УДК 517.929

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина

We establish new properties of solutions to differential-functional equation with a linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння з лінійно перетвореним аргументом.

В настоящей статье исследуется уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt) + f(t), \tag{1}$$

где $a \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, $\{b, c\} \subset \mathrm{C}$, $0 < q < 1$, которое при $c = 0$ изучалось в [1]. В дальнейшем числа M_i — неотрицательные постоянные.

Нам понадобится следующая лемма [1].

Лемма. *Пусть:*

1) $\mu < 0, \gamma > 0$ *и* l *— такое комплексное число, что* $|l| = e^{\gamma\mu}$;

2) $W(s)$ *— решение разностного уравнения*

$$W(s) - lW(s+\mu) = G(s),$$

где $G(s)$ *— такая непрерывная функция, что*

$$|G(s)| \leq M_1 e^{-\beta s}, \quad s \geq s_0,$$

для некоторых положительных величин β, s_0 *и* $|W(s)| \leq M_2$ *для* $s \in [s_0 + \mu, s_0]$.

Тогда:

i) $|W(s)| \leq M_3 e^{-\gamma s}$, $s \geq s_0$, *если* $\gamma < \beta$;

ii) $|W(s)| \leq M_3 s e^{-\gamma s}$, $s \geq s_0$, *если* $\gamma = \beta$;

iii) $|W(s)| \leq M_3 e^{-\beta s}$, $s \geq s_0$, *если* $\gamma > \beta$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть:*

1) $a < 0$ *и* $bc \neq 0$;

2) для параметра $j \in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$ *выполняется неравенство*

$$v_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\ln\left(\frac{|b|}{a}\right)}{\ln q^{-1}} \geq v_{\min} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\ln\left(\left|cq^j\right| q^{-1} + \frac{\left|bq^j + acq^j q^{-1}\right|}{a}\right)}{\ln q^{-1}};$$

3) функция $f(t)$ принадлежит $C^{j+1}[1,+\infty)$ и $f^{(m)}(t) = O\left(t^{\alpha-m}\right),\ t \to +\infty,\ \alpha \in \mathrm{R}$, $m = \overline{0, j+1}$.

Тогда для каждого $j+2$ раза непрерывно дифференцируемого решения $x(t)$ уравнения (1) выполняются оценки:

i) если $\alpha < v_0$, то $x(t) = O\left(t^{v_0}\right),\ t \to +\infty$;

ii) если $\alpha = v_0$, то $x(t) = O\left(t^{v_0}\ln t\right),\ t \to +\infty$;

iii) если $\alpha > v_0$, то $x(t) = O\left(t^{\alpha}\right),\ t \to +\infty$.

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1) j раз

$$x^{(j+1)}(t) = ax^{(j)}(t) + bq^j x^{(j)}(qt) + cq^j x^{(j+1)}(qt) + f^{(j)}(t).$$

Выполним замену переменных $x^{(j)}(t) = t^v y(t)$, где $v \overset{\mathrm{df}}{=} \max\left\{v_{\min} + \varepsilon, \alpha - j\right\},\ \varepsilon > 0$ — произвольное число:

$$y'(t) = \left(a - \frac{v}{t}\right) y(t) + \left(bq^j q^v + \frac{vcq^j q^{v-1}}{t}\right) y(qt) + cq^j q^v y'(qt) + t^{-v} f^{(j)}(t),$$

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}\left\{y(t_0) - cq^j q^{v-1} y(qt_0)\right\} + cq^j q^{v-1} y(qt) +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} \left\{\left(bq^j q^v + acq^j q^{v-1}\right) y(qs) - \frac{v}{s}\, y(s) + \frac{vcq^j q^{v-1}}{s}\, y(qs)\right\} ds +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} s^{-v} f^{(j)}(s)\, ds, \quad t_0 \ge 1.$$

