та z_1 — довільні функції з $C(M)$.

Якщо виконується нерівність

$$|p| \beta e^{(\alpha+\beta m+1)|p|} \leq 1,$$

то при M, що задовольняють нерівність

$$|p| e^{(\alpha+\beta m+1)|p|} (1+\beta M) \leq M \Rightarrow M \geq \frac{|p| e^{(\alpha+\beta m+1)|p|}}{1 - |p| \beta e^{(\alpha+\beta m+1)|p|}},$$

оператор S_1 є стискуючим, оскільки відображає $C(M)$ в себе. Простір $C(M)$ відносно норми є повним нормованим простором. Цього досить, щоб оператор S_1 мав в $C(M)$ єдину нерухому точку. Вона і є єдиним в $C(M)$ розв'язком рівняння

$$z_n = \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) f_{n+k} + \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{n+k+1}^{n+p}(C) B_{n+k} z_{n+k}.$$

5. Доведення теореми 2. Доведемо спочатку наступне твердження.

Лема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 і знайдеться послідовність* $p_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *така, що*

$$A_k = (A_{n+p_k},\ n \in \mathbb{Z}), \quad B_k = (B_{n+p_k},\ n \in \mathbb{Z}), \quad C_k = (C_{n+p_k},\ n \in \mathbb{Z}),$$

$$f_k = (f_{n+p_k},\ n \in \mathbb{Z}), \quad g_k = (g_{n+p_k},\ n \in \mathbb{Z}),$$

$$\lim_{k\to\infty} (\|A_k - A\|_0 + \|B_k - B\|_0 + \|f_k - f\|_0) = 0.$$

Тоді розв'язки C, g *рівнянь (3), (4) задовольняють умову*

$$\lim_{k\to\infty} (\|C_k - C\|_0 + \|g_k - g\|_0) = 0. \tag{12}$$

Для доведення леми достатньо встановити співвідношення вигляду (12) для розв'язків рівнянь

$$Z_n = \Omega_n^{n+p}(A + BZ)$$

та

$$z_n = \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) f_{k+n} + \sum_{k=0}^{p-1} \Omega_{k+n+1}^{n+p}(C) B_{k+n} z_{k+n}.$$

Для ряду

$$\Omega_0^n = E + \sum_{k=0}^{n-1} D_k + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} + \sum_{k=0}^{n-1} D_k \sum_{k_1=0}^{k-1} D_{k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1-1} D_{k_2} + \ldots$$

введемо позначення

$$\Omega_n^l(C) = \Omega_n^l(C_s)$$

та розглянемо різницю

$$\begin{aligned} Z_{n+p_k} - Z_n &= \Omega_{n+p_k}^{n+p+p_k}(A_s + B_s Z_s) - \Omega_n^{n+p}(A_s + B_s Z_s) = \\ &= \Omega_0^p(A_{s+p_k+n} + B_{s+p_k+n} Z_{s+p_k+n}) - \Omega_0^p(A_{s+n} + B_{s+n} Z_{s+n}) = \\ &= \Omega_0^p(A_{s+p_k+n} + B_{s+p_k+n} Z_{s+p_k+n}) + \Omega_0^p(A_{s+n} + B_{s+p_k+n} Z_{s+p_k+n}) - \\ &- \Omega_0^p(A_{s+n} + B_{s+p_k+n} Z_{s+p_k+n}) - \Omega_0^p(A_{s+n} + B_{s+n} Z_{s+p_k+n}) + \\ &+ \Omega_0^p(A_{s+n} + B_{s+n} Z_{s+p_k+n}) - \Omega_0^p(A_{s+n} + B_{s+n} Z_{s+n}). \end{aligned}$$

Але для обмежених на $\mathbb{Z}$ матриць

$$\|P\|_0 \le M, \quad \|Q\|_0 \le M$$

згідно з

$$\left\|SZ_n^1 - SZ_n^2\right\| \le \sum_{N=0}^{\infty} \beta|p+1| \frac{(\alpha+\beta m+1)^{N-1}(p+1)^{N-1}}{(N-1)!} \left\|Z^1 - Z^2\right\|_0 \le$$

$$\le \beta|p+1|e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} \left\|Z^1 - Z^2\right\|_0$$

