УДК 517.9

СХЕМА СТУПЕНЧАТОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Н. В. Скрипник

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65082, Украина
e-mail: talie@ukr.net

We substantiate applicability of the three-step averaging scheme to multivalued differential equations with generalized derivative.

Обгрунтовано можливість застосування східчастої схеми усереднення до багатозначних диференціальних рівнянь з узагальненою похідною.

1. Введение. При развитии теории многозначных отображений возник вопрос о том, что понимать под производной от многозначного отображения. Основной причиной, по которой возникают трудности при введении данного понятия, является нелинейность пространства $\mathrm{comp}\,(R^n)$, что влечет за собой отсутствие операции вычитания.

В работе [1] M. Hukuhara ввел интеграл и производную для многозначных отображений и рассмотрел как они связаны между собой. Затем T. F. Bridgland [2] ввел Huygens-производную, Ю. Н. Тюрин [3] и H. T. Banks, M. Q. Jacobs [4] — π-производную, которая использует теорему вложения Радстрема [5], А. В. Плотников [6, 7] — T-производную, А. Н. Витюк [8] — дробную производную для многозначных отображений, B. Bede, S. G. Gal [16] — обобщенную производную для интервальных отображений, а А. В. Плотников и Н. В. Скрипник [10] — обобщенную производную для многозначных отображений. В дальнейшем свойства этих производных рассматривались в работах [7, 11 – 18].

В 1969 г. F. S. de Blasi и F. Iervolino рассмотрели дифференциальные уравнения с производной Хукухары [11]. В дальнейшем многие авторы изучали свойства решений таких уравнений [7, 15, 18 – 23], интегро-дифференциальные уравнения [24, 25], уравнения высших порядков [26], импульсные [15, 18] и управляемые [27, 28, 57] уравнения с производной Хукухары, а также дифференциальные включения с производной Хукухары [7, 30]. Впоследствии рассматривались также дифференциальные уравнения с π-производной [12, 18, 31] и T-производной [6, 7], интервальные уравнения с обобщенной производной [16, 17] и многозначные уравнения с обобщенной производной [10, 32].

Рассмотрим многозначное дифференциальное уравнение с обобщенной производной

$$DX \overset{h}{-} \Phi(-\phi(t))F_1(t,X) = \Phi(\phi(t))F_2(t,X), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in [t_0,T]$, $X_0 \in \mathrm{conv}\,(R^n)$, $X\colon [t_0,T] \to \mathrm{conv}\,(R^n)$, $F_1, F_2\colon [t_0,T] \times \mathrm{conv}\,(R^n) \to \mathrm{conv}\,(R^n)$ — многозначные отображения, $\phi\colon [t_0,T] \to R^1$ — непрерывная функция, $\Phi(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > 0, \\ 0, & \phi \le 0. \end{cases}$

Определение 1 [10, 32]. *Многозначное отображение* $X\colon [t_0,T] \to \operatorname{conv}\,(R^n)$ *называется решением дифференциального уравнения (1), если оно непрерывно и на любом отрезке* $[\tau_i,\tau_{i+1}] \subset [t_0,T]$, *где функция* $\phi(\cdot)$ *на интервале* (t_i,t_{i+1}) *имеет постоянный знак, удовлетворяет интегральному уравнению*

$$X(t) + \int\limits_{\tau_i}^{t} \Phi(-\phi(s))F_1(s,X(s))ds = X(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} \Phi(\phi(s))F_2(s,X(s))ds. \tag{2}$$

Если на интервале (τ_i,τ_{i+1}) функция $\phi(t) > 0$, то $X(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$X(t) = X(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} F_2(s,X(s))ds$$

для $t \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$ и $\operatorname{diam}(X(t))$ является возрастающей функцией.

Если на интервале (τ_i,τ_{i+1}) функция $\phi(t) < 0$, то $X(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$X(\tau_i) = X(t) + \int\limits_{\tau_i}^{t} F_1(s,X(s))ds,$$

т. е.

$$X(t) = X(\tau_i) \overset{h}{-} \int\limits_{\tau_i}^{t} F_1(s,X(s))ds$$

для $t \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$ и $\operatorname{diam}(X(t))$ является убывающей функцией.