Учитывая неравенство $v \ge \alpha - j$ и условия 1, 3, оцениваем $|y(t)|$ при $t_0 \le t \le T$:

$$|y(t)| \le e^{a(t-t_0)} \left|y(t_0) - cq^j q^{v-1} y(qt_0)\right| + |c| q^j q^{v-1} |y(qt)| +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} \left\{\left|bq^j q^v + acq^j q^{v-1}\right| |y(qs)| + \frac{|v|}{s}\, |y(s)| + \frac{|vc| q^j q^{v-1}}{s}\, |y(qs)|\right\} ds +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} \left|s^{-v} f^{(j)}(s)\right| ds \le e^{a(t-t_0)} \left|y(t_0) - cq^j q^{v-1} y(qt_0)\right| +$$
$$+ |c| q^j q^{v-1} \sup_{qt_0 \le u \le T} |y(u)| + \int\limits_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} \left\{ \left|bq^j q^v + acq^j q^{v-1}\right| \sup_{qt_0 \le u \le T} |y(u)| + \right.$$
$$\left. + \frac{|v|}{t_0} \sup_{qt_0 \le s \le T} |y(s)| + \frac{|vc| q^j q^{v-1}}{t_0} \sup_{qt_0 \le u \le T} |y(u)| \right\} ds + \frac{M_6}{|a|} \le$$

$$\leq \left|y(t_0) - cq^j q^{v-1} y(qt_0)\right| + \left(|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| + \frac{|v|}{|a|t_0} + \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0}\right) \times$$

$$\times \sup_{qt_0 \leq u \leq T} |y(u)| + \frac{M_6}{|a|} \leq \left|y(t_0) - cq^j q^{v-1} y(qt_0)\right| +$$

$$+ \left(|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| + \frac{|v|}{|a|t_0} + \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0}\right) \sup_{qt_0 \leq u \leq t_0} |y(u)| +$$

$$+ \left(|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| + \frac{|v|}{|a|t_0} + \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0}\right) \sup_{t_0 \leq u \leq T} |y(u)| + \frac{M_6}{|a|}.$$

Отсюда получаем

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |y(t)| \leq \left|y(t_0) - cq^j q^{v-1} y(qt_0)\right| +$$

$$+ \left(|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| + \frac{|v|}{|a|t_0} + \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0}\right) \sup_{qt_0 \leq u \leq t_0} |y(u)| +$$

$$+ \left(|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| + \frac{|v|}{|a|t_0} + \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0}\right) \sup_{t_0 \leq u \leq T} |y(u)| + \frac{M_6}{|a|}.$$

Поскольку $v > v_{\min}$, то выполняется неравенство

$$|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| = q^v \left(|c|q^j q^{-1} + \left|\frac{bq^j}{a} + cq^j q^{-1}\right|\right) < 1,$$

и для достаточно большого t_0 получаем

$$|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| + \frac{|v|}{|a|t_0} + \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0} < 1.$$

Отсюда

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |y(t)| \leq \left\{1 - |c|q^j q^{v-1} - \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| - \frac{|v|}{|a|t_0} - \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0}\right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \left|y(t_0) - cq^j q^{v-1} y(qt_0)\right| + \left(|c|q^j q^{v-1} + \left|\frac{bq^j}{a}\, q^v + cq^j q^{v-1}\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{|v|}{|a|t_0} + \frac{|vc|q^j q^{v-1}}{|a|t_0}\right) \sup_{qt_0 \leq u \leq t_0} |y(u)| + \frac{M_6}{|a|}\right\},$$

и так как T произвольно, то $y(t) = O(1)$, $t \to +\infty$ и $x^{(j)}(t) = t^v y(t) = O\left(t^v\right)$, $t \to +\infty$.

Выполняя в уравнении

$$x^{(j)}(t) = ax^{(j-1)}(t) + bq^{j-1}x^{(j-1)}(qt) + cq^{j-1}x^{(j)}(qt) + f^{(j-1)}(t),$$

$$x^{(j-1)}(t) = -\frac{b}{a}\,q^{j-1}x^{(j-1)}(qt) - \frac{c}{a}\,q^{j-1}x^{(j)}(qt) + \frac{1}{a}\,x^{(j)}(t) - \frac{1}{a}\,f^{(j-1)}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} -\frac{b}{a}\,q^{j-1}x^{(j-1)}(qt) + g(t),$$

