УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина

We find new properties of solutions of functional equations with constant delays and linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків функціональних рівнянь зі сталим запізненням і лінійно перетвореним аргументом.

В данной работе исследуется уравнение

$$x(t) = a_1x(t-r_1) + \ldots + a_{n_0}x(t-r_{n_0}) + b_1x(q_1t) + \ldots + b_{n_1}x(q_{n_1}t), \tag{1}$$

где $\{a_k, b_k\} \subset R$, $r_k > 0$, $0 < q_k < 1$. Наиболее сложный случай $n_0 = n_1 = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = r_1$ изучен в [1], полученный там результат немного уточнен в [2].

Пусть $Y(t)$ — решение задачи

$$Y(t) = a_1Y(t-r_1) + \ldots + a_{n_0}Y(t-r_{n_0}) + 1, \quad t \geq 0,$$

$$Y(t) = 0, \quad t < 0,$$

где $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{n_0} \overset{\text{df}}{=} r < +\infty$. Функция $Y(t)$, как известно [3] (гл. 12), удовлетворяет условию

$$\operatorname*{var}_{s\in[t-r,t]} Y(s) \leq Ke^{\alpha t},$$

где $\alpha > \sup\{\operatorname{Re} z \,|1 - a_1e^{-zr_1} - \ldots - a_ne^{-zr_{n_0}} = 0\} \overset{\text{df}}{=} \alpha_D$.

Теорема 1. *Пусть:*

1) $\alpha_D < 0$ *и* $r(t_0) \overset{\text{df}}{=} \min\{t_0 - r_k, q_kt_0\} > 0$;

2) параметры $v \in R$ *и* $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v > \beta \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, 1 = \frac{b_1e^{\lambda \ln q_1} + \ldots + b_{n_1}e^{\lambda \ln q_{n_1}}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}\right\},$$

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1\right)\left(\left|b_1q_1^{j+v}\right| + \ldots + \left|b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}\right|\right) < 1.$$

Тогда для j раз непрерывно дифференцируемых решений $x(t)$ уравнения (1) справедлива оценка

$$\left|x^{(m)}(t)\right| \le K_m(t_0,v)t^v \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(m)}(s)\right|,\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\},\quad t\ge r(t_0),$$

где $K_m(t_0,v)$, $m=\overline{0,j}$, — некоторые константы.

Доказательство. Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (1) j раз, получаем $j+1$ дифференциальное уравнение

$$x^{(m)}(t) = a_1x^{(m)}(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}x^{(m)}(t-r_{n_0})+$$
$$+b_1q_1^m x^{(m)}(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^m x^{(m)}(q_{n_1}t),\quad m=\overline{0,j}.$$

Выполняя при $m=j$ замену переменных $x^{(j)}(t)=t^v y(t)$, получаем уравнение

$$y(t)=a_1y(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}y(t-r_{n_0})+b_1q_1^{j+v}y(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}y(q_{n_1}t)+$$
$$+a_1\left(\left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v-1\right)y(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}\left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v-1\right)y(t-r_{n_0}).$$

Запишем его в интегральной форме

$$y(t)=-a_1\int\limits_{t_0-r_1}^{t_0}\left[d_\theta Y(t-\theta-r_1)\right]\varphi(\theta)-\ldots-a_{n_0}\int\limits_{t_0-r_{n_0}}^{t_0}\left[d_\theta Y(t-\theta-r_{n_0})\right]\varphi(\theta)-$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t}\left[d_\theta Y(t-\theta)\right]\left(b_1q_1^{j+v}y(q_1\theta)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}y(q_{n_1}\theta)\right)+$$
$$+b_1q_1^{j+v}y(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}y(q_{n_1}t)-$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t}\left[d_\theta Y(t-\theta)\right]\left(a_1\left(\left(1-\frac{r_1}{\theta}\right)^v-1\right)\times\right.$$
$$\left.\times y(\theta-r_1)+\ldots+a_{n_0}\left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{\theta}\right)^v-1\right)y\left(\theta-r_{n_0}\right)\right)+$$
$$+a_1\left(\left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v-1\right)y(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}\left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v-1\right)y(t-r_{n_0}).$$

Разобьем правую часть последнего уравнения на три слагаемых и оценим каждое из них отдельно, принимая во внимание, что по условию теоремы $\alpha_D<0$:

$$\left|-a_1\int\limits_{t_0-r_1}^{t_0}[d_\theta Y(t-\theta-r_1)]\,\varphi(\theta)-\ldots-a_{n_0}\int\limits_{t_0-r_{n_0}}^{t_0}[d_\theta Y(t-\theta-r_{n_0})]\,\varphi(\theta)\right|\le M\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|,$$

где M — некоторая константа,

$$\left|-\int\limits_{t_0}^{t}[d_\theta Y(t-\theta)]\Big(b_1q_1^{j+v}y(q_1\theta)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}y(q_{n_1}\theta)\Big)+b_1q_1^{j+v}y(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}y(q_{n_1}t)\right|\le$$

$$\le\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)\left(\left|b_1q_1^{j+v}\right|+\ldots+\left|b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}\right|\right)\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|.$$

Пусть $t_0\ge T$, где T — некоторый параметр. Обозначим

$$\sup_{t\ge T}\left(|a_1|\left|\left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v-1\right|+\ldots+|a_{n_0}|\left|\left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v-1\right|\right)\overset{\mathrm{df}}{=}l(T),$$

тогда

$$\left|-\int\limits_{t_0}^{t}[d_\theta Y(t-\theta)]\left(a_1\left(\left(1-\frac{r_1}{\theta}\right)^v-1\right)y\left(\theta-r_1\right)+\ldots+a_{n_0}\left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{\theta}\right)^v-1\right)y\left(\theta-r_{n_0}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\,a_1\left(\left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v-1\right)y(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}\left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v-1\right)y(t-r_{n_0})\right|\le$$

$$\le\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)l(T)\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|.$$

Теперь можно записать оценку для $y(t)$:

$$|y(t)|\le(M+1)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|+\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)\times$$

$$\times\left(\left|b_1q_1^{j+v}\right|+\ldots+\left|b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}\right|+l(T)\right)\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|,\quad t\ge t_0\ge T.$$

Функция в правой части является неубывающей, поэтому из последнего неравенства следует

$$\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|\le(M+1)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|+\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)\times$$

$$\times\left(\left|b_1q_1^{j+v}\right|+\ldots+\left|b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}\right|+l(T)\right)\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|.$$

Поскольку по условию теоремы

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s)+1\right)\left(\left|b_1q_1^{j+v}\right|+\ldots+\left|b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}\right|\right)<1$$

и $l(T)\to 0,\ T\to+\infty$, то можем считать T настолько большим, что выполняется соотношение

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s)+1\right)\left(\left|b_1q_1^{m+v}\right|+\ldots+\left|b_{n_1}q_{n_1}^{m+v}\right|+l(T)\right)<1.$$

Тогда имеем

$$\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|\le\frac{M+1}{1-\left(\operatorname*{var}\limits_{s\in[0,+\infty)} Y(s)+1\right)\left(\left|b_1q_1^{m+v}\right|+\ldots+\left|b_{n_1}q_{n_1}^{m+v}\right|+l(T)\right)}\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|,$$

откуда получаем

$$\left|x^{(j)}(t)\right|\le K_j(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^v\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|,\quad t\ge r(t_0),$$

где $K_j(T)$ — некоторая константа.

