УДК 517.956

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, А. О. Широковських

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
e-mail: alfaolga1@gmail.com

We prove correct solvability of a nonlocal time multipoint problem for an evolution equations with infinite order Bessel operators and a boundary condition in a W'-type space of distributions.

Доказана корректная разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с операторами Бесселя бесконечного порядка и граничным условием в пространстве обобщенных функций типа W'.

Диференціальні рівняння, які містять коефіцієнти, необмежені в деякій області з $\mathbb{R}^n$, відносяться, як відомо, до сингулярних диференціальних рівнянь. До сингулярних рівнянь відносяться й еволюційні рівняння параболічного типу з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$ (B-параболічні рівняння) через наявність у його структурі виразу $1/x$. Такі рівняння вироджуються на межі області і за внутрішніми властивостями близькі до рівномірно параболічних рівнянь. Рівняння з оператором Бесселя виникають при вивченні температурних полів у симетричних середовищах, використовуються при побудові математичних моделей дифузійних процесів у анізотропних середовищах, описують явища тепломасообміну, радіальні коливання хвиль, зустрічаються у кристалографії, гідродинаміці, в задачах про взаємодію тіл тощо.

Як відомо, оператор Бесселя можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu\varphi = F^{-1}_{B_\nu}[-\sigma^2 F_{B_\nu}[\varphi]]$, де F_{B_ν} — перетворення Бесселя, φ — елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. Отже, оператор Бесселя належить до класу псевдодиференціальних операторів вигляду $A = F^{-1}_{B_{\nu,\sigma\to x}}[a(t,\sigma)F_{B_{\nu,x\to\sigma}}]$, породжених перетвореннями Бесселя F_{B_ν}, $F^{-1}_{B_\nu}$. Якщо символ a оператора A є цілою функцією аргументу σ вигляду $a(t,\sigma) = P(t,\sigma)$, де P — поліном змінної σ при фіксованому t, що задовольняє умову „параболічності”, то еволюційне рівняння $\partial u/\partial t = Au$ із вказаним оператором відноситься до B-параболічних рівнянь, уведених М. І. Матійчуком і В. В. Крехівським [1].

Теорію класичних розв'язків задачі Коші для B-параболічних рівнянь побудовано у працях М. І. Матійчука, В. В. Крехівського, С. Д. Івасишена і В. П. Лавренчука, І. І. Веренич та ін. Задача Коші для таких рівнянь з початковими даними із просторів узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів вивчалася Я. І. Житомирським, В. В. Городецьким, І. В. Житарюком, В. П. Лавренчуком, О. В. Мартинюк, В. А. Літовченком та ін. [2–5].

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для B-параболічних рівнянь зі сталими або залежними лише від часової змінної коефіцієнтами часто використовуються простори типу W, введені Б. Л. Гуревичем в [6] (див. також [7, с. 17, 18]). Вони є узагальненнями основних просторів K_p, Z^p, Z^p_p, введених І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим у [8, с. 112 – 126, 261] із заміною степеневих функцій довільними опуклими. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ [8]. Зазначимо, що у працях [9, 10] досліджуються властивості перетворення Ганкеля функцій із просторів типу S_α^β, введених в [8], які при $\{\alpha, \beta\} \in (0,1)$ збігаються з певними просторами типу W. У статті [11] досліджено властивості перетворення Фур'є – Бесселя, визначені на парних функціях з просторів типу W. Працю [12] присвячено перетворенню Фур'є – Стільтьєса у різних підпросторах просторів типу S. У [13, 14] досліджено властивості перетворення Фур'є дробового порядку та узагальненого перетворення Фур'є зі спеціальним ядром у просторах типу W.

Простори типу W є природним середовищем для дослідження задачі Коші для B-параболічних рівнянь. Наприклад, для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

з оператором Бесселя фундаментальний розв'язок задачі Коші — функція $G(t,x) = 2^{-\nu}\Gamma^{-1}(\nu+1)(2t)^{-(\nu+1)}\exp\{-x^2/(4t)\}$ при кожному $t > 0$, як функція x, є елементом простору $W_{x^2}^{y^2}$, який відноситься до просторів типу W (про функцію $G(t,\cdot)$ див. у праці [2]). У працях [3 – 5, 15] встановлено, що простори типу W' — простори, топологічно спряжені з просторами типу W, — збігаються з множинами початкових даних задачі Коші для еволюційних рівнянь з операторами Бесселя скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями просторових змінних.

Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача з умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \tag{1}$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ — фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (теорія фізики плазми, ядерні реакції, поширення електромагнітних хвиль, демографічні дослідження, задачі математичної біології, див., наприклад, [16, 17]).

Дослідженнями нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (див., наприклад, [18 – 22]). Одержано важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, вивчено питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовано умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння $\partial u/\partial t = A_f u$ в просторах типу W та W', де A_f — псевдодиференціальний оператор вигляду $F_{B_\nu}^{-1}[f(\sigma)F_{B_\nu}]$ з аналітичним символом, який можна також розуміти як оператор

Бесселя „нескінченного порядку”:

$$A_f = F_{B_\nu}^{-1}[f(\sigma)F_{B_\nu}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k.$$

Тут функція f — символ оператора A_f — задовольняє певні умови, які узагальнюють відому умову „параболічності” для B-параболічних рівнянь. Такий підхід дозволяє розширити клас сингулярних еволюційних рівнянь параболічного типу, для яких мають місце результати, близькі до встановлених у випадку задачі Коші для B-параболічних рівнянь. Умова (1) трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція з певного простору типу W'. Досліджено властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначеного рівняння, доведено коректну розв'язність задачі у відповідних просторах, знайдено аналітичне зображення розв'язку.

1. Простори типу W та W'. Розглянемо функцію $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, яка є неперервною і зростаючою, причому $\omega(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\omega(x) = +\infty$. Для $x \geq 0$ покладемо $\Omega(x) = \int_0^x \omega(\xi)d\xi$. Функція Ω має такі властивості: 1) Ω є диференційовною, зростаючою на $[0,+\infty)$ функцією, причому $\Omega(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\Omega(x) = +\infty$; 2) Ω — опукла донизу на $[0,+\infty)$ функція, тобто [7, c. 7, 8]

$$\forall\{x_1, x_2\} \subset [0,+\infty)\colon\ \ \Omega(x_1) + \Omega(x_2) \leq \Omega(x_1 + x_2).$$

На проміжок $(-\infty, 0]$ функцію Ω продовжимо парним чином. Поряд із функцією ω розглянемо функцію $\mu\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, яка має такі ж властивості, як і функція ω. Для $x \geq 0$ покладемо $M(x) = \int_0^x \mu(\xi)d\xi$, $M(-x) = M(x)$. Функція M за своїми властивостями аналогічна функції Ω. За допомогою функцій M і Ω Б. Л. Гуревич увів серію просторів, названих ним просторами типу W [6] (див. також [7, c. 7–18]). Означимо деякі з них.

Символом W_M^Ω позначається сукупність цілих функцій $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists c, a, b > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\colon |\varphi(z)| \leq c\exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}. \tag{2}$$

W_M^Ω можна подати як об'єднання зліченно-нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, де $W_{M,a}^{\Omega,b}$ складається з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких виконуються нерівності $|\varphi(x+iy)| \leq c\exp\{-M(\overline{a}x)+$ $+\Omega(\overline{b}y)\}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, де $\overline{a}$ — довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ — довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}}[|\varphi(z)|\exp\{-\Omega((b+\rho)y) + M(a(1-\delta)x)\}],$$

$$\delta \in \{1/n, n \geq 2\}, \quad \rho \in \mathbb{N},$$

то $W_{M,a}^{\Omega,b}$ з цими нормами стає повним досконалим зліченно-нормованим простором.

Простори W_M^Ω нетривіальні тоді й лише тоді, коли виконується умова [23]

$$\exists d > 0\, \exists c_0 > 0 \quad \exists x_0 \in (0,+\infty) \quad \forall x \geq x_0\colon\ \ \Omega(x) \geq c_0 M(dx).$$

Збіжність в W_M^Ω визначається так [7, с. 16]: послідовність $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається в W_M^Ω до нуля тоді і тільки тоді, коли вона: 1) правильно збігається до нуля; 2) є обмеженою. Послідовність $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset W_M^\Omega$ правильно збігається до нуля в W_M^Ω, якщо вона рівномірно збігається до нуля на кожній обмеженій множині $Q \subset \mathbb{C}$. Множина $A \subset W_M^\Omega$ називається обмеженою, якщо $A \subset W_{M,a}^{\Omega,b}$ з деякими a, $b > 0$ і для всіх функцій $\varphi \in A$ виконується оцінка $|\varphi(z)| \leq c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$ із одними й тими ж сталими $a, b > 0$.

Зазначимо, що якщо $M(x) = x^{1/\alpha}, 0 < \alpha < 1, x \in [0, +\infty), \Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}, 0 < \beta < 1$, $y \in [0, +\infty)$ і $\alpha + \beta \geq 1$, то $W_M^\Omega = S_\alpha^\beta$ (про простори типу S див. у [8, с. 203–210]).

Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ і як функції комплексної змінної є елементами простору W_M^Ω, позначатимемо символом $W_M^\Omega(\mathbb{R})$.

У праці [24] встановлено, що означення (2) простору W_M^Ω рівносильне такому:

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow \Bigg(\exists c_1, a_1, b_1 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists \mu_k \in [0, k), \mu_0 = 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \exists \rho_n \in [0, n), \ \ \rho_0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$\left| x^k \varphi^{(n)}(x) \right| \leq c_1 n! \left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n \left(\frac{\mu_k}{a_1}\right)^k \exp\{\Omega(\rho_n) - M(\mu_k)\}\Bigg), \tag{A}$$

де ρ_n — розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, μ_k — розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ $\left(\text{тут вважається, що } \left(\frac{b_1}{\rho_0}\right)^0 = 1, \left(\frac{\mu_0}{a_1}\right)^0 = 1\right)$, або

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow \Bigg(\exists\, c_1, a_1, b_1 > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \exists \rho_n \in [0, n), \rho_0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq c_1 \left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n n! \exp\{-M(a_1 x) + \Omega(\rho_n)\}\Bigg). \tag{B}$$

Із урахуванням (B) у просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R})$ збіжність вводиться так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq$ $\geq 1\} \subset W_M^\Omega(\mathbb{R})$ збігається до нуля в $W_M^\Omega(\mathbb{R})$, якщо при довільному $n \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно при $\nu \to +\infty$ на довільному проміжку $[c, d] \subset$ $\subset \mathbb{R}$; для функцій $\varphi_\nu^{(n)}(x)$ виконуються нерівності (B) зі сталими c_1, a_1, $b_1 > 0$, не залежними від ν.

Символом $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ позначатимемо сукупність усіх цілих парних функцій із простору W_M^Ω. Цей простір із відповідною топологією називатимемо основним простором або простором типу $\overset{\circ}{W}$, а його елементи — основними функціями.

Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження в усю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами простору $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$, позначатимемо символом $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Нехай P — деякий фіксований многочлен. Тоді у просторі W_M^Ω визначена і неперервна операція множення на $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$ (зокрема, операція множення на незалежну змінну z) [7, с. 22], а у просторах $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$, $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ — на $P(z^2)$ та $P(x^2)$ відповідно.

Функція g називається мультиплікатором у просторі W_M^Ω, якщо $g\psi \in W_M^\Omega$ для довільної функції $\psi \in W_M^\Omega$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з W_M^Ω в W_M^Ω. Мультиплікатором у просторі W_M^Ω є кожна ціла однозначна функція $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка задовольняє умову [7, с. 25]

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\colon |g(z)| \le c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}. \tag{3}$$

Кожна ціла парна функція, яка задовольняє умову (3), є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$, а її звуження на $\mathbb{R}$ — мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$. Наприклад, нормована функція Бесселя $j_\nu(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\nu > -1/2$, є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ (див. [4]), а $j_\nu(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Із результатів, отриманих у [4], випливає, що у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ визначений і є неперервним оператор Бесселя

$$B_{\nu,z} := \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2\nu+1}{z}\frac{d}{dz}, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

У просторі ж $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ визначений і неперервний оператор Бесселя B_ν, який відповідає дійсній змінній x.

Нехай функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ визначаються за допомогою функцій $\mu(\xi)$ та $\omega(\eta)$ відповідно. Якщо функції μ та ω взаємно обернені, тобто $\mu(\omega(\eta)) = \eta$, $\omega(\mu(\xi)) = \xi$, то функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ називаються двоїстими за Юнгом. У цьому випадку має місце нерівність Юнга

$$\forall x \in [0,\infty) \ \forall y \in [0,\infty)\colon xy \le M(x) + \Omega(y).$$

Якщо для заданого $x \in [0,\infty)$ взяти $y = \mu(x)$, то нерівність Юнга для таких x та y перетворюється в рівність. Прикладами взаємно двоїстих функцій є такі функції:

$$M(x) = \frac{x^p}{p}, \quad \Omega(y) = \frac{y^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$M(x) = (x+1)\ln(x+1) - x, \quad \Omega(y) = e^y - y - 1.$$

У просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ за певних умов визначено оператор Бесселя нескінченного порядку. Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_{2n} z^{2n}$ — деяка ціла парна функція. У просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ задано оператор Бесселя нескінченного порядку

$$f(B_{\nu,z}) := \sum_{n=0}^\infty c_{2n}(-B_{\nu,z})^n,$$

якщо для довільної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(-1)^n (B^n_{\nu,z}\varphi)(z) := (f(B_{\nu,z})\varphi)(z)$$

зображує деяку основну функцію з простору $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$. Якщо f — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$, то, як доведено в [4], оператор $f(B_{\nu,z})$ визначений у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$ і є неперервним. Нехай A_f — звуження оператора $f(B_{\nu,z})$ на простір $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$. Тоді для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ правильною є рівність [4]

$$(A_f\varphi)(x) = F_B^{-1}[f(\xi)F_B[\varphi](\xi)](x), \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}.$$

Тут F_B — перетворення Бесселя, яке визначене на $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ [4]:

$$\psi(\sigma) \equiv F_B[\varphi](\sigma) := \int_0^{\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}).$$

Простори типу $\overset{\circ}{W}(\mathbb{R})$ перетворенням Бесселя відображаються на простори типу $\overset{\circ}{W}(\mathbb{R})$, а саме [4], $F_B[\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})] = \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, оператори F_B, F_B^{-1} є неперервними,

$$F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int_0^{\infty} \psi(\sigma) j_\nu(x\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \quad c_\nu = \left(2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)\right)^{-1}, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

— фіксований параметр, Γ — гамма-функція. Отже, A_f можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за аналітичним символом f. Зокрема,

$$B_\nu = F_B^{-1}\left[-\sigma^2 F_B\right].$$

У просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ визначений і є неперервним оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ [25], який відповідає оператору Бесселя

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^{\pi} \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos 2\omega}) \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}),$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, $\nu > -1/2$. Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi\varphi$ диференційовна у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, тобто граничне співвідношення $\left(T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi - T_x^\xi\varphi\right)(\Delta\xi)^{-1} \to \dfrac{\partial}{\partial\xi} T_x^\xi\varphi$, $\Delta\xi \to 0$, справджується у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ [4].

Згортка двох функцій із простору $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ визначається формулою

$$(\varphi * \psi) = \int_0^{\infty} T_x^{\xi}\varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \quad \{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R}).$$

У просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ правильною є формула $F_B[\varphi * \psi] = F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi]$, при цьому простори $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ утворюють топологічні алгебри відносно звичайного множення функцій та операції згортки основних функцій.

Символом $\left(\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Оскільки у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ визначено операцію узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$ з основною функцією φ задамо формулою $(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^{\xi}\varphi(x)\rangle = \langle f_\xi, T_\xi^{x}\varphi(\xi)\rangle$ (f_ξ позначає дію функціонала f на основну функцію за змінною ξ).

Якщо $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$ і $f * \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ і зі співвідношення $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ випливає, що $f * \varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$ визначається як узагальнена функція, задана на просторі $\overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$:

$$\langle F_B[f], \varphi\rangle = \langle f, F_B[\varphi]\rangle \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}).$$

У статті [4] доведено таке твердження: якщо узагальнена функція $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$ — згортувач у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ правильною є формула $F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi]$, при цьому $F_B[f]$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

2. Нелокальна багатоточкова за часом задача. Символом $\overset{\circ}{P}{}_M^{\Omega}$ позначатимемо клас цілих парних однозначних функцій $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами у просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}$ і такими, що $e^f \in \overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}$.

Наприклад, нехай $f(z) = P(z)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, — парний поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову

$$\exists\, c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\colon \operatorname{Re} P(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Очевидно, що P — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{W}{}_{M}^{\Omega}$. Крім того,

$$\left|e^{P(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}P(x)} \le e^{-c|x|^{2b}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\exists c_1 > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\colon \left|e^{P(z)}\right| \le e^{|P(z)|} \le e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді, скориставшись рядом теорем з [8, с. 246 – 249], які є узагальненнями теореми Фрагмена – Ліндельофа, одержимо, що функція $e^{P(z)}$ у комплексній площині $\mathbb{C}$ задовольняє також нерівність

$$|e^{P(z)}| \le c_0 e^{-c_2|x|^{2b}+c_3|y|^{2b}}, \quad c_0 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0,$$

тобто $e^P \in \overset{\circ}{W}{}_{M}^{\Omega}$, де $M(x) = x^{2b}$, $\Omega(y) = y^{2b}$.