справджується

$$\|\Omega_0^p P_{n+p} - \Omega_0^p Q_{n+p}\| \le |p+1| \left(1 + M(p+1) + \frac{M^2(p+1)^2}{2!} + \frac{M^3(p+1)^3}{3!} + \ldots\right) \|Z_1 - Z\|_0 =$$

$$= |p+1|e^{M|p+1|} \|Z_1 - Z\|_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отже,

$$\|Z_{n+p_k} - Z_n\|_0 = \|[\Omega_0^p (A_{s+p_k+n} + B_{s+p_k+n} Z_{s+p_k+n} - E) -$$

$$- \Omega_0^p (A_{s+n} + B_{s+p_k+n} Z_{s+p_k+n} - E)] +$$

$$+ [\Omega_0^p (A_{s+n} + B_{s+p_k+n} Z_{s+p_k+n} - E) - \Omega_0^p (A_{s+n} + B_{s+n} Z_{s+p_k+n} - E)] +$$

$$+ [\Omega_0^p (A_{s+n} + B_{s+n} Z_{s+p_k+n} - E) - \Omega_0^p (A_{s+n} + B_{s+n} Z_{s+n} - E)] \| \le$$

$$\le |p+1|e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} \|A_{n+p_k} - A_n\|_0 +$$

$$+ |p+1|e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} m \|B_{n+p_k} - B_n\|_0$$

$$+ \beta|p+1|e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} \|Z_{n+p_k} - Z_n\|_0 \le$$

$$\le |p+1|e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} (\|A_{n+p_k} - A_n\|_0 +$$

$$+ m \|B_{n+p_k} - B_n\|_0 + \beta \|Z_{n+p_k} - Z_n\|_0\big).$$

Оскільки

$$\beta|p+1|e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)} < 1,$$

то

$$\|Z_{n+p_k} - Z_n\|_0 \le \frac{|p+1|e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)}}{1 - |p+1|\beta e^{|p+1|(\alpha+\beta m+1)}} (\|A_{n+p_k} - A_n\|_0 + m\|B_{n+p_k} - B_n\|_0),$$

або

$$\lim_{k\to\infty} \|Z_{n+p_k} - Z_n\|_0 = 0.$$

Ця рівність доводить, що

$$\lim_{k\to\infty} \|C_{n+p_k} - C_n\|_0 = 0.$$

Розглянемо різницю $z_{n+p_k} - z_n$ для розв'язку рівняння

$$z_n = \sum_{s=0}^{p-1} \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) f_{s+n} + \sum_{s=0}^{p-1} \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) B_{s+n} z_{s+n}.$$

З припущень леми 3 випливає

$$\begin{aligned}
\|z_{n+p_k} - z_n\| \le & \sum_{s=0}^{p-1} \left\| \Omega_{s+n+p_k+1}^{n+p_k+p}(C) - \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|f_{s+n+p_k}\| + \\
& + \sum_{s=0}^{p-1} \left\| \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|f_{s+n+p_k} - f_{s+n}\| + \\
& + \sum_{s=0}^{p-1} \left\| \Omega_{s+n+p_k+1}^{n+p_k+p}(C) - \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|B_{s+n+p_k}\| \, \|z_{s+n+p_k}\| + \\
& + \sum_{s=0}^{p-1} \left\| \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) \right\| \|B_{s+n}\| \, \|z_{s+n+p_k} - z_{s+n}\| \le \\
\le & \sum_{s=0}^{p-1} \left\| \Omega_{s+n+p_k+1}^{n+p_k+p}(C) - \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) \right\| + |p| e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|f_{s+n+p_k} - f_{s+n}\|_0 + \\
& + \sum_{s=0}^{p-1} \left\| \Omega_{s+n+p_k+1}^{n+p_k+p}(C) - \Omega_{s+n+1}^{n+p}(C) \right\| \beta M + \\
& + |p| e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} M \|B_{s+n+p_k} - B_{s+n}\| + |p| e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|z_{s+n+p_k} - z_{s+n}\|_0 .
\end{aligned}$$

Виконаємо заміну

$$\begin{gathered}
i \in [s+n+p_k+1; n+p_k+p], \\
j = i - (n+p_k) \Rightarrow i = j + (n+p_k), \\
i = s+n+p_k+1 \Rightarrow j = s+1, \\
i = n+p_k+p \Rightarrow j = p, \\
\Rightarrow j \in [s+1; p].
\end{gathered}$$

Отже, $\Omega_{s+n+p_k+1}^{n+p_k+p}(C_i) = \Omega_{s+1}^{p}(C_{j+n+p_k})$.