Если на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ функция $\phi(t) = 0$, то $X(t) = X(\tau_i)$ для $t \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$ и $\operatorname{diam}(X(t))$ является постоянной функцией.

Таким образом, имеет место другое эквивалентное определение решение уравнения (1).

Определение 2 [10, 32]. *Многозначное отображение* $X\colon [t_0,T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ *называется решением дифференциального уравнения (1), если оно абсолютно непрерывно, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на* $[t_0,T]$ *и* $\operatorname{diam} X(t)$ *возрастает, если* $\phi(t) > 0$, *постоянный, если* $\phi(t) = 0$, *и убывает, если* $\phi(t) < 0$.

В [37] рассмотрены вопросы существования решения уравнения (1) в общем случае, а также в двух частных случаях: $\operatorname{conv}\left(R^1\right)$ и $CC\left(R^n\right), n \geq 2$.

Методы усреднения в сочетании с асимптотическими представлениями (в смысле Пуанкаре) применяются как основной конструктивный инструмент при решении сложных проблем аналитической динамики, описываемых дифференциальными уравнениями. Это стало возможным благодаря работам Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [38], Ю. А. Митропольского [39 – 41], А. М. Самойленко [18, 42], В. М. Волосова [43], Е. А. Гребенникова [44], М. А. Красносельского, С. Г. Крейна [45], А. Н. Филатова [46, 47] и др. Возможность применения метода усреднения к задачам оптимального управления рассмотрена в работах Н. Н. Моисеева [48, 49], Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколова [50], В. А. Плотникова [51, 52] и др.

Впоследствии в роботах [7, 15, 18, 51 – 67] идея метода усреднения была распространена на дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, квазидифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения и включения с производной Хукухары.

В данной статье мы рассмотрим возможность применения ступенчатой схемы усреднения к многозначным дифференциальным уравнениям с обобщенной производной.

2. Основные результаты. Рассмотрим многозначное дифференциальное уравнение с обобщенной производной и малым параметром

$$DX\overset{h}{-}\Phi(-\phi(t))\varepsilon F_1(t,X) = \Phi(\phi(t))\varepsilon F_2(t,X), \quad X(0) = X_0, \tag{3}$$

где $t \in R_+$, $\varepsilon > 0$– малый параметр, $X_0 \in \operatorname{conv}(R^n)$, $X\colon R_+ \to \operatorname{conv}(R^n)$, $F_1, F_2\colon R_+ \times \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{conv}(R^n)$ — многозначные отображения, $\phi\colon R_+ \to R^1$ — непрерывная функция, $\Phi(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > 0, \\ 0, & \phi \le 0. \end{cases}$

Обозначим через s_j, $j = 1, 2, \ldots$, нули функции $\phi(\cdot)$, в левой или/и правой окрестности которых данная функция не равна тождественно 0. Будем считать, что точки s_j занумерованы в возрастающем порядке, т. е. $s_{j+1} > s_j$, $j = 1, 2, \ldots$.

Также будем предполагать, что единственной точкой сгущения (если такова имеется) точек s_j, $j = 1, 2, \ldots$, является $+\infty$. Тогда существует положительная постоянная σ такая, что $s_{j+1} - s_j \ge \sigma$, $j = 1, 2, \ldots$.

Разобьем полуось $\mathbb{R}_+$ с шагом $\omega > 0$ точками $t_i = i\omega$, $i = \overline{1, \infty}$. Рассмотрим множество точек Σ, состоящее из точек $\{s_j\}$ и $\{t_i\}$, и занумеруем их в возрастающем порядке: $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $0 < \tau_{k+1} - \tau_k \le \omega$.

Введем в рассмотрение многозначные отображения

$$\bar{F}_m(t,X) = \left\{ \frac{1}{\tau_{k+1} - \tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_m(s,X)\,ds, \;\; t \in (\tau_k, \tau_{k+1}] \right\}, \quad m = 1, 2. \tag{4}$$

Уравнению (3) поставим в соответствие частично усредненное уравнение

$$DY\overset{h}{-}\Phi(-\phi(t))\varepsilon \bar{F}_1(t,Y) = \Phi(\phi(t))\varepsilon \bar{F}_2(t,Y), \quad Y(0) = X_0. \tag{5}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений систем (3) и (5) на асимптотически большом промежутке.

