УДК 517.956.3

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГРАНИЧНОЇ МАТРИЦІ

М. Б. Віра

Ніжин. держ. ун-т ім. М. Гоголя
вул. Графська, 2, Ніжин, 16600, Україна
e-mail: Vyramaryna@gmail.com

We consider the problem of existense a solution for a boundary-value problem for the singular perturbed linear systems of differential equations in case of multiple spectrum of the boundary matrix.

Розглядається питання про існування розв'язку крайової задачі для сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра граничної матриці.

Розглянемо крайову задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon) \tag{1}$$

із двоточковою крайовою умовою

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

де $t \in [0;T]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — відповідно шуканий та задані n-вимірні вектори; M, N, $A(t,\varepsilon)$ — квадратні матриці n-го порядку.

Нехай виконуються такі умови:

1°) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), \tag{3}$$

$$f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \tag{4}$$

2°) коефіцієнти розвинень $A_k(t)$, $f_k(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;

3°) головна матриця $A_0(t)$ при всіх $t \in [0;T]$ має єдине власне значення $\lambda_0(t)$ кратності n, якому відповідає один n-кратний елементарний дільник $(\lambda - \lambda(t))^n$;

4°) вектор $d(\varepsilon)$ зображається у вигляді асимптотичного розвинення

$$d(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k$$

при $\varepsilon \to 0$.

Відомо, що основи теорії асимптотичного інтегрування системи (1) були отримані на початку XX століття в працях Д. Біркгофа [1], Я. Д. Тамаркіна [2]. Вони вивели асимптотичні формули для визначення n лінійно незалежних розв'язків системи (1) у випадку простих коренів характеристичного рівняння

$$\det(A_0(t) - \lambda E) = 0. \tag{5}$$

Спроби узагальнення отриманих результатів на випадок кратних коренів характеристичного рівняння (5) тривалий час були невдалими. І лише в 60-х роках XX століття у працях М. Шкіля [3, 4] було встановлено, що в разі кратних коренів характеристичного рівняння (5) асимптотичні розв'язки системи (1) можна будувати у вигляді розвинень за дробовими степенями параметра, які залежать від поведінки збурювальних матриць $A_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Крайові задачі типу (1), (2) досліджувались у роботах [5 – 7]. При цьому в [5, 6] для побудови асимптотики їхніх розв'язків було використано метод регуляризації, а в [7] — метод примежових функцій. До цього часу автором було розглянуто поставлену задачу [8 – 10], як правило, за умови простого спектра головного оператора. У даній роботі узагальнимо результати статті [8] на більш складний випадок кратного спектра граничної в'язки матриць.

Згідно з умовою 3° та теорією асимптотичного інтегрування [11] випливає, що власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки n, який складається з власного вектора $\varphi(t)$ та приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{2, n}$, що задовольняють співвідношення

$$\begin{gathered} (A_0(t) - \lambda_0(t)E)\varphi(t) = 0, \\ (A_0(t) - \lambda_0(t)E)\varphi_i(t) = \varphi_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \end{gathered} \tag{6}$$

а рівняння

$$(A_0(t) - \lambda_0(t)E)x = \varphi_n(t), \tag{7}$$

нерозв'язне при всіх $t \in [0; T]$. Спершу знайдемо власний вектор $\varphi(t)$. Тоді приєднані вектори виразимо формулами

$$\varphi_i(t) = (H(t))^{i-1}\varphi(t), \quad i = \overline{2, n},$$

де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t) - \lambda_0(t)E$. З умови розв'язності рівнянь (6) випливає тотожна рівність

$$\left(H^{i-1}\varphi, \psi\right) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

де $\psi(t)$ — власний вектор матриці $A_0^*(t)$, спряженої з $A_0(t)$. А з нерозв'язності рівняння (7) випливає

$$\left(H^{n-1}\varphi, \psi\right) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T].$$

Оскільки вектор $\psi(t)$ визначається з точністю до скалярного множника, знайдемо його так, щоб

$$\left(H^{n-1}\varphi, \psi\right) = 1.$$

Тоді, взявши до уваги структуру напівоберненої матриці $H(t)$, дістанемо рівність

$$\left(H^{i-1}\varphi, \psi\right) = \delta_{i,n}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

У роботі [11, с. 123] показано, що однорідна система рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x \tag{8}$$