Аналогічно $\Omega_{s+n+1}^{n+p}(C_i) = \Omega_{s+1}^{p}(C_{j+n})$.

У подальших міркуваннях скористаємося наступними властивостями:

1) для довільних матриць P, Q

$$\|\Omega_{s+1}^p(P) - \Omega_{s+1}^p(Q)\| \le |p-s| \left(1 + M|p-s| + \frac{1}{2}\left(M|p-s|\right)^2 + \ldots\right) \|P-Q\| =$$

$$= |p-s| e^{M|p-s|} \|P-Q\|;$$

2) $\|\Omega_{s+1}^p(C_j + p_k + n)\| \le e^{|p-s|(\alpha+\beta m+1)}$.

Остаточно для довільного $n \in \mathbb{Z}$ отримаємо

$$\|z_{n+p} - z_n\| \le \left\| \sum_{s=0}^{p-1} \Omega_{s+1}^p(C_{j+p_k+n}) f_{s+p_k+n} - \sum_{s=0}^{p-1} \Omega_{s+1}^p(C_{j+n}) f_{s+n} \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{s=0}^{p-1} \Omega_{s+1}^p(C_{j+p_k+n}) B_{s+p_k+n} z_{s+p_k+n} - \sum_{s=0}^{p-1} \Omega_{s+1}^p(C_{j+n}) B_{s+n} z_{s+n} \right\| \le$$

$$\le |p| e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|f_k - f\|_0 + |p|^2 e^{M|p|} \|C_k - C\|_0 +$$

$$+ |p|\beta e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|z_k - z\|_0 +$$

$$+ |p| M e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|B_k - B\|_0 + |p| e^{M|p|} \|C_k - C\|_0.$$

Тому можемо перейти до супремуму в лівій частині нерівності:

$$\|z_k - z\|_0 \le |p| e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|f_k - f\|_0 + |p|^2 e^{M|p|} \|C_k - C\|_0 +$$

$$+ |p|\beta e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|z_k - z\|_0 + |p| M e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|B_k - B\|_0 +$$

$$+ |p| M e^{M|p|} \|C_k - C\|_0.$$

Звідси

$$\|z_k - z\|_0 \le \Big(|p| e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|f_k - f\|_0 - f\|_0 + |p|^2 e^{M|p|} \|C_k - C\|_0 +$$

$$+ |p| M e^{|p|(\alpha+\beta m+1)} \|B_k - B\|_0 + |p| e^{M|p|} \|C_k - C\|_0\Big).$$

З останньої нерівності з урахуванням того, що

$$\lim_{k\to\infty} \|C_k - C\|_0 = 0$$

та

$$\lim_{k\to\infty} \left(\|A_k - A\|_0 + \|B_k - B\|_0 + \|f_k - f\|_0\right) = 0,$$

отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - z\|_0 = 0.$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_0 = 0,$$

що й доводить лему.

З доведеної леми та означення майже періодичної функції випливає справедливість теореми 2 для майже періодичних функцій A, B, f.

6. Висновок. У даній роботі розроблено алгоритм побудови двосторонніх розв'язків різницевих рівнянь з аргументом, який відхиляється, що зводить дану задачу до задачі побудови таких розв'язків для звичайних різницевих рівнянь, і наведено його обґрунтування.

1. *Самойленко А. М.* Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 5. — С. 631 – 640.
2. *Мартинюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений / Под ред. Ю. А. Митропольского. — Киев: Наук. думка, 1972. — 246 с.
3. *Халанай О., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 310 с.
4. *Теплінський Ю. В., Марчук Н. А.* Про диференційовність у сенсі Фреше інваріантних торів зчисленних систем різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 1. — С. 75 – 91.
5. *Теплинский Ю. В., Семинишина И. В.* О периодических решениях разностных уравнений в бесконечномерных пространствах // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 3. — С. 414 – 429.

Одержано 30.12.2004