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{(t,X)\colon t \in R_+,\ X \in D \subset \operatorname{conv}(R^n)\}$ выполнены следующие условия:*

1) многозначные отображения $F_1(t,X)$, $F_2(t,X)$ непрерывны, ограничены постоянной M и удовлетворяют условию Липшица по X с постоянной λ;

2) решение $Y(\cdot)$ уравнения (5) с начальным условием $Y(0) = X_0 \in D' \subset D$ определено при $t \in R_+$ для всех $\varepsilon > 0$ и лежит с некоторой ρ-окрестностью в области D.

Тогда для любого $L > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0(L) > 0$ и $C(L) > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка $h(X(t), Y(t)) \le C\varepsilon$, где $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ —решения систем (3) и (5) с начальным условием $X(0) = Y(0) \in D'$.

Доказательство. Вначале покажем, что многозначные отображения $\bar{F}_m(t,X)$, $m = 1,2$, ограничены постоянной M и удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ. При $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ имеем

$$|\bar{F}_m(t,X)| = \left| \frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_m(s,X)ds \right| \le \frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |F_m(s,X)|ds \le$$

$$\le \frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} M\,ds = M,$$

$$h(\bar{F}_m(t,X), \bar{F}_m(t,Y)) = h\left(\frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_m(s,X)ds, \frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_m(s,Y)ds \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} h(F_m(s,X), F_m(s,Y))ds \le$$

$$\le \frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \lambda h(X,Y)\,ds \le \lambda h(X,Y).$$

Обозначим $\delta_k = h(X(\tau_k), Y(\tau_k))$. Пусть $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$. Тогда функция $\phi(\cdot)$ на промежутке (τ_k, τ_{k+1}) либо отрицательна, либо положительна, либо тождественно равна 0.

1. Пусть $\phi(\cdot)$ на промежутке (τ_k, τ_{k+1}) отрицательна, тогда

$$X(t) = X(\tau_k) \overset{h}{-} \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{t} F_1(s, X(s))ds,$$

$$Y(t) = Y(\tau_k) \overset{h}{-} \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{t} \bar{F}_1(s, Y(s))ds.$$

Имеем

$$\delta_{k+1} = h(X(\tau_{k+1}), Y(\tau_{k+1})) =$$

$$= h\left(X(\tau_k) \overset{h}{-} \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, X(s))\,ds,\; Y(\tau_k) \overset{h}{-} \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_1(s, Y(s))\,ds \right) \le$$

$$\le \delta_k + \varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, X(s))\,ds, \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_1(s, Y(s))ds \right) \le$$

$$\leq \delta_k + \varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, X(s))\,ds,\ \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, Y(s))\,ds\right) +$$

$$+\,\varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, Y(s))\,ds,\ \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_1(s, Y(s))\,ds\right).$$

Учитывая условие Липшица и ограниченность отображений $F_m(\cdot,\cdot)$, $m = 1, 2$, оцениваем второе слагаемое:

$$\varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, X(s))\,ds,\ \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, Y(s))\,ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} h(F_1(s, X(s)), F_1(s, Y(s)))\,ds \leq \varepsilon\lambda \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} h(X(s), Y(s))\,ds \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[h(X(s), X(\tau_k)) + h(X(\tau_k), Y(\tau_k)) + h(Y(\tau_k), Y(s))\right] ds \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left[2\varepsilon M(s - \tau_k) + \delta_k\right] ds \leq \varepsilon\lambda\left[M\omega^2\varepsilon + \delta_k\omega\right].$$