має n лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(i)}(\tau, \varepsilon)) d\tau\right), \tag{9}$$

де $u_i(t, \varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції, $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ — скалярні функції, що зображаються розвиненнями за дробовими степенями малого параметра. При цьому функція $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ повинна задовольняти рівняння розгалуження

$$\left(\lambda^{(i)}\right)^n + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks} \left[(\lambda^{(i)})^k\right] = 0, \tag{10}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{0s} = (\widetilde{L}_{0s}\varphi, \psi), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s(H\Gamma),$$

а

$$L_{ks}\left[\left(\lambda^{(i)}\right)^k\right] = \left(\widetilde{L}_{ks}\left[(\lambda^{(i)})^k\right]\varphi, \psi\right),$$

де

$$\widetilde{L}_{ks} = \sum_{j=0}^{s} \sum_{r=0}^{s-j} (-1)^r D^j \left[\left(\lambda^{(i)}\right)^k\right] P_{j+k,r}^{s-j}(H, H\Gamma),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots.$$

Символом $P^m_{s,k}(H, H\Gamma)$ позначено суму всіляких "добутків" s матричних множників H і k операторних множників $H\Gamma_{j_1}, H\Gamma_{j_2}, \ldots, H\Gamma_{j_k}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює m, де перший множник H в усіх цих множників "вилучається", а

$$\Gamma_k(t) = A_k(t) - \delta_{k,1}\frac{d}{dt}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$P^s_j(H\Gamma)$ утворюється аналогічно як сума всіх можливих "добутків" операторних множників $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2}, \ldots, H\Gamma_{k_j}$, сума індексів яких дорівнює s, від усіх доданків яких "вилучається" перший множник H. (Причому вважатимемо, що $P^s_0(H\Gamma) = 0$ при $s > 0$, $P^0_0(H\Gamma) = E$ і аналогічно $P^s_{0,0}(H, H\Gamma) = 0$ при $s > 0$, $P^0_{0,0}(H, H\Gamma) = E$.)

Символом $D^j\left[\lambda^k\right]$ позначається диференціальний вираз, що являє собою суму всіляких "добутків" k функцій $\lambda(t)$ та оператора диференціювання $D = \dfrac{d}{dt}$, причому останнім множником у всіх доданках цього виразу має бути λ. Наприклад,

$$D^2\left[\lambda^2\right] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = \left(\lambda^2\right)'' +$$

$$+ \left(\lambda\lambda'\right)' + \lambda\lambda'' = 3\left(\lambda\lambda'\right)' + \lambda\lambda'' = 3\left(\lambda'\right)^2 + 4\lambda\lambda''.$$

У роботі [8] показано, що коли функція $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння розгалуження (10), тоді відповідний вектор $u_i(t,\varepsilon)$ зображається у вигляді формального розвинення

$$u_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\lambda^{(i)}\right)^k H^k\varphi + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{ks}\left[\left(\lambda^{(i)}\right)^k\right]\varphi. \tag{11}$$

У [8] також здійснено побудову асимптотики розв'язку крайової задачі за умови, що

$$L_{01}(t) = -(\Gamma_1\varphi, \psi) = -(A_1\varphi, \psi) + \left(\varphi', \psi\right) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T].$$

У даній статті узагальнимо запропоновану в [8] техніку на випадок, коли остання умова не виконується, причому

$$L_{01}(t) = -(\Gamma_1\varphi, \psi) \equiv 0, \tag{12}$$

$$L_{02}(t) = -(\Gamma_2\varphi, \psi) + (\Gamma_1 H\Gamma_1\varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T], \tag{13}$$

$$L_{11}(t) = ((H\Gamma_1 + \Gamma_1 H)\varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T]. \tag{14}$$

У цьому випадку відповідна діаграма Ньютона складається з двох ланок — відрізків, що з'єднують точки $(0; 2)$ і $(1; 1)$ та $(1; 1)$ і $(n; 0)$ (рис. 1).

