УДК 517.946

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА

І. М. Конет, Т. М. Пилипюк

Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

By using the method of integral and hybrid integral transformations, together with the method of main solutions (influence matrices and Green matrices), for the first time, we have constructed the integral representation of a unique exact analytical solution of the hyperbolic boundary-value problem of mathematical physics for a piecewise homogeneous solid cylinder.

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного суцільного циліндра.

1. Вступ. Теорія початково-крайових (мішаних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ природи, механіки, фізики, хімії, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для рівнянь і систем рівнянь гіперболічного типу одержано в працях Ж. Адамара [1], Л. Гордінга [2], Ю. О. Митропольського, Г. П. Хоми, М. І. Громяка [3], А. М. Самойленка, Б. П. Ткача [4], М. М. Смирнова [5], В. А. Чернятина [6] та інших відомих вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових і мішаних задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач у сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [7 – 9].

Виявляється, що для досить широкого класу лінійних крайових і мішаних задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їхніх точних розв'язків є метод гібридних інтегральних перетворень, породжених гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [10 – 13].

У цій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) побудовано єдиний точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного суцільного циліндра.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0;\ r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j),\ R_0 = 0,\ R_{n+1} \equiv R < +\infty, \right.$$

$$\left. \varphi \in [0; 2\pi),\ z \in (-l_1; l_2),\ l_j \geq 0,\ j = 1, 2,\ l_1 + l_2 \equiv l \neq 0 \right\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [14]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j +$$

$$+ \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z), \qquad \frac{\partial u_j}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z), \qquad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_1}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0, \qquad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1}\bigg|_{r=R} = g(t, \varphi, z), \quad s = 0, 1, \tag{3}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_j\bigg|_{z=-l_1} = w_j^1(t, r, \varphi), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_j\bigg|_{z=l_2} = w_j^2(t, r, \varphi), \tag{4}$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}$$

та умовами спряження [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]\bigg|_{r=R_k} = 0, \qquad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де $a_{rj},\ a_{\varphi j},\ a_{zj},\ \chi_j,\ p_j,\ \alpha_{js}^k,\ \beta_{js}^k$ — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0, \quad c_{1k}\, c_{2k} > 0, \quad \alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \quad \beta_{22}^{n+1} \geq 0, \quad \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0,$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\ldots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\},$$

$$g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z),g_2^1(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\},$$

$$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z),g_2^2(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\},$$

$$w^1(t,r,\varphi)=\left\{w_1^1(t,r,\varphi),w_2^1(t,r,\varphi),\ldots,w_{n+1}^1(t,r,\varphi)\right\},$$

$$w^2(t,r,\varphi)=\left\{w_1^2(t,r,\varphi),w_2^2(t,r,\varphi),\ldots,w_{n+1}^2(t,r,\varphi)\right\},\quad g(t,\varphi,z)$$

— задані обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z),\ldots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$$

— шукана функція.

3. Основна частина. Припустимо, що розв’язок задачі спряження (1) – (5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних перетворень [10, 15, 16].

До задачі (1) – (5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур’є на декартовому сегменті $(-l_1;l_2)$ щодо змінної z [10]:

$$\Lambda_s[f(z)]\int\limits_{-l_1}^{l_2} f(z)v_s(z+l_1)dz\equiv f_s, \tag{6}$$

$$\Lambda_s^{-1}[f_s]=\sum_{s=1}^{\infty} f_s\,\frac{v_s(z+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2}\equiv f(z), \tag{7}$$

$$\Lambda_s\left[\frac{d^2f}{dz^2}\right]=-\gamma_s^2 f_s+v_s(0)\left(-\frac{df}{dz}+p_1f\right)\bigg|_{z=-l_1}+v_s(l)\left(\frac{df}{dz}+p_2f\right)\bigg|_{z=l_2}. \tag{8}$$

У формулах (6) – (8) використовується спектральна функція (ядро перетворення)

$$v_s(z+l_1)=\frac{\gamma_s\cos\gamma_s(z+l_1)+p_1\sin\gamma_s(z+l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2+p_1^2}},$$