Для третьего слагаемого с учетом (4) имеем

$$\varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, Y(s))\,ds,\ \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_1(s, Y(s))\,ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, Y(s))\,ds,\ \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, Y(\tau_k))\,ds\right) +$$

$$+\,\varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_1(s, Y(\tau_k))\,ds,\ \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_1(s, Y(\tau_k))ds\right) +$$

$$+\,\varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_1(s, Y(\tau_k))\,ds,\ \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_1(s, Y(s))ds\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} h(F_1(s,Y(s)),F_1(s,Y(\tau_k)))ds + \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} h(\bar{F}_1(s,Y(s)),\bar{F}_1(s,Y(\tau_k)))\,ds \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\lambda \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} h(Y(s),Y(\tau_k))\,ds \leq 2\varepsilon\lambda \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varepsilon M(s-\tau_k)\,ds \leq M\varepsilon^2\lambda\omega^2.$$

Тогда

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k + \varepsilon\lambda\left[M\omega^2\varepsilon + \delta_k\omega\right] + M\varepsilon^2\lambda\omega^2 = (1+\varepsilon\lambda\omega)\delta_k + 2M\varepsilon^2\lambda\omega^2.$$

2. Пусть $\phi(\cdot)$ на промежутке (τ_k,τ_{k+1}) положительна, тогда

$$X(t) = X(\tau_k) + \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{t} F_2(s,X(s))\,ds,$$

$$Y(t) = Y(\tau_k) + \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{t} \bar{F}_2(s,Y(s))\,ds.$$

Имеем

$$\delta_{k+1} = h(X(\tau_{k+1}),Y(\tau_{k+1})) =$$

$$= h\left(X(\tau_k) + \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_2(s,X(s))\,ds, Y(\tau_k) + \varepsilon \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_2(s,Y(s))ds\right) \leq$$

$$\leq \delta_k + \varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_2(s,X(s))\,ds, \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_2(s,Y(s))\,ds\right) \leq$$

$$\leq \delta_k + \varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_2(s,X(s))\,ds, \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_2(s,Y(s))\,ds\right) +$$

$$+ \varepsilon h\left(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_2(s,Y(s))\,ds, \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \bar{F}_2(s,Y(s))\,ds\right).$$

Проводя рассуждения, аналогичные случаю 1, получаем

$$\delta_{k+1} \leq (1+\varepsilon\lambda\omega)\delta_k + 2M\varepsilon^2\lambda\omega^2.$$

3. Пусть $\phi(\cdot)$ на промежутке (τ_k,τ_{k+1}) тождественно равна 0. Тогда $\delta_{k+1} = \delta_k$.

В любом из трех рассмотренных случаев имеем

$$\delta_{k+1} \leq (1+\varepsilon\lambda\omega)\delta_k + 2M\varepsilon^2\lambda\omega^2.$$

Тогда, учитывая, что количество точек $k+1$ не превышает сумму числа точек последовательности $\{t_i\}$ и числа точек $\{s_j\}$ на промежутке $[0, L\varepsilon^{-1}]$, т. е. величину $\dfrac{L}{\varepsilon\omega} + \dfrac{L}{\varepsilon\sigma}$, получаем

$$\delta_{k+1} \le (1+\varepsilon\lambda\omega)^{k+1}\delta_0 + \Big[(1+\varepsilon\lambda\omega)^k + \ldots + 1\Big] 2M\varepsilon^2\lambda\omega^2 =$$

$$= \frac{(1+\varepsilon\lambda\omega)^{k+1} - 1}{\varepsilon\lambda\omega} 2M\varepsilon^2\lambda\omega^2 =$$

$$= \Big((1+\varepsilon\lambda\omega)^{k+1} - 1\Big) 2M\varepsilon\omega \le 2M\omega e^{(k+1)\varepsilon\lambda\omega}\varepsilon \le$$

$$\le 2M\omega\left(e^{\lambda L\left(1+\frac{\omega}{\sigma}\right)} - 1\right)\varepsilon.$$