Оскільки нахил першої ланки дорівнює 1, а другої — $\dfrac{1}{p}$, де $p = n - 1$, то p розв'язків рівняння розгалуження можна побудувати за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ у вигляді розвинення

$$\lambda^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{15}$$

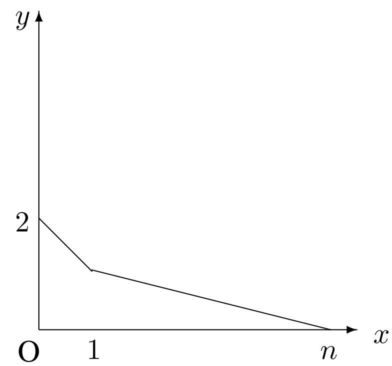

Рис. 1

а один — за цілими степенями ε:

$$\lambda_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(n)}(t). \tag{16}$$

При цьому перші коефіцієнти цих розвинень знаходяться з відповідних визначальних рівнянь

$$\lambda_1^{(j)}(t)L_{11} + \left(\lambda_1^{(j)}(t)\right)^n = 0, \quad j = \overline{1,p}, \tag{17}$$

$$L_{02}(t) + \lambda_1^{(n)}(t)L_{11}(t) = 0. \tag{18}$$

Завдяки умовам (12) – (14) з цих рівнянь знайдемо n різних функцій $\lambda_1^{(j)}(t)$:

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{|L_{11}|}\left(\cos\frac{\arg(-L_{11}) + 2\pi(j-1)}{p} + i\sin\frac{\arg(-L_{11}) + 2\pi(j-1)}{p}\right), \quad j = \overline{1,p}, \tag{19}$$

$$\lambda_1^{(n)}(t) = -\frac{L_{02}}{L_{11}}. \tag{20}$$

Для знаходження наступних коефіцієнтів відповідних розвинень підставимо ряд (15) у рівняння розгалуження (10). Отримаємо тотожність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^k P_n^k\big(\lambda^{(i)}\big) + \sum_{k=p}^{\infty} \mu^k L_{0,\frac{k}{p}} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \mu^k \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{p}\right]} \sum_{j=1}^{k-sp} L_{js}\left[P_j^{k-sp}\big(\lambda^{(i)}\big)\right] = 0. \tag{21}$$

Прирівнявши в цій тотожності вирази при однакових степенях μ, з урахуванням (12) прийдемо до нескінченної системи рівнянь, перше з яких збігається з (17), а наступні мають вигляд

$$P_n^k\big(\lambda^{(i)}\big) + L_{0,\frac{k}{p}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{p}\right]} \sum_{j=1}^{k-sp} L_{js}\left[P_j^{k-sp}\big(\lambda^{(i)}\big)\right] = 0, \quad k = p+2, p+3, \ldots .$$

Поклавши в них $k+p$ замість k і взявши до уваги, що $n=p+1$, дістанемо

$$P_{p+1}^{p+k}\big(\lambda^{(i)}\big)+L_{0,\frac{p+k}{p}}+\sum_{s=1}^{\left[\frac{p+k-1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{p+k-sp}L_{js}\left[P_j^{p+k-sp}\big(\lambda^{(i)}\big)\right]=0.$$

Виокремлюючи доданки, які містять $\lambda_k^{(i)}$, маємо

$$(p+1)\left(\lambda_1^{(i)}\right)^p\lambda_k^{(i)}+\lambda_k^{(i)}L_{11}+\widetilde{P}_{p+1}^{p+k}\big(\lambda^{(i)}\big)+L_{0,\frac{p+k}{p}}+$$

$$+\sum_{s=2}^{\left[\frac{p+k-1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{p+k-sp}L_{js}\left[P_j^{p+k-sp}\big(\lambda^{(i)}\big)\right]+\sum_{j=2}^{k}L_{j1}\left[P_j^{k}\big(\lambda^{(i)}\big)\right]=0.$$

Враховуючи, що згідно з (17) $\left(\lambda_1^{(i)}\right)^p=-L_{11}$, звідси одержуємо

$$\lambda_k^{(i)}(t)=\frac{1}{pL_{11}}\left[\widetilde{P}_{p+1}^{p+k}\big(\lambda^{(i)}\big)+L_{0,\frac{p+k}{p}}+\sum_{j=2}^{k}L_{j1}\left[P_j^{k}\big(\lambda^{(i)}\big)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=2}^{\left[\frac{p+k-1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{p+k-sp}L_{js}\left[P_j^{p+k-ps}\big(\lambda^{(i)}\big)\right]\right],\quad k=2,3,\ldots. \tag{22}$$