квадрат норми якої має вигляд

$$\|v_s(z+l_1)\|^2\equiv\int\limits_{-l_1}^{l_2} v_s^2(z+l_1)dz=\frac{l}{2}+\frac{(p_1+p_2)\left(\gamma_s^2+p_1p_2\right)}{2\left(\gamma_s^2+p_1^2\right)\left(\gamma_s^2+p_2^2\right)}.$$

При цьому

$$v_s(0)=\frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2+p_1^2}},\qquad v_s(l)=\frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2+p_2^2}},$$

$\{\gamma_s\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\gamma l)=\frac{\gamma^2-p_1p_2}{\gamma(p_1+p_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s, який діє за формулою (6), внаслідок тотожності (8) ставить у відповідність тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1) – (5) задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t,r,\varphi) | t > 0; r \in I_n^+; \varphi \in [0;2\pi)\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{js}}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u_{js} +$$

$$+ \left(a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2 \right) u_{js} = \Phi_{js}(t,r,\varphi), \qquad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1} \tag{9}$$

з початковими умовами

$$u_{js}|_{t=0} = g_{js}^1(r,\varphi), \quad \left. \frac{\partial u_{js}}{\partial t} \right|_{t=0} = g_{js}^2(r,\varphi), \qquad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{10}$$

крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial^p u_{1s}}{\partial r^p} \right|_{r=0} = 0, \qquad \left. \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1,s} \right|_{r=R} = g_s(t,\varphi), \quad p = 0, 1, \tag{11}$$

та умовами спряження

$$\left. \left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_{ks} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1,s} \right] \right|_{r=R_k} = 0, \qquad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \tag{12}$$

де $\Phi_{js}(t,r,\varphi) = f_{js}(t,r,\varphi) + a_{zj}^2 v_s(0) \omega_j^1(t,r,\varphi) + a_{zj}^2 v_s(l) \omega_j^2(t,r,\varphi)$,

До задачі (9) – (12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на проміжку $[0;2\pi)$ щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m[g(\varphi)] = \int_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi \equiv g_m, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{13}$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{Re}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m \exp(im\varphi) \equiv g(\varphi), \tag{14}$$

$$F_m \left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right] = -m^2 F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \tag{15}$$

де $\mathrm{Re}\,(\cdots)$ — дійсна частина виразу $(\cdots)$ щодо φ, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Інтегральний оператор F_m, який діє за формулою (13), внаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9) – (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,r) \mid t > 0; r \in I_n^+\}$ розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку з оператором Бесселя

$$\frac{\partial^2 u_{jsm}}{\partial t^2} - a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm}^2}{r^2} \right) u_{jsm} + \left(a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2 \right) u_{jsm} =$$

$$= \Phi_{jsm}(t,r), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad \nu_{jm} = \frac{a_{\varphi j} m}{a_{rj}} \tag{16}$$

з початковими умовами

$$u_{jsm}\big|_{t=0} = g^1_{jsm}(r), \qquad \frac{\partial u_{jsm}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g^2_{jsm}(r), \qquad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{17}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^p u_{1sm}}{\partial r^p}\bigg|_{r=0} = 0, \quad \left(\alpha^{n+1}_{22}\frac{\partial}{\partial r} + \beta^{n+1}_{22}\right) u_{n+1,sm}\bigg|_{r=R} = g_{sm}(t), \quad p = 0, 1, \tag{18}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial r} + \beta^k_{j1}\right) u_{ksm} - \left(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial r} + \beta^k_{j2}\right) u_{k+1,sm}\right]\bigg|_{r=R_k} = 0, \qquad j = 1, 2 \quad k = \overline{1, n}. \tag{19}$$

До одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16) – (19) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному проміжку I^+_n з n точками спряження щодо радіальної змінної r [16]:

$$H_{pn}[f(r)] = \int\limits_0^R f(r) V(r, \lambda_p)\sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda_p), \tag{20}$$

$$H^{-1}_{pn}[\tilde{f}(\lambda_p)] = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_p)\,\frac{V(r, \lambda_p)}{\|V(r, \lambda_p)\|^2} \equiv f(r), \tag{21}$$

$$H_{pn}\Big[B_{(m)}[f(r)]\Big] = -\lambda^2_p \tilde{f}(\lambda_p) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha^2_k \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_p)\sigma_k r dr + a^2_{n+1} R \sigma_{n+1}\left(\alpha^{n+1}_{22}\right)^{-1} \times$$

$$\times V_{n+1}(R, \lambda_p)\left(\alpha^{n+1}_{22}\frac{df}{dr} + \beta^{n+1}_{22} f\right)\bigg|_{r=R}, \quad R_0 \equiv 0, \quad R_{n+1} \equiv R. \tag{22}$$

У формулах (20) – (22) застосовуються такі величини і функції:

$$V(r, \lambda_s) = \sum_{k=1}^{n+1} V_k(r, \lambda_s)\Theta(r - R_{k-1})\Theta(R_k - r),$$

$$V_1(r, \lambda_s) = \prod_{j=1}^{n} \Delta^j J_{\nu_{1m}}(b_{1s} r), \quad b_{ks} = a^{-1}_k \left(\lambda^2_s + \gamma^2_k\right)^{1/2} \equiv q_k\left(\lambda^2_s\right),$$

$$V_k(r, \lambda_s) = \prod_{j=k}^{n} \Delta^j \left[w^{(k-1)}_{(\nu_m)_k;2}(\lambda_s) J_{\nu_{km}}(b_{ks} r) - w^{(k-1)}_{(\nu_m)_k;1}(\lambda_s) N_{\nu_{km}}(b_{ks} r)\right], \quad k = \overline{2, n},$$

$$V_{n+1}(r, \lambda_s) = w^{(n)}_{(\nu_m);2}(\lambda_s) J_{\nu_{n+1,m}}(b_{n+1,s} r) - w^{(n)}_{(\nu_m);1}(\lambda_s) N_{\nu_{n+1,m}}(b_{n+1,s} r),$$

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k \Theta(r - R_{k-1})\Theta(R_k - r),$$

$$\|V(r,\lambda_s)\|^2 = \int\limits_0^R V^2(r,\lambda_s)\sigma(r)rdr,$$

$J_\nu(x)$ — циліндрична функція Бесселя 1-го роду ν-го порядку; N_ν — циліндрична функція Бесселя 2-го роду ν-го порядку;

$$a_k \equiv a_{zk}, \qquad q_k \equiv q_k(\lambda^2) = a_k^{-1}(\lambda^2+\gamma_k^2)^{1/2}, \qquad \gamma_k \geq 0, \quad k=\overline{1,n+1},$$

$$(\nu_m) \equiv (\nu_m)_{n+1} = (\nu_{1m}, \nu_{2m}, \ldots, \nu_{n+1,m}),$$

$$\sigma_k = \frac{1}{a_k^2}\,\frac{c_{1k}\cdots c_{1,k+1}\cdots c_{1n}}{c_{2k}\cdot c_{2,k+1}\cdots c_{2n}}, \qquad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}^2},$$

$$J_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha}J_\nu(x), \qquad N_{\nu,\alpha}(x) = x^{-\alpha}N_\nu(x),$$

$$u^{k1}_{\nu_{km;ij}}(q_pR_k) = \left(\frac{\nu_{km}}{R_k}\,\alpha^k_{ij} + \beta^k_{ij}\right)J_{\nu_{km},0}(q_pR_k) - R_k^2q_p^2\alpha^k_{ij}J_{\nu_{km+1},1}(q_pR_k),$$

$$u^{k2}_{\nu_{km;ij}}(q_pR_k) = \left(\frac{\nu_{km}}{R_k}\,\alpha^k_{ij} + \beta^k_{ij}\right)N_{\nu_{km},0}(q_pR_k) - R_k^2q_p^2\alpha^k_{ij}N_{\nu_{km+1},1}(q_pR_k),$$