Далее, уравнение для производной $(j-1)$-го порядка запишем в виде

$$x^{(j-1)}(t)=\frac{b_1q_1^{j-1}x^{(j-1)}(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j-1}x^{(j-1)}(q_{n_1}t)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}+$$
$$+\frac{a_1\left(x^{(j-1)}(t-r_1)-x^{(j-1)}(t)\right)+\ldots+a_{n_0}\left(x^{(j-1)}\left(t-r_{n_0}\right)-x^{(j-1)}(t)\right)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}.$$

Для краткости обозначим

$$f(t)\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{a_1\left(x^{(j-1)}\left(t-r_1\right)-x^{(j-1)}(t)\right)+\ldots+a_{n_0}\left(x^{(j-1)}\left(t-r_{n_0}\right)-x^{(j-1)}(t)\right)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}$$

и соответственно

$$x^{(j-1)}(t)=\frac{b_1q_1^{j-1}x^{(j-1)}(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j-1}x^{(j-1)}(q_{n_1}t)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}+f(t).\tag{2}$$

Оценим функцию $f(t)$. Для этого запишем ее с помощью теоремы Лагранжа следующим образом:

$$f(t)=\frac{-a_1x^{(j)}(t-\theta_{1,j}(t)r_1)r_1-\ldots-a_{n_0}x^{(j)}(t-\theta_{n_0,j}(t)r_{n_0})r_{n_0}}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}},$$

где $0 < \theta_{k,j}(t) < 1$, $k = \overline{1, n_0}$. С учетом мажоранты для $x^{(j)}(t)$ функцию $f(t)$ можно оценить так:

$$|f(t)| \le \frac{|a_1|r_1 + \ldots + |a_{n_0}|r_{n_0}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}\, K_j(T) \sup_{t \ge T} \left(\left(1 - \frac{r}{t}\right)^v + 1 \right) \left(\frac{t}{t_0}\right)^v \times$$

$$\times \sup_{s \in [r(t_0), t_0]} \left| x^{(j)}(s) \right| \overset{\mathrm{df}}{=} L_j(T) \left(\frac{t}{t_0}\right)^v \sup_{s \in [r(t_0), t_0]} \left| x^{(j)}(s) \right|.$$

Выполняя в уравнении (2) замену переменных $x^{(j-1)}(t) = t^v y(t)$, получаем

$$y(t) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} y(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} y(q_{n_1} t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + t^{-v} f(t).$$

С помощью замены $y(t) = z(\ln t)$ перейдем к разностному уравнению

$$z(\tau) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} z\left(\tau + \ln q_1\right) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} z\left(\tau + \ln q_{n_1}\right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + e^{-v\tau} f\left(e^\tau\right), \ \tau = \ln t \ge \tau_0 = \ln t_0.$$

По условию теоремы $v > \beta$. Следовательно, для однородного разностного уравнения

$$w(\tau) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} w\left(\tau + \ln q_1\right) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} w\left(\tau + \ln q_{n_1}\right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}$$

верхняя граница действительных частей корней характеристического уравнения удовлетворяет условию

$$\sup \left\{ \mathrm{Re}\lambda \,\middle|\, 1 = \frac{b_1 q_1^{j-1+v} e^{\lambda \ln q_1} + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v} e^{\lambda \ln q_{n_1}}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} \right\} = \beta - v - (j-1) < 0.$$

Следовательно, разностное уравнение для функции $w(\tau)$ асимптотически устойчиво. Обозначим его фундаментальное решение символом $Z_{v+j-1}(\tau)$ и запишем $z(\tau)$ в интегральной форме

$$z(\tau) = \frac{b_1 q_1^{j-1+v}}{1 - \sum_{j=1}^{n_0} a_j} \int\limits_{\tau_0 + \ln q_1}^{\tau_0} \left[d_\theta Z_{v+j-1}\left(\tau - \theta + \ln q_1\right)\right] z\left(\theta\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{b_{n_1} q_{n_1}^{j-1+v}}{1 - \sum_{j=1}^{n_0} a_j} \int\limits_{\tau_0 + \ln q_{n_1}}^{\tau_0} \left[d_\theta Z_{v+j-1}\left(\tau - \theta + \ln q_{n_1}\right)\right] z(\theta) -$$

$$- \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left[d_s Z_{v+j-1}(\tau - s)\right] e^{-vs} f\left(e^s\right) + e^{-v\tau} f\left(e^\tau\right).$$

Учитывая мажоранту для $f(t)$, оцениваем модуль решения:

$$|z(\tau)| \le \Lambda_{j-1} \frac{1}{t_0^v} \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j-1)}(s)\right| + \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+j-1}(s)+1\right) \sup_{s\in[\tau_0,\tau]} \left|e^{-vs} f\left(e^s\right)\right| \le$$

$$\le \Lambda_{j-1} \frac{1}{t_0^v} \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j-1)}(s)\right| + \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+j-1}(s)+1\right) \times$$

$$\times L_j(T) \frac{1}{t_0^v} \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j)}(s)\right|, \quad \tau \ge \tau_0,$$

где Λ_{j-1} — некоторая константа, или

$$|y(t)| \le \chi_{j-1} \frac{1}{t_0^v} \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j-1)}(s)\right| + \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+j-1}(s)+1\right) \times$$

$$\times L_j(T) \frac{1}{t_0^v} \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j)}(s)\right|, \quad t \ge r(t_0),$$

где χ_{j-1} — некоторая константа. Отсюда получаем

$$|y(t)| \le \left(\chi_{j-1} + \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+j-1}(s)+1\right) L_j(T)\right) \frac{1}{t_0^v} \times$$

$$\times \max\left\{ \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j-1)}(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j)}(s)\right| \right\} \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} K_{j-1}(T) \frac{1}{t_0^v} \max\left\{ \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j-1)}(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j)}(s)\right| \right\}$$

или окончательно

$$\left|x^{(j-1)}(t)\right| \le K_{j-1}(T) \left(\frac{t}{t_0}\right)^v \max\left\{ \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j-1)}(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j)}(s)\right| \right\}, \quad t \ge r(t_0).$$

Действуя аналогичным образом в случае производных меньшего порядка, имеем

$$\left|x^{(m)}(t)\right| \le K_m(T) \left(\frac{t}{t_0}\right)^v \max\left\{ \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(m)}(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j)}(s)\right| \right\},$$
$$t \ge r(t_0), \quad m = \overline{0,j}, \tag{3}$$

где $K_m(T)$ — некоторые константы, зависящие только от параметра T.

