УДК 517.9

МАТРИЧНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ*

С. М. Чуйко, М. В. Дзюба

Донбас. гос. пед. ун-т
ул. Генерала Батюка, 19, Славянск Донецкой обл., 84116, Украина
e-mail: chujko-slav@inbox.ru
chujko-slav@ukr.net

We find necessary and sufficient conditions for existence of solutions of a linear matrix boundary-value problem for a system of matrix differential-algebraic equations with impulsive effect. We also construct a generalized Green's operator of linear boundary conditions for a system of matrix differential-algebraic equations with impulsive effect. To solve the matrix differential-algebraic boundary problem with impulsive effect, we use original solvability conditions and the structure of the general solution of the linear matrix equation.

Знайдено необхідні та достатні умови існування, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для побудови розв'язків лінійної матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсною дією. Для розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсною дією використано оригінальні умови розв'язності, а також конструкцію загального розв'язку лінійного матричного рівняння.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений [1, 2]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\otimes\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad i = 1,2,\ldots,p,$$

матричного дифференциально-алгебраического уравнения [3, 4]

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

подчиненных краевому условию [5 – 7]

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathcal{A}Z'(t)\colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\otimes\mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

— матричный дифференциально-алгебраический оператор, который по определению для любых скалярных функций

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

и любых постоянных матриц $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ обеспечивает равенство

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогично матричный оператор

$$\mathcal{B}Z(t)\colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$$

далее будем называть алгебраическим, если для любых скалярных функций

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$$

и любых постоянных матриц $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ имеет место равенство

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Здесь также $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$ — непрерывная при $t \neq \tau_i$ матрица и $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p} \mathcal{L}_i Z(\cdot)\colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 1,2,\ldots,p,$$

где

$$\mathcal{L}_i Z(\cdot)\colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 0,\ldots,p-1,$$

$$\tau_0 := a, \quad \mathcal{L}_p Z(\cdot)\colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

— линейные ограниченные матричные функционалы. Вообще говоря, предполагаем, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — произвольные натуральные числа. Матричное дифференциально-алгебраическое уравнение (1) обобщает традиционные постановки задач как для матричных дифференциальных уравнений [8 – 10], так и для дифференциально-алгебраических уравнений [4, 11 – 15]. С другой стороны, матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (1), (2) обобщает традиционные постановки нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1], а также дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1, 5 – 7].

Определим оператор $\mathcal{M}[A]\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$ как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [17 – 19]

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим через $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta$, естественный базис [20] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом задача о нахождении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1) приводит к задаче о нахождении вектора $z(t)$, компоненты которого $z_j(t)$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}, \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Линейный дифференциально-алгебраический матричный оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ по определению представим в виде

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\Xi^{(j)}(t) z_j'(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{A}Z'(t)\right] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := [\Omega_j(t)]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\},$$

где

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{B}Z(t)\right] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := [\Theta_j(t)]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\},$$

где

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, задача о построении решений обобщенного дифференциально-алгебраического матричного уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}\left\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\right\}$$

традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [4, 5, 11 – 14]

$$\Omega(t)\cdot z'(t) = \Theta(t)\cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \tag{3}$$

При условии [3, 5, 14, 15, 23]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0 \tag{4}$$

в случае

$$\Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}, \quad \Omega^+(t)\mathcal{F}(t), P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} \tag{5}$$

система (3) разрешима относительно производной

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t,\varphi(t)), \quad \mathfrak{F}(t,\varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$

Здесь $P_{\Omega^*}(t)$ — $(\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta)$-матрица-ортопроектор: $P_{\Omega^*}(t)\colon \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}\left(\Omega^*(t)\right)$, $P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)$-матрица, составленная из ϱ линейно независимых столбцов $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матрицы-ортопроектора $P_\Omega(t)\colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t))$.

2. Случай разрешимости системы (3) относительно производной. Обозначим через $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу [1]

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_{\alpha\beta}, \quad t \in [a;\tau_1[,$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии (4), (5) система (3) имеет решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t),$$

$$K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\,ds,$$

которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1)

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t), \quad W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\left[X_0(t)c\right], \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t) := \mathcal{M}^{-1}\left\{K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t)\right\}, \quad t \in [a;\tau_1[,$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1).

Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости задачи Коши для системы (1).