$$i,j=1,2, \quad k=\overline{1,n}, \quad p=\overline{1,n+1},$$

$$\Psi^k_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});ij}(q_kR_k, q_{k+1}R_k) = u^{ki}_{\nu_{km;11}}(q_kR_k)u^{kj}_{\nu_{k+1,m;22}}(q_{k+1}R_k) -$$

$$- u^{ki}_{\nu_{km;21}}(q_kR_k)u^{kj}_{\nu_{k+1,m;12}}(q_{k+1}R_k), \quad k=\overline{1,n},$$

$$w^{(1)}_{(\nu_m)2;p}(q_1R_1, q_2R_1) \equiv \Psi^1_{(\nu_{1m},\nu_{2m});1p}(q_1R_1,q_2R_1) \equiv w^{(1)}_{(\nu_m)2;p}(\lambda), \quad p=1,2,$$

$$w^{(k)}_{(\nu_m)k+1;j}(\lambda) = w^{(k)}_{(\nu_m)k+1;j}(q_1R_1, q_2R_1, \ldots, q_kR_k, q_{k+1}R_k) =$$

$$= \Psi^k_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});1j}(q_kR_k, q_{k+1}R_k)w^{(k-1)}_{(\nu_m)k;2}(q_1R_1, q_2R_1, \ldots, q_{k-1}R_{k-1}, q_kR_{k-1}) -$$

$$- \Psi^k_{(\nu_{km},\nu_{k+1,m});2j}(q_kR_k, q_{k+1}R_k) \times w^{(k-1)}_{(\nu_m)k;1}(q_1R_1, q_2R_1, \ldots, q_{k-1}R_{k-1}, q_kR_{k-1}),$$

$$k=\overline{2,n}, \quad j=1,2, \quad (k)=123\ldots k, \quad (\nu_m)k = (\nu_{1m}, \nu_{2m}, \ldots, \nu_{km}).$$

та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{rk}^2\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)B_{\nu_{km}},$$

де

$$B_{\nu_{km}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{km}^2}{r^2}$$

— класичний диференціальний оператор Бесселя, $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m}} + q_{1s}^2\right) u_{1sm} \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m}} + q_{2s}^2\right) u_{2sm} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r,n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m}} + q_{n+1,s}^2\right) u_{n+1,sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1sm}(t,r) \\ \Phi_{2sm}(t,r) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_{n+1,sm}(t,r) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\left.\begin{bmatrix} u_{1sm}(t,r) \\ u_{2sm}(t,r) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1,sm}(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1sm}^1(r) \\ g_{2sm}^1(r) \\ \dots\dots\dots \\ g_{n+1,sm}^1(r) \end{bmatrix}, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_{1sm}(t,r) \\ u_{2sm}(t,r) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1,sm}(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1sm}^2(r) \\ g_{2sm}^2(r) \\ \dots\dots\dots \\ g_{n+1,sm}^2(r) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_{js}^2 = a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2,\ j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор H_{sn}, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn}[\cdots] = \Bigg[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda_p)\sigma_1 r dr \ \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda_p)\sigma_2 r dr$$

$$\int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda_p)\sigma_n r dr \ \int_{R_n}^{R} \cdots V_{n+1}(r,\lambda_p)\sigma_{n+1} r dr \Bigg] \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). Внаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_p^2 + \alpha_j^2 + q_{sj}^2\right) \tilde{\tilde{u}}_{jsm}(t,\lambda_p)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\Phi}_{jsm}(t,\lambda_p) + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R,\lambda_p) g_{sm}(t), \tag{26}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jsm}(t,\lambda_p)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jsm}^1(\lambda_p), \qquad \left.\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jsm}(t,\lambda_p)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jsm}^2(\lambda_p), \tag{27}$$

де

$$\tilde{u}_{jsm}(t,\lambda_p) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} u_{jsm}(t,r) V_j(r,\lambda_p)\sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{\Phi}_{jsm}(t,\lambda_p) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{\Phi}_{jsm}(t,r) V_j(r,\lambda_p)\sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}^k_{jsm}(\lambda_p) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}^k_{jsm}(r) V_j(r,\lambda_p)\sigma_j r dr, \qquad j = \overline{1, n+1}, \quad k = 1, 2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі (1) – (5), що

$$\max\left\{q^2_{1s}, q^2_{2s}(\sigma), \ldots, q^2_{n+1,s}\right\} = q^2_{1s}$$