Отметим, что величина T в приведенных рассуждениях удовлетворяла условию малости коэффициента $l(T)$, которое может быть вынесено в начало доказательства. Верхние границы для коэффициентов $K_m(T)$, $m = \overline{0,j}$, не зависят от T. Поскольку в этих рассуждениях $t_0 \geq T$ является переменной величиной, а по условию теоремы эта величина должна быть фиксирована, то из уравнений для производных $x^{(m)}(t)$, $m = \overline{0,j}$, могут быть получены оценки

$$\sup_{s\in[r(t_*),t]} \left|x^{(m)}(s)\right| \leq \sup_{s\in[r(t_*),t_*]} \left|x^{(m)}(s)\right| + \eta_m \sup_{s\in[r(t_*),t-r_1]} \left|x^{(m)}(s)\right|, \quad t \geq t_* \geq r_1 + q_{\max}t_*,$$

где η_m — некоторые константы, $q_{\max} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\{q_k, k = \overline{1,n_1}\}$.

Теорема 1 доказана.

Отдельно рассмотрим частный случай уравнения (1)

$$x(t) = a_1x(t-r_1) + \ldots + a_{n_0}x(t-r_{n_0}) + bx(qt). \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть:*

1) $\alpha_D < 0, r(t_0) > 0, b \neq 0$ *и* $v_* \stackrel{\mathrm{df}}{=} \dfrac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|$;

2) параметр $j \in N\bigcup\{0\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1\right)\left|bq^{j+v_*}\right| < 1.$$

Тогда для j раз непрерывно дифференцируемых решений $x(t)$ уравнения (4) справедлива оценка

$$|x(t)| \leq K(t_0)t^{v_*} \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]} |x(s)|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} |x^{(j)}(s)|\right\}, \quad t \geq r(t_0),$$

где $K(t_0)$ — некоторая константа.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, запишем уравнение (4) в виде

$$x(t) = \frac{bx(qt)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} + \frac{a_1(x(t-r_1)-x(t)) + \ldots + a_{n_0}(x(t-r_{n_0})-x(t))}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}.$$

Вводя обозначение $f(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \dfrac{a_1(x(t-r_1)-x(t)) + \ldots + a_{n_0}(x(t-r_{n_0})-x(t))}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}$, получаем

$$x(t) = \frac{bx(qt)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} + f(t). \tag{5}$$

Для последующей оценки функции $f(t)$ представим ее с помощью теоремы Лагранжа следующим образом: $f(t) = \dfrac{-a_1x'(t-\theta_1(t)r_1)r_1 - \ldots - a_{n_0}x'(t-\theta_{n_0}(t)r_{n_0})r_{n_0}}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}$, где $0 < \theta_k(t) < 1, k = \overline{1,n_0}$.

Запишем уравнение для производной

$$x'(t) = a_1x'(t-r_1) + \ldots + a_{n_0}x'(t-r_{n_0}) + bqx'(qt). \tag{6}$$

Согласно второму условию теоремы существует

$$\frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|-1<v<\frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|$$

такое, что

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)\left|bqq^{j-1+v}\right|=\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)\left|bq^{j+v}\right|<1.$$

Тогда из неравенства (3), примененного к производной $x'(t)$ и уравнению (6), следует, что j раз непрерывно дифференцируемые решения $x(t)$ удовлетворяют оценке

$$\left|x'(t)\right|\le K(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^v\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|,\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\},$$
$$t\ge r(t_0),\quad t_0\ge T. \tag{7}$$

Выполняя в уравнении (5) замену $x(t)=t^v y(t)$, получаем

$$y(t)=\frac{bq^v y(qt)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}+t^{-v}f(t).$$

Из (7) следует неравенство

$$\left|t^{-v}f(t)\right|\le L(T)\,\frac{1}{t_0^v}\,\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|,\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\}\stackrel{\mathrm{df}}{=}M_1.$$

Оценим $y(t)$ при $q^n t\in[qt_0,t_0]$:

$$|y(t)|\le\left|\frac{bq^v y(qt)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|+\left|t^{-v}f(t)\right|\le\left|\frac{bq^v y(qt)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|+M_1\stackrel{\mathrm{df}}{=}d|y(qt)|+M_1\le$$
$$\le d^2\left|y(q^2t)\right|+dM_1+M_1\le\ldots\le d^n\left|y(q^nt)\right|+d^{n-1}M_1+\ldots+dM_1+M_1\le$$
$$\le d^n\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|y(s)|+\frac{d^n-1}{d-1}M_1\le\frac{d^{n+1}-1}{d-1}\,\left(\max\left\{q^{-v},1\right\}+L(T)\right)\frac{1}{t_0^v}\times$$
$$\times\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|,\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\}\stackrel{\mathrm{df}}{=}\frac{d^{n+1}-1}{d-1}\,M_2,$$

$$qt_0\le q^nt\Rightarrow q^{-n}\le\frac{t}{qt_0}\Rightarrow n\le\frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left(\frac{t}{qt_0}\right).$$

Заметим, что согласно выбору v имеем $d>1$. Тогда оценку $y(t)$ можно уточнить

$$|y(t)|\le d^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left(\frac{t}{qt_0}\right)}\,\frac{d}{d-1}\,M_2\stackrel{\mathrm{df}}{=}e^{\ln d\frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left(\frac{t}{qt_0}\right)}\,M_3=\frac{t^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|-v}}{(qt_0)^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|-v}}\,M_3.$$

Отсюда находим

$$|x(t)| = |t^v y(t)| \le \frac{t^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|}}{(qt_0)^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|-v}} M_3 = \frac{t^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|}}{(qt_0)^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|-v}} L_1(T)\frac{1}{t_0^v}\times$$

$$\times \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\} =$$

$$= L_2(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|}\times$$

$$\times \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\}, \quad t \ge t_0 \ge T.$$

Увеличивая константу $L_2(T)$, последнее неравенство можно считать выполненным на полуоси $t \ge r(t_0)$. Отметим, что T не является произвольной величиной. Поэтому для завершения доказательства необходимо повторить замечание относительно t_0, приведенное в конце доказательства теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Запишем частное решение уравнения (4), условие существования которого частично совпадает с достаточным условием асимптотической устойчивости, вытекающим из теоремы 2.

Пример. Частным решением уравнения (4) является ряд

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + x_1 e^{\lambda q t} + x_2 e^{\lambda q^2 t} + \ldots + x_n e^{\lambda q^n t} + \ldots,$$

где λ — корень характеристического уравнения $1 - a_1 e^{-\lambda r_1} - \ldots - a_{n_0} e^{-\lambda r_{n_0}} = 0$, $x_n = \dfrac{b x_{n-1}}{1 - a_1 e^{-\lambda q^n r_1} - \ldots - a_{n_0} e^{-\lambda q^n r_{n_0}}}$, $n \ge 1$, x_0 — произвольное число. Условием сходимости ряда является неравенство $\left|\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right| < 1$. Отметим, что $\operatorname{Re}\lambda$ не обязательно меньше нуля.