Окончательно имеем

$$h(X(t), Y(t)) \le h(X(t), X(\tau_k)) + h(X(\tau_k), Y(\tau_k)) + h(Y(\tau_k), Y(t)) \le$$

$$\le 2M\omega\left(e^{\lambda L\left(1+\frac{\omega}{\sigma}\right)} - 1\right)\varepsilon + 2M\omega\varepsilon = 2M\omega e^{\lambda L\left(1+\frac{\omega}{\sigma}\right)}\varepsilon = C\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение с обобщенной производной

$$DX \overset{h}{-} \Phi(-\sin(t))\varepsilon S_{1+\cos(t)}(0) = \Phi(\sin(t))\varepsilon S_{2\sin^2(t)}(0), \quad X(0) = S_1(0).$$

Частично усредненное уравнение с $\omega = \pi$ имеет вид

$$DY \overset{h}{-} \Phi(-\sin(t))\varepsilon S_1(0) = \Phi(\sin(t))\varepsilon S_1(0), \quad Y(0) = S_1(0).$$

Его решением является

$$Y(t) = \begin{cases} S_{1+\varepsilon t}(0), & t \in [0, \pi), \\ S_{1+2\varepsilon\pi-\varepsilon t}(0), & t \in [\pi, 2\pi), \end{cases}$$

а далее продолжаем периодически.

В силу доказанной теоремы решение исходного уравнения $X(t)$ отличается в метрике Хаусдорфа от найденного не более чем на величину $2\pi\varepsilon$.

Литература

1. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205 – 223.
2. *Bridgland T. F.* Trajectory integrals of set valued functions // Pacif. J. Math. — 1970. — **33**, № 1. — P. 43 – 68.
3. *Тюрин Ю. Н.* Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования // Эконом. и мат. методы. — 1965. — **1**, № 3. — С. 391 – 409.
4. *Banks H. T., Jacobs M. Q.* A differential calculus for multifunctions // J. Math. Anal. and Appl. — 1970. — № 29. — P. 246 – 272.

5. *Radstrom H.* An embedding theorem for spaces of convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — № 3. — P. 165 – 169.

6. *Плотников А. В.* Дифференцирование многозначных отображений. T-производная // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 8. — С. 1119 – 1126.

7. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.

8. *Витюк А. Н.* Дробное дифференцирование многозначных отображений // Доп. НАН України. — 2003. — № 10. — С. 75 – 78.

9. *Bede B., Stefanini L.* Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations // Working Papers. — Univ. Urbino Carlo Bo, 2008.

10. *Plotnikov A. V., Skripnik N. V.* Set-valued differential equations with generalized derivative // J. Adv. Res. Pure Math. — 2011. — **3**, № 1. — P. 144 – 160.

11. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. — 1969. — **2**, № 4 – 5. — P. 491 – 501.

12. *Chalco-Cano Y., Romin-Flores H., Jiminez-Gamero M. D.* Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions // Inf. Sci. — 2011. — **181**, № 1. — P. 2177 – 2188.

13. *Lasota A., Strauss A.* Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized // J. Different. Equat. — 1971. — № 10. — P. 152 – 172.

14. *Martelli M., Vignoli A.* On differentiability of multi-valued maps // Boll. Unione mat. ital. — 1974. — **4**, № 10. — P. 701 – 712.

15. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 2009. — 192 с.

16. *Bede B., Gal S. G.* Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets Syst. — 2005. — № 151. — P. 581 – 599.

17. *Stefanini L., Bede B.* Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. Ser. A. — 2009. — **71**, № 3 – 4. — P. 1311 – 1328.

18. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.

19. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Boll. Unione mat. ital. — 1971. — **4**, № 4. — P. 941 – 949.

20. *Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. Unione mat. ital. — 1970. — № 4. — P. 534 – 538.

21. *Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. — Cambridge Sci. Publ., 2006.

22. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. — London: Taylor & Francis, 2003.

23. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с многозначными решениями // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 10. — С. 1326 – 1337.

24. *Плотников А. В., Тумбрукаки А. В.* Интегро-дифференциальные уравнения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 3. — С. 359 – 367.

25. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* Averaging of set integrodifferential equations // Appl. Math. — 2011. — **1**, № 2. — P. 99 – 105.

26. *Piszczek M.* On a multivalued second order differential problem with Hukuhara derivative // Opusc. Math. — 2008. — **28**, № 2. — P. 151 – 161.