Лемма. *При условиях (4) и (5) матричная задача Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для дифференциально-алгебраической системы (1) однозначно разрешима для любого начального значения $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. При условиях (4) и (5) общее решение (6) задачи Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для дифференциально-алгебраической системы (1) при $t \in [a;\tau_1[$ определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1) и общее решение $W(t,c)$ задачи Коши $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однородной части дифференциально-алгебраического уравнения (1).*

Предположим условия (4) и (5) выполненными. В этом случае фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи

$$z' = \Omega^+(t)\Theta(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}Z(\cdot) = 0$$

ищем в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)U_0, & U_0 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)U_1, & U_1 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ X_0(t)U_p, & U_p \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot t\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [\tau_p;b], \end{cases} \quad U := \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \ldots \\ U_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)\times\alpha\cdot\beta}. \tag{7}$$

Подставляя матрицу (7) в краевое условие (2), получаем уравнение

$$QU = 0, \quad \ell_i z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}_i Z(\cdot), \quad Q := \begin{bmatrix} \ell_0 X_0(\cdot) & \ell_1 X_0(\cdot) & \ldots & \ell_p X_0(\cdot) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Обозначим через $P_Q\colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)} \to \mathbb{N}(Q)$ матрицу-ортопроектор. При условии $P_Q = 0$ однородная часть задачи (1), (2) имеет только нулевое решение; если же $P_Q \neq 0$, то однородная часть задачи (1), (2) имеет решение вида $z(t,c) = X(t)c$, где

$$U = P_Q C, \quad C \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)\times\alpha\cdot\beta}.$$

Пусть

$$P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \\ \dots \\ P_Q^{(p)} \end{bmatrix}, \quad C = \tilde{I} \cdot C^{(0)}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{\alpha\cdot\beta} \\ I_{\alpha\cdot\beta} \\ \dots \\ I_{\alpha\cdot\beta} \end{bmatrix},$$

где $P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \dots, P_Q^{(p)}$ — $(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta(p+1))$-мерные блоки ортопроектора P_Q, $C^{(0)}$ — произвольная постоянная $(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta)$-матрица, $\tilde{I}$ — постоянная $(\alpha \cdot \beta(p+1) \times \alpha \cdot \beta)$-матрица. В новых обозначениях общее решение уравнения (8) определяют матрицы

$$U_0 = P_Q^{(0)} \tilde{I} C^{(0)}, \quad U_1 = P_Q^{(1)} \tilde{I} C^{(0)}, \dots, \quad U_p = P_Q^{(p)} \tilde{I} C^{(0)}, \quad U = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \tilde{I} C^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \tilde{I} C^{(0)} \\ \dots\dots \\ P_Q^{(p)} \tilde{I} C^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при условиях (4), (5) и $P_Q \neq 0$ однородная часть задачи (1), (2) имеет решение

$$Z(t,c) = W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\left[X(t)c\right], \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

представимое фундаментальной матрицей $X(t)$.

3. Обобщенный оператор Грина. При условиях (4), (5) решение неоднородной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) с импульсным воздействием ищем, используя решение неоднородной краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t,\varphi(t)), \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\,\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{M}\,\mathfrak{A}$$

в виде

$$G\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\,\mathfrak{A}\right](t) := \begin{cases} X_0(t)\xi_0 + K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t), & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)\xi_1 + K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_0(t)\xi_p + K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](t), & t \in [\tau_p;b]. \end{cases}$$

Здесь $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p$ — постоянные, для нахождения которых используем уравнение

$$Q\xi = \mathcal{M}\left\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](\cdot)\right\}, \quad \xi := \mathrm{col}\,(\xi_0, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)},$$

разрешимое тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*}\mathcal{M}\left\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](\cdot)\right\} = 0, \tag{9}$$

где P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(Q^*)$. Следуя традиционной классификации краевых задач [1], случай $P_{Q^*} \neq 0$ назовем критическим. В этом случае условия существования и вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующая теорема.

Теорема. *При условиях (4) и (5) однородная часть дифференциально-алгебраической задачи с импульсным воздействием (1), (2) имеет решение*

$$Z(t,c) = W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\left[X(t)c\right], \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

представимое фундаментальной матрицей

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [a,\tau_1], \\ X_0(t)P_Q^{(1)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [\tau_1,\tau_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_0(t)P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [\tau_p, b]. \end{cases}$$

При условиях (4) и (5) линейная неднородная дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (9). В этом случае задача (1), (2) имеет решение

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathfrak{G}\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\,\mathfrak{A}\right](t), \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

представимое обобщенным оператором Грина

$$\mathfrak{G}\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\,\mathfrak{A}\right](t) := \mathcal{M}^{-1}\left\{G\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\,\mathfrak{A}\right](t)\right\},$$

где

$$\mathrm{col}\,(\xi_0,\dots,\xi_p) := Q^{+}\mathcal{M}\left\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\right](\cdot)\right\}.$$

Утверждение теоремы существенно упрощается в некритическом ($P_{Q^*} = 0$) случае, при этом линейная неоднородная дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием (1), (2) разрешима для любых неоднородностей.