Аналогічно, підставивши в рівняння (10) розвинення (16), дістанемо рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\varepsilon^kP_n^k\big(\lambda^{(n)}\big)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kL_{0k}+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}L_{js}\left[P_j^{k-s}\big(\lambda^{(n)}\big)\right]=0.$$

Прирівнявши в ній вирази при однакових степенях ε і взявши до уваги (14), прийдемо до нескінченної системи рівнянь, перше з яких (при $k=2$) збігається з визначальним рівнянням (18), а наступні мають вигляд

$$P_n^k\big(\lambda^{(n)}\big)+L_{0k}+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}L_{js}\left[P_j^{k-s}\big(\lambda^{(n)}\big)\right]=0,\quad k=3,4,\ldots. \tag{23}$$

Поклавши в них $k+1$ замість k і виділивши доданки, які містять $\lambda_k^{(n)}$, отримаємо

$$\lambda_k^{(n)}(t)=-\frac{1}{L_{11}}\left[P_n^{k+1}\big(\lambda^{(n)}\big)+L_{0,k+1}+\sum_{j=2}^{k}L_{j1}\left[P_j^{k}\big(\lambda^{(n)}\big)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=2}^{k}\sum_{j=1}^{k+1-s}L_{js}\left[P_j^{k+1-s}\big(\lambda^{(n)}\big)\right]\right],\quad k=2,3,\ldots. \tag{24}$$

Підставивши розвинення (15) у вираз (11) і перегрупувавши доданки, як і в попередньому випадку, одержимо відповідні розвинення для векторів $u_i(t,\varepsilon)$:

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{p-1} \mu^k \sum_{j=1}^{k} P_j^k\big(\lambda^{(i)}\big) H^j \varphi + \sum_{k=p}^{\infty} \mu^k \left[\sum_{j=1}^{p} P_j^k\big(\lambda^{(i)}\big)\right] H^j \varphi +$$

$$+ H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{p}}\varphi + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]} \sum_{j=1}^{k-sp} H\widetilde{L}_{js} \left[P_j^{k-sp}\big(\lambda^{(i)}\big)\right] \varphi, \quad i = \overline{1,p}.$$

Так само, підставивши в (11) розвинення (16), дістанемо відповідне розвинення для вектора $u_n(t,\varepsilon)$:

$$u_n(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[\sum_{j=1}^{\min(k,n-1)} P_j^k\big(\lambda^{(n)}\big) H^j \varphi + H\widetilde{L}_{0k}\varphi + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-s} H\widetilde{L}_{js} \left[P_j^{k-s}\big(\lambda^{(n)}\big)\right] \varphi \right]. \tag{25}$$

Для побудови загального розв'язку неоднорідної системи (1) необхідно також знайти її частинний розв'язок. Припустивши для спрощення викладок, що

5°) $\det A_0(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [t_0; T]$,

цей розв'язок легко побудуємо у вигляді розвинення

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t). \tag{26}$$

Підставивши його в систему (1) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, дістанемо такі рекурентні формули для визначення коефіцієнтів $v_k(t)$:

$$v_k(t) = -A_0^{-1}\left[f_k - \sum_{s=1}^{k} A_s v_{k-s} - v'_{k-h}\right], \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{27}$$

Перейдемо тепер до побудови асимптотики розв'язку крайової задачі (1), (2). Для цього припустимо, що виконується умова

6°) $\operatorname{Re}\lambda_0(t) < 0 \;\; \forall t \in [0; T]$.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді суми лінійної комбінації побудованих вище розв'язків однорідної і частинного розв'язку (26) неоднорідної систем:

$$x(t,\varepsilon) = \frac{1}{\mu^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} u_i(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_{t_0}^{t} \big(\lambda_0(\tau) + \lambda^{(i)}(\tau,\varepsilon)\big)\, d\tau\right) c_i(\varepsilon) + v(t,\varepsilon), \tag{28}$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$, функції $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, зображаються формальними розвиненнями вигляду (15) за степенями μ, а $\lambda^{(n)}(t,\varepsilon)$ — за степенями ε, $c_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, — скалярні множники, які підлягають визначенню.

Зауважимо, що наявність множника $\mu^{-(n-1)}$ обумовлена тим, що вектори $u_i(t,\varepsilon)$ будуть лінійно незалежними, якщо в їхніх відповідних розвиненнях береться не менше ніж n членів.