замену $x^{(j-1)}(t) = t^{v_*}y(t)$, где $v_* \geq \max\{v, \alpha - (j-1)\}$ и $v_* > \dfrac{\ln\left(\frac{|bq^{j-1}|}{a}\right)}{\ln q^{-1}} = v_0 - (j-1)$, получаем $y(t) = -\dfrac{b}{a}\,q^{j-1}q^{v_*}y(qt) + t^{-v_*}g(t)$. Определим вспомогательные коэффициент $c_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\dfrac{b}{a}\,q^{j-1}q^{v_*}$ и неоднородность $g_1(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} t^{-v_*}g(t)$ и оценим их согласно выбору v_*:

$$|g_1(t)| = O\left(t^{\max\{v,\alpha-(j-1)\}-v_*}\right) \leq M_7, \quad t \to \infty,$$

$$|c_1| = \exp\left\{\left(\frac{\ln\left|\frac{bq^{j-1}}{a}\right|}{\ln q^{-1}} - v_*\right)\ln q^{-1}\right\} < 1.$$

Тогда

$$y(t) = c_1 y(qt) + g_1(t)$$

и для $q^{-1} \leq t \leq T$ имеем

$$|y(t)| \leq |c_1|\,|y(qt)| + M_7 \leq |c_1| \sup_{q^{-1}\leq t\leq T} |y(qt)| + M_7 \leq$$

$$\leq |c_1| \sup_{1\leq t\leq q^{-1}} |y(t)| + |c_1| \sup_{q^{-1}\leq t\leq T} |y(t)| + M_7.$$

Отсюда

$$\sup_{q^{-1}\leq t\leq T} |y(t)| \leq |c_1| \sup_{1\leq t\leq q^{-1}} |y(t)| + |c_1| \sup_{q^{-1}\leq t\leq T} |y(t)| + M_7,$$

$$\sup_{q^{-n-1}\leq t\leq T} |y(t)| \leq (1-|c_1|)^{-1}\left(|c_1| \sup_{q^{-n}\leq t\leq q^{-n-1}} |y(t)| + M_7\right).$$

T — произвольное число, поэтому $x^{(j-1)}(t) = t^{v_*}y(t) = O\left(t^{v_*}\right),\ t \to \infty$, где

$$v_* = \max\left\{v_0 - (j-1) + \varepsilon, \max\left\{v_{\min} + \varepsilon, \alpha - j\right\}, \alpha - (j-1)\right\} =$$

$$= \max\left\{v_0 - (j-1) + \varepsilon, v_{\min} + \varepsilon, \alpha - (j-1)\right\}.$$

Повторяя этот процесс, убеждаемся, что

$$x^{(j-2)}(t) = O\left(t^{\max\{v_0-(j-2)+\varepsilon;\max\{v_0-(j-1)+\varepsilon,v_{\min}+\varepsilon,\alpha-(j-1)\},\alpha-(j-2)\}}\right) =$$

$$= O\left(t^{\max\{v_0-(j-2)+\varepsilon,v_{\min}+\varepsilon,\alpha-(j-2)\}}\right), \quad t \to \infty.$$

Действуя так несколько раз, получаем (по условию теоремы $v_0 \geq v_{\min}$)

$$x(t) = O\left(t^{\max\{v_0+\varepsilon,v_{\min}+\varepsilon,\alpha\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0+\varepsilon,\alpha\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0,\alpha\}+\varepsilon}\right), \quad t \to \infty.$$

Аналогично, для производной справедлива оценка

$$x'(t) = O\left(t^{\max\{v_0-1+\varepsilon,\alpha-1\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0+\varepsilon,\alpha\}-1}\right) = O\left(t^{\max\{v_0,\alpha\}+\varepsilon-1}\right), \quad t \to \infty.$$