С помощью идей де Брейна [4] докажем точность степени v_* и уточним асимптотическое поведение решений уравнения (4) в условиях предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Пусть:*

1) $\alpha_D < 0$, $r(t_0) > 0$, $b \ne 0$ *и* $v \overset{\text{df}}{=} \dfrac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\right|$;

2) параметр $j \in N\bigcup\{0\}$ *удовлетворяет неравенству* $\left(\operatorname{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1\right)\left|bq^{j+v}\right| < 1$.

Тогда для $j+1$ *раз непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения (4) в случае* $\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} > 0$ *существует предельная непрерывная периодическая функция* $\varphi(u)$ *с периодом* 1, *а в случае* $\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} < 0$ — *предельная непрерывная периоди-*

ческая функция $\varphi(u) \equiv -\varphi(u-1)$ с периодом 2 такая, что

$$\left|t^{-v}x(t) - \varphi\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right| \leq K(t_0)\frac{1}{t}\ \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\},$$

$$t \geq r(t_0),$$

где $K(t_0)$ — некоторая константа. При этом в случае $\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} > 0$ для любой непрерывной периодической функции $\psi(u)$ с периодом 1, а в случае $\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} < 0$ для любой непрерывной периодической функции $\psi(u) \equiv -\psi(u-1)$ с периодом 2 и сколь угодно малой окрестности этой функции существует $j+1$ раз непрерывно дифференцируемое решение уравнения (4), которое начинается на некотором начальном отрезке $[r(t_1), t_1]$ и имеет предельную периодическую функцию в данной окрестности функции $\psi(u)$.

Доказательство. Применяя теорему 2 к производной $x'(t)$ и разностному уравнению, полученному из уравнения (4) после дифференцирования, находим

$$\left|x'(t)\right| \leq L(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{v-1}\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x''(s)\right|, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\}, \quad t \geq qt_0, \quad t_0 \geq T, \tag{8}$$

где $L(T)$ — некоторая константа, при условии $j+1$ раз непрерывной дифференцируемости $x(t)$.

Выполняя замену $x(t) = t^v y(t)$ в уравнении (5), получаем

$$y(t) = \frac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}\left|\frac{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}{b}\right| y(qt) + t^{-v}f(t).$$

С помощью неравенства (8) можно оценить неоднородность в этом уравнении:

$$\left|t^{-v}f(t)\right| \leq M(T)\frac{1}{t_0^{v-1}}\frac{1}{t}\ \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x''(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\}$$

для некоторой константы $M(T)$. Обозначим для краткости $t^{-v}f(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} g(t)$ и предположим, что $\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} > 0$. Тогда $y(t) = y(qt) + g(t)$. Выполняя замену переменных в функциональном уравнении $y(t) = z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$, получаем

$$y(t) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = y(qt) + g(t) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right) + g\left(e^{\ln q^{-1}\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}}\right)$$

или, обозначая $u = \dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}$, имеем $z(u) = z(u-1) + g\left(e^{u \ln q^{-1}}\right)$.

Отметим также, что

$$x'(t) = vt^{v-1}y(t) + t^v y'(t) = t^{v-1}\left(vz\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{\ln q^{-1}}\right).$$

Учитывая это, продолжаем оценку неоднородности:

$$|g(t)| \leq \frac{1}{t}D(T)\max\left\{\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}},\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]}|z(s)|,\ldots,\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}},\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]}\left|z^{(j+1)}(s)\right|\right\} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{t}W(T,z_0).$$

Используя равенство $z(u) - z(u-1) = g\left(e^{u\ln q^{-1}}\right)$ и мажоранту для $|g(t)|$, оцениваем разность

$$\begin{aligned}|z(u+m) - z(u+n)| &\leq |z(u+m) - z(u+m-1)| + \ldots + |z(u+n+1) - z(u+n)| = \\ &= \left|g\left(e^{(u+m)\ln q^{-1}}\right)\right| + \ldots + \left|g\left(e^{(u+n+1)\ln q^{-1}}\right)\right| \leq \\ &\leq e^{-(u+m)\ln q^{-1}}W(T,z_0) + \ldots + e^{-(u+n+1)\ln q^{-1}}W(T,z_0) \leq \\ &\leq q^{u+n+1}W(T,z_0)\,\frac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

Отсюда следуют фундаментальность последовательности $z(u+n)$, существование предела $\lim_{n\to+\infty} z(u+n) \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi(u)$ и неравенство $|z(u)-\varphi(u)| \leq q^{u+1}W(T,z_0)\dfrac{1}{1-q}$, $u \geq \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1$.

Очевидно, что $\varphi(u)$ — периодическая функция с периодом 1, ее непрерывность следует из ограниченности $z'(u)$. Запишем последнее неравенство в развернутом виде

$$|z(u) - \varphi(u)| \leq q^u D_1(T)\max\left\{\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}},\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]}|z(s)|,\ldots,\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}},\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]}\left|z^{(j+1)}(s)\right|\right\},$$

$$u \geq \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1,$$

где $D_1(T) \overset{\mathrm{df}}{=} D(T)\dfrac{q}{1-q}$. Таким образом, уже на отрезке $\left[\dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1, \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]$ можно оценить разность между решением $z(u)$ и его предельной периодической функцией $\varphi(u)$ через начальные значения решения и его производных.

Итак, в случае $\dfrac{b}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} > 0$ доказано существование предельной периодической функции и получена оценка скорости сходимости.

Обратно, используя идеи [4], предполагаем, что задана непрерывная периодическая функция $\varphi(u)$. Ее можно приблизить с помощью тригонометрического полинома $\psi(u)$, который в свою очередь приближается полиномом Эрмита $H(u)$ равномерно на отрезке $[-1, 0]$ вместе с конечным числом производных. Полином $H(u)$ также приближается некоторым полиномом $G(u)$, который при замене аргумента $G(u-u_0)$, $u_0 = \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}$, удовлетворяет $j+2$ условиям склейки (гладкости) функционального уравнения и, таким образом, задает $j+1$ раз непрерывно дифференцируемое решение $z_G(u)$, начальные значения которого, $G(u-u_0)$, близки к фиксированному тригонометрическому полиному $\psi(u-u_0)$, а следовательно, ограничены. Последнее позволяет при достаточно большом t_0 утверждать близость предельной периодической функции решения $\varphi_{z_G}(u)$ к решению $z_G(u)$ на начальном отрезке, т. е. к $G(u-u_0)$, а значит, и к функции $\varphi(u-u_0)$, а если u_0 — целое число, то и к данной периодической функции $\varphi(u)$. В этой цепочке рассуждений необходимо показать только построение полинома $G(u)$.