Підставивши вектор (28) у крайову умову (2) і знехтувавши експоненціально малими доданками, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} M u_i(0,\varepsilon) c_i(\varepsilon) = \mu^{n-1}(d(\varepsilon) - Mv(0,\varepsilon) - Nv(T,\varepsilon)). \tag{29}$$

Припустимо, що матриця M невироджена, тобто виконується умова

$7^\circ)$ $\det M \neq 0.$

Тоді, помноживши рівняння (29) зліва на обернену до M матрицю, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(0,\varepsilon) c_i(\varepsilon) = \mu^{n-1}\big(M^{-1} d(\varepsilon) - v(0,\varepsilon) - M^{-1} N v(T,\varepsilon)\big).$$

Далі, підставивши вирази (11) для визначення векторів $u_i(t,\varepsilon)$ в останнє рівняння, запишемо його у векторно-матричному вигляді

$$U(0,\varepsilon) c(\varepsilon) = n(\varepsilon), \tag{30}$$

де

$$U(0,\varepsilon) = \left(P(0)\Lambda(0,\varepsilon) + H \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \left[\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{L}_{ks} \left[\left(\lambda^{(1)}\right)^k \right] \varphi, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{L}_{ks} \left[\left(\lambda^{(n)}\right)^k \right] \varphi \right] \right), \tag{31}$$

$$P(t) = \big[\varphi, H\varphi, \ldots, H^{n-1}\varphi\big],$$

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda^{(1)}(t,\varepsilon) & \ldots & \lambda^{(n)}(t,\varepsilon) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \big(\lambda^{(1)}(t,\varepsilon)\big)^{n-1} & \ldots & \big(\lambda^{(n)}(t,\varepsilon)\big)^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$c(\varepsilon) = \operatorname{col}(c_1(\varepsilon), \ldots, c_n(\varepsilon)),$$

$$n(\varepsilon) = \mu^{n-1}\left(M^{-1} d(\varepsilon) - v(0,\varepsilon) - M^{-1} N v(T,\varepsilon)\right).$$

Подамо матрицю $U(0,\varepsilon)$ у вигляді ряду за степенями параметра μ. Врахувавши, що

$$\Big(\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)\Big)^k = \sum_{j=k}^{\infty} \mu^k P_k^j\big(\lambda^{(i)}\big),$$

матрицю $\Lambda(t,\varepsilon)$ подамо у вигляді

$$\Lambda(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^k P_1^k\big(\lambda^{(1)}\big) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^k P_1^k\big(\lambda^{(n-1)}\big) & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^{k(n-1)} P_1^k\big(\lambda^{(n)}\big) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \sum\limits_{k=n-1}^{\infty}\mu^k P_{n-1}^k\big(\lambda^{(1)}\big) & \dots & \sum\limits_{k=n-1}^{\infty}\mu^k P_{n-1}^k\big(\lambda^{(n-1)}\big) & \sum\limits_{k=n-1}^{\infty}\mu^{k(n-1)} P_{n-1}^k\big(\lambda^{(n)}\big) \end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{diag}\left\{1,\mu,\dots,\mu^{n-1}\right\}\left(\Lambda_0(t)+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t)+\dots\right),$$

де

$$\Lambda_0(t)=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-1} & \dots & \big(\lambda_1^{(n-1)}\big)^{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_s(t)=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_1^{s+1}\big(\lambda^{(1)}\big) & \dots & P_1^{s+1}\big(\lambda^{(n-1)}\big) & P_1^{\frac{s+1}{n-1}}\big(\lambda^{(n)}\big) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-1}^{s+n-1}\big(\lambda^{(1)}\big) & \dots & P_{n-1}^{s+n-1}\big(\lambda^{(n-1)}\big) & P_{n-1}^{\frac{s+n-1}{n-1}}\big(\lambda^{(n)}\big) \end{pmatrix},\quad s=1,2,\dots$$

(елементи останнього стовпця цих матриць відмінні від нуля тільки в тому разі, коли в них верхні символи є цілими числами, більшими за нижні).