Определим для краткости $h \overset{\text{df}}{=} \max\{v_0,\alpha\} + \varepsilon$, $\mu = \ln q$ и выполним в уравнении (1) замену переменных $t = e^s$, $W(s) = t^{-h}x(t)$. Тогда $x(t) = e^{hs}W(s)$ и

$$W(s) - \left(\frac{bq^h}{-a}\right)W(s+\mu) = a^{-1}\left(hW(s) + W'(s) - c\left\{he^{h\mu}W(s+\mu) + e^{h\mu}W'(s+\mu)\right\}e^{-\mu}\right) \times$$

$$\times e^{-s} - a^{-1}e^{-hs}f\left(e^s\right).$$

Поскольку $W(s) = t^{-h}x(t) = e^{-hs}x\left(e^s\right) = O(1)$, $s \to +\infty$, то $W'(s) = -he^{-hs}x\left(e^s\right) + +e^{-hs}x'\left(e^s\right)e^s = O(1)$, $s \to +\infty$. Пусть $l \overset{\text{df}}{=} \dfrac{bq^h}{-a}$ и

$$G(s) \overset{\text{df}}{=} a^{-1}\left(hW(s) + W'(s) - c\left\{he^{h\mu}W(s+\mu) + e^{h\mu}W'(s+\mu)\right\}e^{-\mu}\right)e^{-s} -$$

$$- a^{-1}e^{-hs}f\left(e^s\right),$$

тогда

$$W(s) - lW(s+\mu) = G(s),$$

где

$$|l| = \left|\frac{bq^h}{-a}\right| = \left|\frac{bq^h}{bq^{v_0}}\right| = q^{h-v_0} = e^{(h-v_0)\mu}, \quad |G(s)| \leq M_8e^{-s} + M_9e^{(\alpha-h)s}, \quad s \geq s_0 > 0.$$

Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 1 дословно повторяют доказательство из [1].

Случай i): $\alpha < v_0$. Если $v_0 < \alpha + 1$, выберем h так, что $v_0 < h < \alpha + 1$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8 + M_9)e^{(\alpha-h)s}$, $s \geq s_0$. Определим $\gamma \overset{\text{df}}{=} h - v_0$, $\beta \overset{\text{df}}{=} h - \alpha$. Тогда $\gamma < \beta$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{10}e^{(v_0-h)s}$, $s \geq s_0$, т. е. $x(t) = e^{hs}W(s) = O\left(t^{v_0}\right)$, $t \to +\infty$.

Если $v_0 \geq \alpha+1$, выберем $h = v_0 + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8+M_9)e^{-s}$, $s \geq s_0$. Определим $\gamma \stackrel{\mathrm{df}}{=} h - v_0$, $\beta \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1$. Тогда $\gamma < \beta$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{11}e^{(v_0-h)s}$, $s \geq s_0$, т. е. $x(t) = O\left(t^{v_0}\right), t \to +\infty$.

Случай ii): $\alpha = v_0$. Выберем $h = v_0 + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8+M_9)e^{(\alpha-h)s}$, $s \geq s_0$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{12}se^{(v_0-h)s}$, $s \geq s_0$, т. е. $x(t) = O\left(t^{v_0}\ln t\right), t \to +\infty$.

Случай iii): $\alpha > v_0$. Выберем $h = \alpha + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8+M_9)e^{(\alpha-h)s}$, $s \geq s_0$ и $\gamma \stackrel{\mathrm{df}}{=} h - v_0 > \beta \stackrel{\mathrm{df}}{=} h-\alpha$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{13}e^{(\alpha-h)s}$, $s \geq s_0$, т. е. $x(t) = O\left(t^{\alpha}\right)$, $t \to +\infty$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если* $a > 0$ *и* $f(t) = O\left(t^{\alpha}\right), t \to +\infty, \alpha \in \mathrm{R}$, *то для каждого непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения (1) существует предел* $\lim_{t\to\infty} e^{-at}x(t) \in \mathrm{C}$.