і покладемо всюди $\alpha^2_j = q^2_{1s} - q^2_{js},\ j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p)}{dt^2} + \delta^2_s(\lambda_p)\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p) = \tilde{T}_{sm}(t,\lambda_p), \tag{28}$$

$$\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p)\big|_{t=0} = \tilde{g}^1_{sm}(\lambda_p), \qquad \left.\frac{d\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p)}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{g}^2_{sm}(\lambda_p), \tag{29}$$

де

$$\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jsm}(t,\lambda_p),$$

$$\tilde{T}_{sm}(t,\lambda_p) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\Phi}_{jsm}(t,\lambda_p) + a^2_{n+1} R \sigma_{n+1} (\alpha^{n+1}_{22})^{-1} V_{n+1}(R,\lambda_p) g_{sm}(t),$$

$$\tilde{g}^k_{sm}(\lambda_p) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}^k_{jsm}(\lambda_p), \quad p = 1, 2, \quad \delta^2_s(\lambda_p) = \lambda^2_p + a^2_{z1}\gamma^2_s + \chi^2_1.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі (28), (29) є функція

$$\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p) = G_s(t,\lambda_p)\tilde{g}^2_{sm}(\lambda_p) + \frac{d}{dt}\, G_s(t,\lambda_p)\tilde{g}^1_{sm}(\lambda_p) + \int\limits_0^t G_s(t-\tau,\lambda_p)\tilde{T}_{sm}(\tau,\lambda_p)\, d\tau, \tag{30}$$

де функція Коші (розв'язуюча функція) має вигляд $G_s(t,\lambda_p) = \dfrac{\sin(\delta_s(\lambda_p)t)}{\delta_s(\lambda_p)}$.

Оскільки суперпозиція операторів H_{sn} та H^{-1}_{sn} є одиничним оператором

$$\left(H_{sn} \circ H^{-1}_{sn} = H^{-1}_{sn} \circ H_{sn} = I\right),$$

то оператор H^{-1}_{sn}, як обернений до оператора (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{pn}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{\infty} \cdots \dfrac{V_1(r,\lambda_p)}{\|V(r,\lambda_p)\|^2} \\ \sum_{p=1}^{\infty} \cdots \dfrac{V_2(r,\lambda_p)}{\|V(r,\lambda_p)\|^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{p=1}^{\infty} \cdots \dfrac{V_{n+1}(r,\lambda_p)}{\|V(r,\lambda_p)\|^2} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $[\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p)]$, де функція $\tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p)$ визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16) – (19):

$$u_{jsm}(t,r) = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{u}_{sm}(t,\lambda_p)\, \frac{V_j(r,\lambda_p)}{\|V(r,\lambda_p)\|^2}, \quad j = \overline{1,n+1}. \tag{32}$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jsm}(t,r)$, визначених формулами (32), обернені оператори Λ_s^{-1} та F_m^{-1} і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_j(t,r,\varphi,z) = {} & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi) g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \int_0^{2\pi} \Big[W_{jk}^1(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z) w_k^1(\tau,\rho,\alpha) + \\ & + W_{jk}^2(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z) w_k^2(\tau,\rho,\alpha)\Big] \sigma_k\rho d\alpha d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-l_1}^{l_2} W_{jr}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi) g(\tau,\alpha,\xi)\, d\xi\, d\alpha d\tau, \quad j = \overline{1,n+1}, \end{aligned} \tag{33}$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1) – (5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$$\begin{aligned} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi) = {} & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_m G_s(t,\lambda_p)\, \frac{V_j(r,\lambda_p)V_k(\rho,\lambda_p)}{\|V(r,\lambda_p)\|^2} \times \\ & \times \frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{||v_s(z+l_1)||^2} \cos(m\varphi), \quad j,k = \overline{1,n+1}, \end{aligned}$$