Пример. Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача с импульсным воздействием

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \in [-1;1], \quad t \neq \tau_1, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\hat{S}_i(t)\,\check{S}_j(t)\,Z'(t)\,\hat{R}_i(t)\,\check{R}_j(t),$$

$$\hat{S}_1 := \hat{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \check{R}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{R}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$\mathcal{B}Z(t) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \hat{\Phi}_i(t)\, \check{\Phi}_j(t)\, Z(t)\, \hat{\Psi}_i(t)\, \check{\Psi}_j(t),$$

где

$$\hat{\Phi}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\Phi}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{\Phi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_1 := \hat{\Psi}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{\Psi}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\Psi}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Импульсное воздействие определяют равенства

$$\mathcal{L}Z(\cdot)\colon \sqrt{e}\, Z(-1) - Z(0) = 0, \quad Z(-1) - Z(1) = 0, \quad \mathfrak{A} := 0.$$

Пусть

$$\Xi_1^* := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_2^* := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \Xi_6^* := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Поскольку

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то условия (4) и (5) выполнены,

$$\Omega^+(t)\Theta(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{6\times 6}[-1;1],$$

при этом матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (10) представляет критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$). Здесь

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу неравенства $P_Q \neq 0$ однородная часть дифференциально-алгебраической краевой задачи (10) имеет нетривиальные решения

$$W(t, c_1) = c_1 \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1; 0[,$$

$$W(t, c_1) = c_1 \begin{pmatrix} 1 + e^{t/2} & 1 + e^{t/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Заметим, что $\varrho = 1 \neq 0$, при этом решение дифференциально-алгебраической задачи (10) зависит от произвольной функции $\varphi(t) \in \mathbb{C}[-1; 1]$. Положим $\varphi(t) := 0$. Обобщенный оператор Грина задачи Коши $Z(-1) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (10) имеет вид

$$\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t) = \frac{t+1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1; \tau_1[,$$

и позволяет проверить выполнение условия (9). Поскольку требование (9) выполнено, неоднородная дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием (10) разрешима. При этом дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием (10) имеет решение

$$Z(t, c_1) = W(t, c_1) + \mathfrak{G}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathcal{M}\,\mathfrak{A}\right](t), \quad c_1 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

представимое обобщенным оператором Грина

$$\mathfrak{G}\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathcal{M}\,\mathfrak{A}\right](t) = \frac{t-(t+1)\sqrt{e}}{2\,(1-\sqrt{e})}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1;0[,$$

$$\mathfrak{G}\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathcal{M}\,\mathfrak{A}\right](t) = \frac{t-2-(t-1)\sqrt{e}}{2\,(1-\sqrt{e})}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1].$$

Найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи с импульсным воздействием (1), (2) обобщают традиционные результаты как для матричных дифференциальных уравнений [8, 9, 10, 22], так и для дифференциально-алгебраических уравнений [4, 11 – 15, 23]. С другой стороны, найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина краевой задачи матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) обобщают условия разрешимости и конструкцию обобщенного оператора Грина для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1], а также дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1, 5 – 7].

Заметим, что аналогичные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи с импульсным воздействием (1), (2) могут быть получены и в случае неразрешимости системы (3) относительно производной [3, 23], в частности в случае разрешимости системы (3) относительно неизвестной [3]. Кроме того, аналогичные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи с импульсным воздействием (1), (2) могут быть получены для краевой задачи с импульсным воздействием в абстрактных пространствах [1, 24, 25].

Литература

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — 2th ed. — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

2. *Азбелев Н. В., Максимов Н. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.

3. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // J. Math. Sci. — 2015. — **210**, № 1. — P. 9 – 21.

4. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. — San Francisco etc.: Pitman Adv. Publ. Program, 1980. — 178 p.

5. *Чуйко С. М.* Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием // Динам. системы. — 2014. — **4(32)**, № 1 – 2. — С. 89 – 100.

6. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 8. — С. 1132 – 1135.

7. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады РАН. — 2001. — **379**, № 2. — С. 170 – 172.

8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

9. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 2. — С. 14 – 23.

10. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equations // Different. Equat. — 2001. — **37**, № 4. — P. 464–471.

11. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996. — 280 с.

12. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

13. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2013. — **53**, № 6. — P. 777–788.

14. *Chuiko S. M.* To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // J. Math. Sci. — 2017. — **227**, № 1. — P. 16–32.

15. *Чуйко С. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Компьютер. исслед. и моделирование. — 2013. — **5**, № 5. — С. 769–783.

16. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukr. Math. J. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1162–1169.

17. *Чуйко С. М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестн. Одес. нац. ун-та. Математика и механика. — 2014. — **19**, вып. 1 (21). — С. 49–57.

18. *Чуйко С. М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестн. Харьков. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Математика, прикл. математика и механика. — 2014. — № 1120. — С. 85–94.

19. *Чуйко С. М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышев. сб. — 2015. — **16**, вып. 1. — С. 52–66.

20. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.

21. *Chuiko S. M.* Generalized Green operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Math. — 2016. — **60**, № 8. — P. 64–73.

22. *Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И.* К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 7. — С. 994–996.

23. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary-value problem // Sib. Math. J. — 2015. — **56**, № 4. — P. 752–760.

24. *Чуйко С. М.* Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 2016. — **52**, № 11. — С. 1578–1579.

25. *Чуйко С. М.* О разрешимости матричной краевой задачи // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2017. — **132**. — С. 140–144.

Получено 07.04.17