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-at}x(t)\right\} = be^{-at}x(qt) + ce^{-at}x'(qt) + e^{-at}f(t)$$

и проинтегрируем его:

$$e^{-at}x(t) = e^{-aq^{-n}}x\left(q^{-n}\right) + cq^{-1}\left\{e^{-a(1-q)t}e^{-aqt}x(qt) - e^{-aq^{-n}(1-q)}e^{-aq^{-(n-1)}}x\left(q^{-(n-1)}\right)\right\} +$$

$$+\left(b+acq^{-1}\right)\int\limits_{q^{-n}}^{t} e^{-a(1-q)s}e^{-aqs}x(qs)\,ds + \int\limits_{q^{-n}}^{t} e^{-as}f(s)\,ds.$$

Определим

$$\sup_{t\in[q^{-n+1},q^{-n}]}\left|e^{-at}x(t)\right| \stackrel{\mathrm{df}}{=} J_n$$

и пусть $q^{-n} \leq t \leq q^{-n-1}$. Выберем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $aqt > \alpha\ln t$. Тогда

$$\left|e^{-at}x(t)\right| \leq \left|e^{-aq^{-n}}x\left(q^{-n}\right)\right| + \left|\frac{c}{q}\right|\left\{e^{-a(1-q)t}\left|e^{-aqt}x(qt)\right| + \right.$$

$$\left. + e^{-aq^{-n}(1-q)}\left|e^{-aq^{-(n-1)}}x\left(q^{-(n-1)}\right)\right|\right\} +$$

$$+\left|b+acq^{-1}\right|\int\limits_{q^{-n}}^{t} e^{-a(1-q)s}\left|e^{-aqs}x(qs)\right|ds + M_{14}\int\limits_{q^{-n}}^{t} e^{-as}s^{\alpha}\,ds \leq$$

$$\leq J_n + 2\left|\frac{c}{q}\right|e^{-a(1-q)q^{-n}}J_n + \left|b+acq^{-1}\right|J_n\frac{e^{-a(1-q)q^{-n}}}{a(1-q)} + M_{14}\frac{e^{-a(1-q)q^{-n}}}{a(1-q)} \leq$$

$$\leq \max\left\{J_n, M_{14}\right\}\left\{1 + \left(2\left|\frac{c}{q}\right| + \frac{\left|b+acq^{-1}\right|+1}{a(1-q)}\right)e^{-a(1-q)q^{-n}}\right\},$$

откуда получаем неравенство

$$\max\{J_{n+1}, M_{14}\} \le \max\{J_n, M_{14}\}\left\{1 + \left(2\left|\frac{c}{q}\right| + \frac{\left|b + acq^{-1}\right| + 1}{a(1-q)}\right)e^{-a(1-q)q^{-n}}\right\}$$

и оценку $x(t) = O\left(e^{at}\right), t \to \infty$.

Тогда из тождества

$$e^{-at_2}x(t_2) - e^{-at_1}x(t_1) = cq^{-1}\left\{e^{-a(1-q)t_2}e^{-aqt_2}x(qt_2) - e^{-a(1-q)t_1}e^{-aqt_1}x(qt_1)\right\} +$$

$$+ \left(b + acq^{-1}\right)\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-a(1-q)s}e^{-aqs}x(qs)\,ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-as}f(s)ds$$

для некоторой постоянной M такой, что $\left|e^{-at}x(t)\right| \le M$, $|f(t)| \le Mt^{\alpha} \le Me^{aqt}$, $t \ge$ $\ge q^{-n+1}$, следует неравенство

$$\left|e^{-at_2}x(t_2) - e^{-at_1}x(t_1)\right| \le \left(|c|q^{-1}\left\{e^{-a(1-q)t_2} + e^{-a(1-q)t_1}\right\} +\right.$$

$$\left. + \left\{\left|b + acq^{-1}\right| + 1\right\}\frac{e^{-a(1-q)t_1} - e^{-a(1-q)t_2}}{a(1-q)}\right)M.$$

Из принципа Коши следует, что существует предел $\lim_{t\to\infty} e^{-at}x(t) \in$ C.

Теорема 2 доказана.

Если известно частное решение уравнения (1), то разность искомого и частного решений будет решением однородного уравнения, свойства которого изучались в [2, 3].

Литература

1. *Eng-Bin Lim.* Asymptotic bounds of solutions of the functional differential equation // SIAM J. Math. Anal. — 1978. — **9**, № 5. — P. 915–920.
2. *Бельский Д. В., Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 466–493.
3. *Бельский Д. В., Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2017. — **20**, № 3. — С. 291–302.

Получено 05.08.16,
после доработки — 26.09.17