Сформулируем $j+2$ условия склейки в терминах функции $z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$ и ее производных. Для этого уравнение этой функции запишем в явном виде

$$z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right) +$$
$$+ \frac{a_1\left(z\left(\frac{\ln(t-r_1)}{\ln q^{-1}}\right) - z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right) + \ldots + a_{n_0}\left(z\left(\frac{\ln(t-r_{n_0})}{\ln q^{-1}}\right) - z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} +$$
$$+ \frac{a_1\left(\left(1-\frac{r_1}{t}\right)^v - 1\right) z\left(\frac{\ln(t-r_1)}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + a_{n_0}\left(\left(1-\frac{r_{n_0}}{t}\right)^v - 1\right) z\left(\frac{\ln\left(t-r_{n_0}\right)}{\ln q^{-1}}\right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}. \tag{9}$$

Продифференцируем несколько раз функцию $y(t) = z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$:

$$y'(t) = z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t\ln q^{-1}}, \quad y''(t) = z''\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t^2\ln^2 q^{-1}} - z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t^2\ln q^{-1}},$$

$$y'''(t) = z'''\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t^3\ln^3 q^{-1}} - z''\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{3}{t^3\ln^2 q^{-1}} + z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{2}{t^3\ln q^{-1}},$$

. . . .

$$y^{(l)}(t) = \frac{d^l}{dt^l} z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t^l\ln^l q^{-1}} + \ldots + (-1)^{l+1} z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{(l-1)!}{t^l\ln q^{-1}}, \quad l \geq 2.$$

Аналогично получаем

$$\frac{d^l}{dt^l} z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right) = z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right)\frac{1}{t^l\ln^l q^{-1}} + \ldots + (-1)^{l+1} z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right) \times$$
$$\times \frac{(l-1)!}{t^l\ln q^{-1}}, \quad l \geq 2.$$

Рассмотрим отдельно слагаемое

$$\frac{a_1\left(z\left(\frac{\ln(t-r_1)}{\ln q^{-1}}\right)-z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right)+\ldots+a_{n_0}\left(z\left(\frac{\ln\left(t-r_{n_0}\right)}{\ln q^{-1}}\right)-z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}=$$

$$=\frac{a_1\left(y(t-r_1)-y(t)\right)+\ldots+a_{n_0}\left(y(t-r_{n_0})-y(t)\right)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}.$$

Продифференцируем его l раз и запишем полученную разность с помощью теоремы Лагранжа через функцию $z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$:

$$\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n_0}a_k}\sum_{k=1}^{n_0}a_k\left(y^{(l)}(t-r_k)-y^{(l)}(t)\right)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0}a_k-1}\sum_{k=1}^{n_0}a_kr_ky^{(l+1)}\left(t-\theta_{l+1}(t,r_k)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0}a_k-1}\sum_{k=1}^{n_0}a_kr_k\frac{1}{\left(t-\theta_{l+1}\left(t,r_k\right)\right)^{l+1}}\times$$

$$\times\left(z^{(l+1)}\left(\frac{\ln\left(t-\theta_{l+1}(t,r_k)\right)}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{\ln^{l+1}q^{-1}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{l+2}z'\left(\frac{\ln\left(t-\theta_{l+1}(t,r_k)\right)}{\ln q^{-1}}\right)\frac{l!}{\ln q^{-1}}\right),$$

где $0<\theta_{l+1}(t,r_k)<r_k$, $k=\overline{1,n_0}$. Сделанные замечания позволяют утверждать, что производную l-го порядка тождества (9) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^l}{dt^l}z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)=z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{1}{t^l\ln^l q^{-1}}+\ldots+(-1)^{l+1}z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{(l-1)!}{t^l\ln q^{-1}}=$$

$$=z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t^l\ln^l q^{-1}}+\ldots+(-1)^{l+1}z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{(l-1)!}{t^l\ln q^{-1}}+$$

$$+\frac{1}{t^{l+1}}\left[\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{l+1}\chi_{l,k}^i(t)z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-\theta_{l+1}(t,r_k)\right)}{\ln q^{-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{i=0}^{l}\alpha_{l,k}^i(t)z^{(i)}\left(\frac{\ln(t-r_k)}{\ln q^{-1}}\right)\right],$$

где коэффициенты $\chi_{l,k}^i(t)$, $\alpha_{l,k}^i(t)$ — ограниченные на полуоси функции. Умножая левую и правую части тождества на t^l, окончательно получаем

$$z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{1}{\ln^l q^{-1}}+\ldots+(-1)^{l+1}z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{(l-1)!}{\ln q^{-1}}=$$
$$=z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{\ln^l q^{-1}}+\ldots+(-1)^{l+1}z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{(l-1)!}{\ln q^{-1}}+$$
$$+\frac{1}{t}\left[\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{l+1}\chi_{l,k}^i(t)z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-\theta_{l+1}(t,r_k)\right)}{\ln q^{-1}}\right)+\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{i=0}^{l}\alpha_{l,k}^i(t)z^{(i)}\left(\frac{\ln(t-r_k)}{\ln q^{-1}}\right)\right].$$

Параметр l изменяется от 0 до $j+1$, что соответствует необходимой гладкости решения $z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$. Обозначим

$$\vec{z}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)=\left(z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right),\ldots,z^{(j+1)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right)^T,\quad \vec{F}(t,z_u)=\left(F_0(t,z_u),\ldots,F_{j+1}(t,z_u)\right)^T,$$

где

$$F_l(t,z_u)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{l+1}\chi_{l,k}^i(t)z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-\theta_{l+1}(t,r_k)\right)}{\ln q^{-1}}\right)+\sum_{k=1}^{n_0}\sum_{i=0}^{l}\alpha_{l,k}^i(t)z^{(i)}\left(\frac{\ln(t-r_k)}{\ln q^{-1}}\right).$$

В этих обозначениях условия склейки запишутся так:

$$C\vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}-1\right)=C\vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right)+\frac{1}{t_0}\vec{F}(t_0,z_u),$$

где $C\stackrel{\mathrm{df}}{=}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ *&\frac{1}{\ln q^{-1}}&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0\\ *&\cdots&*&\frac{1}{\ln^{j+1}q^{-1}}\end{pmatrix}$ — постоянная нижняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали, или

$$\vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}-1\right)=\vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right)+\frac{1}{t_0}C^{-1}\vec{F}(t_0,z_u). \tag{10}$$

Теперь потребуем, чтобы полином $H(\lambda)$ совпадал с полиномом $\psi(\lambda)$ и $(N-1)$-й его производной в каждой точке $u_\tau-u_0$, где u_τ принимает значения всех аргументов функции $z(u)$ и ее производных в равенстве (10). Если некоторые из этих аргументов совпадают, то мы суммируем количество условий равенства полиномов и их производных во всех совпавших точках, т. е. если $\theta_l(t_0,r_k)=\theta_i(t_0,r_s)$, то в точке $\frac{\ln(t_0-\theta_l(t_0,r_k))}{\ln q^{-1}}-\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}$ полином