Аналогічно, підставивши розвинення функцій $\lambda_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n},$ у другий матричний вираз виразу (31) маємо

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}\left[\big(\lambda^{(1)}\big)^k\right]\varphi,\dots,\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}\left[\big(\lambda^{(n)}\big)^k\right]\varphi\right]=$$

$$=\left(\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{n-1}\right]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}H\widetilde{L}_{js}\left[P_j^{k-s(n-1)}\big(\lambda^{(1)}\big)\right]\varphi,\dots\right.$$

$$\dots,\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{n-1}\right]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}H\widetilde{L}_{js}\left[P_j^{k-s(n-1)}\big(\lambda^{(n-1)}\big)\right]\varphi,$$

$$\left.\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{(n-1)k}\left[H\widetilde{L}_{0k}+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}H\widetilde{L}_{js}\left[P_j^{k-s}\big(\lambda^{(n)}\big)\right]\varphi\right]\right).$$

Позначивши

$$r_k^{(i)} = P^{-1} H \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{n-1}\right]} \sum_{j=0}^{k-s(n-1)} \widetilde{L}_{js} \left[P_j^{k-s(n-1)}\big(\lambda^{(i)}\big) \right] \varphi, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = n-1, n, \ldots, \tag{32}$$

$$r_k^{(n)} = P^{-1} H \left[\widetilde{L}_{0k} \varphi + \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-s} \widetilde{L}_{js} \left[P_j^{k-s}\big(\lambda^{(n)}\big) \right] \varphi \right], \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

цей вираз подамо у вигляді

$$P \left[\sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k r_k^{(1)}, \ldots, \sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k r_k^{(n-1)}, \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{(n-1)k} r_k^{(n)} \right].$$

Врахувавши останнє перетворення, помножимо тепер рівняння (30) зліва на матриці $P^{-1}(0)$ та $\operatorname{diag}\{1, \mu^{-1}, \ldots, \mu^{-(n-1)}\}$ і зведемо його до вигляду

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\Lambda_k(0) + R_k(0)) \right) c(\varepsilon) = \widetilde{n}(\varepsilon), \tag{34}$$

де

$$\widetilde{n}(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{1, \mu^{-1}, \ldots, \mu^{-(n-1)}\right\} P^{-1}(0) n(\varepsilon).$$

Позначивши через $\left(r_k^i\right)_j$ j-й елемент вектора r_k^i, матриці R_i набувають вигляду

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \left(r_{n-1}^{(1)}\right)_n & \ldots & \left(r_{n-1}^{(n-1)}\right)_n & \left(r_1^{(n)}\right)_n \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \left(r_{n-1}^{(1)}\right)_{n-1} & \ldots & \left(r_{n-1}^{(n-1)}\right)_{n-1} & \left(r_1^{(n)}\right)_{n-1} \\ \left(r_n^{(1)}\right)_n & \ldots & \left(r_n^{(n-1)}\right)_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \left(r_{n-1}^{(1)}\right)_2 & \ldots & \left(r_{n-1}^{(n-1)}\right)_2 & \left(r_1^{(n)}\right)_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(r_{2n-3}^{(1)}\right)_n & \ldots & \left(r_{2n-3}^{(n-1)}\right)_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_k = \begin{pmatrix} \left(r_k^{(1)}\right)_1 & \dots & \left(r_k^{(n-1)}\right)_1 & \left(r^{(n)}_{\frac{k}{n-1}}\right)_1 \\ \left(r_{k+1}^{(1)}\right)_2 & \dots & \left(r_{k+1}^{(n-1)}\right)_2 & \left(r^{(n)}_{\frac{k+1}{n-1}}\right)_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(r_{k+n-1}^{(1)}\right)_n & \dots & \left(r_{k+n-1}^{(n-1)}\right)_n & \left(r^{(n)}_{\frac{k+n-1}{n-1}}\right)_n \end{pmatrix}, \quad k = n-1, n, \dots,$$

а вектор $\widetilde{n}(\varepsilon)$ зображається у вигляді розвинення

$$\widetilde{n}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \widetilde{n}_k,$$

коефіцієнти якого визначаються таким чином:

$$\widetilde{n}_k = \operatorname{col}\left(\left(a_{\frac{k-(n-1)}{n-1}}\right)_1, \left(a_{\frac{k-(n-2)}{n-1}}\right)_2, \dots, \left(a_{\frac{k}{n-1}}\right)_n \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$a_s = P^{-1}\big(M^{-1} d_k - v_k(0) - M^{-1} N v_k(T)\big),$$

$(a_s)_j$ — j-й елемент вектора a_s.