матриці впливу (функції впливу) $E(t,\tau,\rho,\varphi,z,\xi) = [E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)]_{j,k=1}^{n+1}$, компоненти $W_{jk}^1(t,r,\rho,\varphi,z) = E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,-l_1)$ нижньої тангенціальної матриці Гріна (нижні тангенціальні функції Гріна) $W^1(t,r,\rho,\varphi,z) = \left[W_{jk}^1(t,r,\rho,\varphi,z)\right]_{j,k=1}^{n+1}$, компоненти

$$W_{jk}^2(t,r,\rho,\varphi,z) = E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,l_2)$$

верхньої тангенціальної матриці Гріна (верхні тангенціальні функції Гріна) $W^2(t,r,\rho,\varphi,z) = \left[W_{jk}^2(t,r,\rho,\varphi,z)\right]_{j,k=1}^{n+1}$ та компоненти

$$W_{jr}(t,r,\varphi,z,\xi) = a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}E_{j,n+1}(t,r,R,\varphi,z,\xi)$$

радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) $W_r(t,r,\varphi,z,\xi) = [W_{jr}(t,r,\varphi,z,\xi)]_{j=1}^{n+1}$ розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}^p(t, r,\rho,\varphi,z)$, $p=1,2$, $W_{jr}(t,r,\varphi,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені за формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розв'язку (33) випливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1) – (5).

Методами з [17, 18] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1) – (5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Якщо функції* $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^p(r,\varphi,z)$, $w_j^p(t,r,\varphi)$, $p=1,2$, *задовольняють умови:*

1) *двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;*

2) *мають обмежену варіацію за геометричними змінними;*

3) *для них справджуються умови спряження, а функція* $g(t,\varphi,z)$ *задовольняє умови 1, 2, то гіперболічна початково-крайова задача спряження (1) – (5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (33).*

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (33) визначають структуру розв'язку гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1) – (5) в ізотропному кусково-однорідному суцільному циліндрі.

Зауваження 2. Параметри α_{22}^{n+1}, β_{22}^{n+1} дозволяють виділяти з формул (33) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r=R$ крайової умови 1-го роду $\left(\alpha_{22}^{n+1}=0, \beta_{22}^{n+1}=1\right)$, 2-го роду $\left(\alpha_{22}^{n+1}=1, \beta_{22}^{n+1}=0\right)$ та 3-го роду $\left(\alpha_{22}^{n+1}=1, \beta_{22}^{n+1}\equiv h>0\right)$.

Зауваження 3. Параметри p_j, $j=1,2$, дозволяють виділяти з формул (33) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z=-l_1$, $z=l_2$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їхніх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 2–1, 2–2).

Зауваження 4. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань, рівнянням Даламбера) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 5. Якщо $\alpha_{11}^k=0$, $\beta_{11}^k=1$, $\alpha_{12}^k=0$, $\beta_{12}^k=1$, $\alpha_{21}^k=E_1^k$, $\beta_{21}^k=0$, $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k=0$, де E_1^k, E_2^k — модулі Юнга, $k=1,2$, то умови спряження (5) збігаються з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 розглянуто гіперболічну крайову задачу математичної фізики (1) – (5) є математичною моделлю вимушених коливних процесів у кусково-однорідному суцільному циліндрі.

4. Висновки. За допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного суцільного циліндра. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі та може бути використаний як у подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Література

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 122 с.
3. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.
4. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
5. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1969. – 292 с.
6. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1991. – 112 с.
7. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
8. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
9. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 2001. – 606 с.
10. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
11. *Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П.* Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. – 200 с.
12. *Конет І. М.* Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. – 120 с.
13. *Конет І. М., Пилипюк Т. М.* Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2016. – 244 с.
14. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006. – 424 с.
15. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 204 с.
16. *Быблив О. Я., Ленюк М. П.* Интегральные преобразования Ханкеля 1-го рода для кусочно-однородных сегментов с применением к задачам математической физики. – К.: Вычисл. и прикл. математика, 1988. – Вып. 65. – С. 24 – 34.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
18. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

Одержано 20.10.2017