$H(\lambda)$ совпадает с полиномом $\psi(\lambda)$ и $(2N-1)$-й его производной. Таким образом, количество условий Эрмита для $H(\lambda)$ остается неизменным и равным $((j+3)n_0+2)N$. Выбор достаточно большого $N \geq j+3$ позволяет утверждать сколь угодно малую равномерную на отрезке $[-1, 0]$ близость полиномов $H(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ вместе с производными до $(j+1)$-го порядка включительно. Более того, эта близость не зависит от расположения запаздываний в данный момент t_0. Полином $G(\lambda)$ строится по тем же условиям Эрмита, что и $H(\lambda)$, за исключением точки -1, где значения $G(\lambda)$ и его производных до $(j+1)$-го порядка включительно уже не совпадают с полиномом $\psi(\lambda)$ и его производными, а задаются правой частью равенства (10), где вместо функций $z^{(i)}(u)$ ставятся функции $\psi^{(i)}(u-u_0)$, т. е. величиной $\vec{\psi}(0) + \dfrac{1}{t_0}\, C^{-1}\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$. Отметим, что неоднородность $\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$ ограничена, а это дает возможность увеличением t_0 сделать сумму $\vec{\psi}(0) + \dfrac{1}{t_0}\, C^{-1}\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$ сколь угодно близкой к величине $\vec{\psi}(0) = \vec{\psi}(-1)$, т. е. изменение $(j+2)$-х условий Эрмита полинома $H(\lambda)$ в точке -1 для полинома $G(\lambda)$ минимально и зависит только от величины t_0. Эти изменения $\dfrac{1}{t_0}\, C^{-1}\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$ будут касаться коэффициентов перед полиномами $H_{ik}(\lambda)$ в формуле полинома Эрмита, которые соответствуют точке -1 и производным от 0- до $(j+1)$-го порядка включительно [5, с. 169]. Полиномы $H_{ik}(\lambda)$ существенно зависят от расположения узлов интерполирования $u_\tau - u_0$ и от того, совпадают они или нет. С ростом t_0 это расположение будет меняться. Но во всех случаях расположения запаздываний коэффициенты полинома $H_{ik}(\lambda)$ стремятся к коэффициентам некоторого предельного полинома при $t_0 \to +\infty$, а следовательно, полиномы $H_{ik}(\lambda)$ и их производные ограничены на отрезке $[-1, 0]$ некоторой константой для всех t_0. Таким образом, так как изменения коэффициентов перед $H_{ik}(\lambda)$ в полиноме $G(\lambda)$ относительно исходных значений в полиноме $H(\lambda)$ равны $\dfrac{1}{t_0}\, C^{-1}\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$ и стремятся к нулю при $t_0 \to +\infty$, то равномерная близость полиномов $G(u-u_0)$, $H(u-u_0)$ и их производных до $(j+1)$-го порядка включительно будет иметь место при достаточно больших t_0 и любых расположениях запаздываний на отрезке $[u_0-1, u_0]$.

Если $\dfrac{b}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}} < 0$, то функциональное уравнение для $y(t)$ имеет вид $y(t) = -y(qt) + g(t)$. После замены переменных $y(t) = z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} z(u) &= -z(u-1) + g\left(e^{u \ln q^{-1}}\right) = \\ &= z(u-2) - g\left(e^{(u-1)\ln q^{-1}}\right) + \\ &\quad + g\left(e^{u \ln q^{-1}}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} z(u-2) + w(u), \quad u \geq u_0 + 1. \end{aligned}$$

Как и раньше, $|g(t)| \leq \dfrac{1}{t}\, W(T, z_0)$, следовательно,

$$\begin{aligned} |w(u)| &\leq \left| g\left(e^{(u-1)\ln q^{-1}}\right)\right| + \left| g\left(e^{u \ln q^{-1}}\right)\right| \leq \\ &\leq \left(q^{u-1} + q^u\right) W(T, z_0). \end{aligned}$$

Используя равенство $z(u) - z(u-2) = w(u)$ и мажоранту для $|w(u)|$, оцениваем разность

$$|z(u+2m) - z(u+2n)| \le |z(u+2m) - z(u+2m-2)| + \ldots + |z(u+2n+2) - z(u+2n)| =$$

$$= |w(u+2m)| + \ldots + |w(u+2n+2)| \le$$

$$\le \left(q^{u+2m} + \ldots + q^{u+2n+2}\right)\left(q^{-1}+1\right) W(T,z_0) \le \frac{q^{u+1+2n}}{1-q}\, W(T,z_0).$$

Отсюда следуют фундаментальность последовательности $z(u+2n)$, существование предела $\lim_{n\to+\infty} z(u+2n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(u)$ и неравенство $|z(u)-\varphi(u)| \le \dfrac{q^{u+1}}{1-q}\, W(T,z_0)$, $u \ge \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1$. Очевидно, что $\varphi(u)$ — периодическая функция с периодом 2, ее непрерывность следует из ограниченности $z'(u)$, а из равенства $z(u) = -z(u-1) + g\left(e^{u \ln q^{-1}}\right)$ вытекает тождество $\varphi(u) \equiv -\varphi(u-1)$. Запишем последнее неравенство в развернутой форме

$$|z(u) - \varphi(u)| \le q^u D_1(T) \max\left\{ \sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}}, \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]} |z(s)|, \ldots, \sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}}, \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]} \left| z^{(m+2)}(s) \right| \right\},$$

$$u \ge \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1,$$

где $D_1(T) \stackrel{\mathrm{df}}{=} D(T)\, \dfrac{q}{1-q}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим для случая $\dfrac{b}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} > 0$ с небольшим изменением. А именно, предельная непрерывная периодическая функция удовлетворяет тождеству $\varphi_z(u) = -\varphi_z(u-1)$, и для доказательства полноты множества предельных периодических функций в пространстве непрерывных периодических функций, удовлетворяющих равенству $\varphi(u) \equiv -\varphi(u-1)$, необходимо в качестве тригонометрического полинома $\psi(u)$ использовать среднее по Чезаро частичных сумм ряда Фурье приближаемой периодической функции. Такой тригонометрический полином будет иметь то же свойство $\psi(u) \equiv -\psi(u-1)$.

Теорема 3 доказана.

В [6] доказана следующая лемма.

Лемма. *Пусть:*

1) $\alpha_D < 0$, $r(t_0) > 0$, $b \ne 0$, *величина* v_1 *определяется из равенства*

$$\frac{b q^{v_1}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} = 1;$$

2) параметры $\{M, j\} \subset N \bigcup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left(\left|b^{-1}\right| + \left|a_1 b^{-1}\right| + \ldots + \left|a_{n_0} b^{-1}\right|\right) q^{-\mathrm{Re}\, v_1 + M} < 1 \quad \textit{и} \quad \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s) + 1\right) \left| b q^{j + \mathrm{Re}\, v_1} \right| < 1.$$

Тогда для $M+j+1$ *раз непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения (4) из условия* $x(t)=o\left(t^{v_1}\right), t\to+\infty$, *следует тождество* $x(t)\equiv 0$.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$x(t)=a_1x(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}x(t-r_{n_0})+b_1x(q_1t)+\ldots+b_{n_1}x(q_{n_1}t)+$$
$$+f_0(x(t-r_1),\ldots,x(t-r_{n_0}),x(q_1t),\ldots,x(q_{n_1}t)), \tag{11}$$

где $\{a_k,b_k\}\subset R$, $0<q_k<1$, $f_0\colon R^{n_0+n_1}\to R$.