Отже, рівняння (34) можна записати у вигляді

$$\left(U_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k U_k(0) \right) c(\varepsilon) = \widetilde{n}(\varepsilon), \tag{35}$$

де $U_k(t) = \Lambda_k(t) + R_k(t),\ k = 0, 1, \dots$.

З'ясуємо, що являє собою матриця $U_0(t)$. Оскільки згідно з (32), (33)

$$r_{n-1}^{(i)}(t) = P^{-1} H \widetilde{L}_{01} \varphi, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad r_1^{(n)} = P^{-1} H \widetilde{L}_{01} \varphi,$$

всі елементи останнього рядка матриці $R_0(0)$ рівні між собою. Позначивши їх символом b і взявши до уваги, що згідно з побудованою теорією $\left(\lambda_1^{(i)}(t)\right)^{n-1} = -L_{11}(t)$, одержимо

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\lambda_1^{(1)}\right)^{n-2} & \dots & \left(\lambda_1^{(n-1)}\right)^{n-2} & 0 \\ b - L_{11} & \dots & b - L_{11} & b \end{pmatrix}.$$

Розклавши визначник цієї матриці за елементами останнього стовпця, знайдемо

$$\det U_0(t) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\lambda_1^{(1)}\right)^{n-2} & \dots & \left(\lambda_1^{(n-1)}\right)^{n-2} \end{vmatrix} L_{11}.$$

Звідси випливає, що $\det U_0(t) \neq 0 \ \forall t \in [t_0; T]$ завдяки умові (14).

Отже, матриця $U_0(0)$ має обернену і вектор-стовпець сталих $c(\varepsilon)$ можна однозначно визначити. А тому існує єдиний формальний розв'язок поставленої крайової задачі. Методами робіт [8, 11] можна показати, що побудований формальний розв'язок має асимптотичний характер.

Підсумком проведених міркувань є така теорема.

Теорема. *Якщо матриця $A_0(t)$ на відрізку $[0; T]$ має кратний скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^n$ і виконуються умови 1°–7°, (12)–(14), то при досить малих ε існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), що виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + O\left(\mu^{m+2-n)}\right),$$

де вектор $x_m(t,\varepsilon)$ зображається у вигляді розвинення

$$x_m(t,\varepsilon) = \mu^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} \mu^k \left(\sum_{j=0}^{k} c_j^{(i)} u_{k-j}^{(i)}(t) \right) \times$$
$$\times \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{m} \mu^k \lambda_k^{(i)}(\tau) \right) d\tau \right) +$$
$$+ \mu^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{n-1}\right]} \mu^{k(n-1)} \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{n-1}\right]} c_j^{(n)} u_{k-j(n-1)}^{(n)}(t) \right) \times$$
$$\times \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{n-1}\right]} \mu^{k(n-1)} \lambda_k^{(n)}(\tau) \right) d\tau \right) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{n-1}\right]} \mu^{k(n-1)} v_k(t),$$

а вектор-функції $u_k^{(i)}(t),\ i = \overline{1,n},\ v_k(t)$, скалярні функції $\lambda_k^{(i)}(t),\ i = \overline{1,n}$, скалярні множники $c_k^{(i)},\ i = \overline{1,n}$, визначаються за описаним вище алгоритмом.

Література

1. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – № 9. – P. 219–231.

2. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917. – 308 с.
3. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища шк., 1971. – 226 с.
4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с.
5. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
6. *Коняев Ю. А.* Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 11. – С. 1999 – 2003.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
8. *Віра М. Б.* Про побудову асимптотики розв’язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра головного оператора // Буковин. мат. журн. – 2017. – **5**, № 3 – 4. – С. 32 – 38.
9. *Яковець В. П., Віра М. Б.* Про побудову асимптотичних розв’язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 2. – С. 272 – 286.
10. *Vira M. B.* On the construction of asymptotics of the solution of multipoint boundary-value problem for a linear degenerate singularly perturbed system of differential equations // J. Math. Sci. – 2016. – **217**, № 4. – P. 385 – 398.
11. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.

Одержано 03.02.18,
після доопрацювання — 17.09.18