27. *Арсирий А. В., Плотников А. В.* Системы управления многозначными траекториями с многозначным критерием качества // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 8. — С. 1142 – 1147.

28. *Plotnikov A. V., Arsirii A. V.* Piecewise constant control set systems // Amer. J. Comput. and Appl. Math. — 2011. — **1**, № 2. — P. 89–92.

29. *Плотников В. А., Кичмаренко О. Д.* Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 376–385.

30. *de Blasi F. S., Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T.* An existence theorem for set differential inclusions in a semilinear metric space // Control Cybernet. — 2007. — **36**, № 3. — P. 571–582.

31. *Плотникова Н. В.* Системы линейных дифференциальных уравнений с π-производной и линейные дифференциальные включения // Мат. сб. — 2005. — **196**, № 11. — С. 127–140.

32. *Plotnikov A., Skripnik N.* Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations // Int. J. Control Sci. Eng. — 2012. — **2**, № 1. — P. 1–6.

33. *Плотникова Н. В.* Аппроксимация пучка решений линейных дифференциальных включений // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 386–400.

34. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.

35. *Filippov A. F.* Differential equations with discontinuous righthand sides. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1988.

36. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 416 с.

37. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Многозначные дифференциальные уравнения с обобщенной производной // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 10. — С. 1350–1362.

38. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 363 с.

39. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.

40. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.

41. *Митропольский Ю. А., Хома Г. Л.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1983. — 216 с.

42. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. — 1971. — Вып. 9. — С. 101–117.

43. *Волосов В. Н.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1962. — № 6. — С. 3–126.

44. *Гребенников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. — М.: Наука, 1986. — 256 с.

45. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. — 1955. — **10**, № 3(65). — С. 147–152.

46. *Филатов А. Н.* Усреднение в системах дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. — Ташкент: Фан, 1971. — 280 с.

47. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. — Ташкент: Фан, 1974. — 216 с.

48. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975. — 528 с.

49. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

50. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

51. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления. — Одесса: Одес. гос. ун-т, 1976. — 103 с.

52. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 187 с.

53. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 1. — С. 121–125.

54. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Обзор результатов // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2010. — **15**, вип. 18. — С. 71–87.

55. *Плотников В. А.* Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения. — 1979. — № 8. — С. 1427–1433.

56. *Плотников В. А.* Усреднение дифференциальных включений // Укр. мат. журн. — 1979. — **31**, № 5. — С. 573–576.

57. *Плотников В. А., Кичмаренко О. Д.* Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 376–385.

58. *Плотников В. А., Кичмаренко О. Д.* Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2007. — **12**, вип. 7. — С. 130–139.

59. *Скрипник Н. В.* Усреднение импульсных дифференциальных включений с производной Хукухары // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 416–432.

60. *Скрипник Н. В.* Теорема Красносельского–Крейна для дифференциальных уравнений и включений с многозначными решениями // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. — 2008. — № 826. — С. 87–99.

61. *Скрипник Н. В.* Усереднення імпульсних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари // Вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. — 2008. — Вип. 374. — С. 109–115.

62. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. Math. — 1976. — **9**, № 3. — P. 397–408.

63. *Klimchuk S., Plotnikov A., Skripnik N.* Overview of V. A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions // Physica D. — 2012. — **241**, № 22. — P. 1932–1947.

64. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities // De Gruyter Stud. Math. — Berlin; Boston: Walter De Gruyter GmbHCo., 2011. — 307 p.

65. *Plotnikov A. V., Skripnik N. V.* Generalized set differential equations // Совр. пробл. математики и ее приложения в естественных науках и информ. технологиях: Сб. тез. докл. междунар. конф. — Харьков: Апостроф, 2012. — С. 14.

66. *Plotnikov V. A., Kichmarenko O. D.* Averaging of differential equations with maxima // Vestn. Chernov. Univ. — 2002. — **150**. — P. 78–82.

67. *Plotnikov V. A., Rashkov P. I.* Averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay // Funct. Different. Equat. — 2001. — № 8. — P. 371–381.

Получено 10.11.16