Теорема 4. *Пусть:*

1) $\alpha_D<0$, $\beta<0$ *и* $r(t_0)>0$;

2) параметры $v\in R$ *и* $j\in\{0,1,2,\ldots\}$ *удовлетворяют неравенствам* $\beta<v<0$,

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)\left(\left|b_1q_1^{j+v}\right|+\ldots+\left|b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}\right|\right)<1;$$

3) функция f_0 *является непрерывно дифференцируемой* $j+1$ *раз в окрестности начала координат и равна нулю в начале координат вместе со всеми частными производными* 1*-го порядка.*

Тогда существуют константы $0<\delta<\sigma<+\infty$ *такие, что для* j *раз непрерывно дифференцируемых решений* $x(t)$ *уравнения (11), удовлетворяющих условию* $\left|x^{(m)}(\theta)\right|\le\le\delta$, $\theta\in[r(t_0),t_0]$, $m=\overline{0,j}$, *справедлива оценка* $\max\left\{|x(t)|,|x'(t)|,\ldots,\left|x^{(j)}(t)\right|\right\}\le\sigma t^v$ *при любом* $t\in[r(t_0),+\infty)$.

Доказательство. Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (11) j раз, получаем $j+1$ уравнение

$$x^{(m)}(t)=a_1x^{(m)}(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}x^{(m)}(t-r_{n_0})+$$
$$+b_1q_1^mx^{(m)}(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^mx^{(m)}(q_{n_1}t)+$$
$$+f_m(x(t-r_k),\ldots,x^{(m)}(t-r_k),\ldots,x(q_kt),\ldots,x^{(m)}(q_kt)),\quad m=\overline{0,j}.$$

Из третьего условия теоремы следует, что все функции f_m, $m=\overline{0,j}$, непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и равны нулю вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка в начале координат.

Выполняя замену переменных $x(t)=t^vy(t)$, получаем уравнения

$$y^{(m)}(t)=a_1y^{(m)}(t-r_1)+\ldots+a_{n_0}y^{(m)}(t-r_{n_0})+b_1q_1^{v+m}y^{(m)}(q_1t)+\ldots$$
$$\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{v+m}y^{(m)}(q_{n_1}t)+F_m(t,v,y(t-r_k),\ldots$$
$$\ldots,y^{(m)}(t-r_k),\ldots,y(q_kt),\ldots,y^{(m)}(q_kt)),\quad m=\overline{0,j},$$

где F_m — некоторые непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам функции. Для краткости обозначим $(m+1)(n_0+n_1)\overset{\text{df}}{=}N_m$. Принимая во внимание условия теоремы и вид функций F_m, можно показать, что для любых $t\in[t_0,+\infty)$, $\left\{z_i,u_i,i=\overline{1,N_m}\right\}\subset\subset R\colon\ \max\left\{|z_i|,|u_i|,i=\overline{1,N_m}\right\}\le\sigma$ выполняется неравенство

$$|F_m(t,v,z_1,\ldots,z_{N_m}) - F_m(t,v,u_1,\ldots,u_{N_m})| \le l_m(t_0,\sigma)\sum_{i=1}^{N_m}|z_i-u_i|, \tag{12}$$

где $l_m(t_0,\sigma)\to 0$ при $t_0\to+\infty$, $\sigma\to 0$, $m=\overline{0,j}$.

Запишем уравнение для $y^{(m)}(t)$, $m=\overline{0,j-1}$, следующим образом:

$$y^{(m)}(t) = \frac{b_1q_1^{v+m}y^{(m)}(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{v+m}y^{(m)}(q_{n_1}t)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}+$$
$$+\frac{a_1\left(y^{(m)}(t-r_1)-y^{(m)}(t)\right)+\ldots+a_{n_0}\left(y^{(m)}(t-r_{n_0})-y^{(m)}(t)\right)}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}+$$
$$+\frac{1}{1-a_1-\ldots-a_{n_0}}F_m\left(t,v,y(t-r_k),\ldots,y^{(m)}(t-r_k),\ldots,y(q_kt),\ldots,y^{(m)}(q_kt)\right). \tag{13}$$

Уравнение для $y^{(j)}(t)$ запишем в интегральной форме

$$y^{(j)}(t) = -a_1\int\limits_{t_0-r_1}^{t_0}[d_\theta Y(t-\theta-r_1)]\,y^{(j)}(\theta)-\ldots-a_{n_0}\int\limits_{t_0-r_{n_0}}^{t_0}[d_\theta Y(t-\theta-r_{n_0})]\,y^{(j)}(\theta)-$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t}[d_\theta Y(t-\theta)]\left(b_1q_1^{j+v}y^{(j)}(q_1\theta)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}y^{(j)}(q_{n_1}\theta)\right)+$$
$$+b_1q_1^{j+v}y^{(j)}(q_1t)+\ldots+b_{n_1}q_{n_1}^{j+v}y^{(j)}(q_{n_1}t)-$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t}[d_\theta Y(t-\theta)]\,F_j\left(\theta,v,y(\theta-r_k),\ldots,y^{(j)}(\theta-r_k),\ldots,y(q_k\theta),\ldots,y^{(j)}(q_k\theta)\right)+$$
$$+F_j\left(t,v,y(t-r_k),\ldots,y^{(j)}(t-r_k),\ldots,y(q_kt),\ldots,y^{(j)}(q_kt)\right). \tag{14}$$

Положим

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Y(s)+1\right)\left(|b_1|q_1^{j+v}+\ldots+|b_{n_1}|q_{n_1}^{j+v}\right)=1-\varepsilon<1 \tag{15}$$

и выберем числа c_m, $m=\overline{0,j}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$c_j\overset{\mathrm{df}}{=}1<c_{j-1}<c_{j-2}<\ldots<c_0<+\infty,$$
$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}Z_{v+m}(s)+1\right)\frac{|a_1|r_1+\ldots+|a_{n_0}|r_{n_0}}{|1-a_1-\ldots-a_{n_0}|}\,\frac{c_{m+1}}{c_m}\le\frac14 \tag{16}$$

при $m = \overline{0, j-1}$. Определим величины $t_0 > 0$ и $\sigma > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+m}(s)+1\right)\frac{l_m\left(t_0, c_0\sigma\right)}{|1-a_1-\ldots-a_{n_0}|}(n_0+n_1)(c_0+\ldots+c_m)\frac{1}{c_m}\leq\frac{1}{4} \tag{17}$$

при $m = \overline{0, j-1}$,

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s)+1\right) l_j(t_0, c_0\sigma)(n_0+n_1)(c_0+\ldots+c_j)\frac{1}{c_j}\leq\frac{\varepsilon}{3}. \tag{18}$$

Пусть $\left|y^{(m)}(\theta)\right| \leq \delta$ для любого $\theta \in [r(t_0), t_0]$, $m = \overline{0, j}$, где δ выберем меньшим σ и таким, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{\left|1-\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|}\sum_{k=1}^{n_1}|b_k|q_k^{v+m}\sup_{t\geq t_0}\operatorname*{var}_{s\in[\ln t-\ln t_0+\ln q, \ln t-\ln t_0]} Z_{v+m}(s)\frac{\delta}{\sigma}\leq\frac{1}{4} \tag{19}$$

при $m = \overline{0, j-1}$,

$$(|a_1|+\ldots+|a_n|)\sup_{t\geq t_0}\operatorname*{var}_{s\in[t-t_0-r, t-t_0]} Y(s)\frac{\delta}{\sigma}\leq\frac{\varepsilon}{3}. \tag{20}$$

Тогда для некоторого $T > t_0$ выполняются неравенства

$$\left|y^{(m)}(t)\right| < c_m\sigma, \quad m = \overline{0, j}, \quad t \in [r(t_0), T). \tag{21}$$

Если $T = +\infty$, то нужное утверждение доказано. Предположим, что это не так, и пусть T — конечный и первый момент времени, когда хотя бы одно неравенство становится равенством. Оценим $\left|y^{(j)}(t)\right|$ на отрезке $[t_0, T)$, использовав уравнение (14), с учетом условий (12), (15), (18), (20), (21):

$$\begin{aligned}\left|y^{(j)}(t)\right| \leq{}& \Bigg[(|a_1|+\ldots+|a_n|)\sup_{t\geq t_0}\operatorname*{var}_{s\in[t-t_0-r, t-t_0]} Y(s)\,\frac{\delta}{\sigma}+\\ &+\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s)+1\right)\left(|b_1|q_1^{j+v}+\ldots+|b_{n_1}|q_{n_1}^{j+v}\right)+\\ &+\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Y(s)+1\right) l_j(t_0, c_0\sigma)(n_0+n_1)(c_0+\ldots+c_j)\,\frac{1}{c_j}\Bigg]c_j\sigma\leq\\ \leq{}&\left[\frac{\varepsilon}{3}+1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\right]c_j\sigma=\left[1-\frac{\varepsilon}{3}\right]c_j\sigma, \quad t\in[t_0, T).\end{aligned}$$

Запишем уравнение (13) для $y^{(m)}(t)$, $m=\overline{0,j-1}$, с помощью теоремы Лагранжа в форме

$$y^{(m)}(t) = \frac{b_1 q_1^{v+m} y^{(m)}(q_1 t) + \ldots + b_{n_1} q_{n_1}^{v+m} y^{(m)}(q_{n_1} t)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} -$$

$$- \frac{a_1 y^{(m+1)}(t-\theta_{1,m}(t) r_1) r_1 + \ldots + a_{n_0} y^{(m+1)}\left(t-\theta_{n_0,m}(t) r_{n_0}\right) r_{n_0}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} +$$

$$+ \frac{1}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}\, F_m\left(t, v, y(t-r_k), \ldots, y^{(m)}(t-r_k), \ldots, y(q_k t), \ldots, y^{(m)}(q_k t)\right),$$

где $0 < \theta_{k,m}(t) < 1$, $k=\overline{1,n_0}$. Учитывая (12) и (21), оцениваем на отрезке $[t_0, T)$ неоднородность

$$\Bigg| - \frac{a_1 y^{(m+1)}(t-\theta_{1,m}(t) r_1) r_1 + \ldots + a_{n_0} y^{(m+1)}(t-\theta_{n_0,m}(t) r_{n_0}) r_{n_0}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} +$$

$$+ \frac{1}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}\, F_m\left(t, v, y(t-r_k), \ldots, y^{(m)}(t-r_k), \ldots, y(q_k t), \ldots, y^{(m)}(q_k t)\right)\Bigg| \le$$

$$\le \frac{|a_1| r_1 + \ldots + |a_{n_0}| r_{n_0}}{|1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}|}\, c_{m+1}\sigma +$$

$$+ \frac{l_m(t_0, c_0\sigma)}{|1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}|}\,(n_0+n_1)(c_0 + \ldots + c_m)\,\sigma.$$

С помощью рассуждений, которые применялись при доказательстве теоремы 1, условий (16), (17), (19), (21) и последнего неравенства для неоднородности получаем оценку

$$\left|y^{(m)}(t)\right| \le \Bigg[\frac{1}{\left|1 - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|} \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| q_k^{v+m} \sup_{t \ge t_0} \operatorname*{var}_{s \in [\ln t - \ln t_0 + \ln q, \ln t - \ln t_0]} Z_{v+m}(s)\, \frac{\delta}{\sigma} +$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+m}(s) + 1\right) \frac{|a_1| r_1 + \ldots + |a_{n_0}| r_{n_0}}{|1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}|}\, \frac{c_{m+1}}{c_m} +$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+m}(s) + 1\right) \frac{l_m(t_0, c_0\sigma)}{|1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}|}\,(n_0+n_1)\,(c_0 + \ldots + c_m) \frac{1}{c_m}\Bigg]\, c_m\sigma \le$$

$$\le \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] c_m\sigma = \frac{3}{4}\, c_m\sigma \quad \forall t \in [t_0, T).$$

Итак, мы показали, что $\left|y^{(m)}(T)\right| < c_m\sigma$, $m=\overline{0,j}$. Но это противоречит предположению относительно T. Поэтому $T=+\infty$ и $\left|y^{(m)}(t)\right| < c_m\sigma$, $m=\overline{0,j}$, для любого $t \in [r(t_0), +\infty)$.

В приведенных рассуждениях t_0 является переменной величиной, а по условию теоремы эта величина должна быть фиксирована. Однако с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, можно показать, что для любых $t_1 > 0$, $\eta > 0$ существует константа $0 < \gamma < \eta$ такая, что из условия $\left|x^{(m)}(\theta)\right| \leq \gamma$ при любом $\theta \in [r(t_1), t_1]$, $m = \overline{0, j}$, следует оценка $\left|x^{(m)}(t)\right| \leq \eta$ при $t \in [r(t_1), +\infty)$, $m = \overline{0, j}$.

Теорема 4 доказана.

Литература

1. *Mahler K.* On a special functional equation // J. London Math. Soc. — 1940. — **15**. — P. 115 – 123.
2. *Бельский Д. В., Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений одного дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 291 – 313.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
4. *de Bruijn N. G.* The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations // Amer. J. Math. — 1949. — **71**, № 2. — P. 313 – 330.
5. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1962. — Т. 1. — 464 с.
6. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 466 – 493.

Получено 18.12.14,
после доработки — 05.08.16