Вказану умову задовольняє також кожна ціла парна функція f, для якої $\mathrm{Re}\, f(z) \le \le -M(ax) + \Omega(by)$.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_f u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \tag{4}$$

де A_f — псевдодиференціальний оператор (оператор Бесселя нескінченного порядку), розглянутий в п. 1, який діє в просторі $\overset{\circ}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Для (4) задамо багатоточкову нелокальну за часом задачу

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{5}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$, — фіксовані числа, причому $\mu > m \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ (тут Ω_1 та M_1 — функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω). Класичний розв'язок $u \in C^1((0, T], \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))$ задачі (4), (5) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя у вигляді

$$u(t, x) = F_B^{-1}[v(t, \sigma)](x), \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}.$$

Для функції $v\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} = f(\sigma) v(t, \sigma), \quad (t, \sigma) \in \Pi_T, \tag{6}$$

$$\mu v(t, \sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t, \sigma)|_{t=t_k} = \tilde{\varphi}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $\tilde{\varphi}(\sigma) := F_B[\varphi](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (6) зображується у вигляді

$$v(t, \sigma) = c \exp\{t f(\sigma)\}, \quad (t, \sigma) \in \Pi_T, \tag{8}$$

де $c = c(\sigma)$ визначається з умови (7). Підставляючи (8) у (7), отримуємо

$$c = \tilde{\varphi}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k f(\sigma)\}\right), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

$$v(t,\sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma)\exp\{tf(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k f(\sigma)\}\right)^{-1}, \quad (t,\sigma) \in \Pi_T.$$

Отже, розв'язок задачі (4), (5) має вигляд

$$u(t,x) = c_\nu \int_0^\infty v(t,\sigma) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma, \quad (t,x) \in \Pi_T.$$

Введемо позначення $G(t,x) := F_B^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, де

$$Q(t,\sigma) = \exp\{tf(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k f(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, маємо

$$u(t,x) = \int_0^\infty T_x^\xi G(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi = G(t,x) * \varphi(x), \quad (t,x) \in \Pi_T.$$

Справді,

$$u(t,x) = c_\nu \int_0^\infty Q(t,\sigma)\left(\int_0^\infty \varphi(\xi) j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi\right) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Оскільки $j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x) = T_x^\xi j_\nu(\sigma x)$ [25], то

$$u(t,x) = \int_0^\infty \left(c_\nu \int_0^\infty Q(t,\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma\right)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= \int_0^\infty T_x^\xi G(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi = G(t,x) * \varphi(x), \quad (t,x) \in \Pi_T. \qquad (9)$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а отже правильність формули (9), випливають з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції Q як функції аргументу x.

Лема 1. *Нехай* $f \in \overset{\circ}{P}{}^{\Omega}_{M}$. *Функція* $Q_1(t,z) = \exp\{tf(z)\}$, $t \in (0,T]$, $z \in \mathbb{C}$, *при фіксованому* $t \in (0,T]$, *як функція аргументу* z, *належить до простору* $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$. *Існують сталі* c, $a, b > 0$ *такі, що для її похідних на* $\mathbb{R}$ *правильними є оцінки*

$$|D_x^{2n} Q_1(t,x)| \leq c \left(\frac{\tilde{b}e}{\rho_{2n}}\right)^{2n} (2n)! e^{-tM(ax)} \leq c \left(\frac{\tilde{b}e}{\rho_{2n}}\right)^{2n} (2n)! e^{-M(\tilde{a}x)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

де $\tilde{a} = a\{t\}$, $\tilde{b} = \max\{b, bT\}$, ρ_{2n} — *розв'язок рівняння* $x\omega(x) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ (ω — *функція, за якою будується функція* Ω).

Доведення. Оскільки $f \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$, то існують такі числа $c_0, a, b > 0$, що

$$\left|e^{f(z)}\right| \leq c_0 e^{-M(ax)+\Omega(by)}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$\left|e^{tf(z)}\right| = \left|e^{f(z)}\right|^t \leq \left[c_0 e^{-M(ax)+\Omega(by)}\right]^t \leq c e^{-tM(ax)+t\Omega(by)}, \quad c = \max\left\{1, c_0^T\right\}. \tag{11}$$

Із нерівності (11) випливає, що $Q_1(t,\cdot)$ належить $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$ при кожному $t \in (0,T]$. Для доведення цього факту скористаємося тим, що для функції Ω справджуються нерівності: а) $\forall\, \alpha \geq 1 \ \ \forall x \in [0,+\infty)\colon \Omega(\alpha x) \geq \alpha\Omega(x)$; б) $\forall\, \alpha \in (0,1) \ \ \forall x \in [0,\infty)\colon \Omega(\alpha x) \leq \alpha\Omega(x)$. Ці властивості випливають з рівності

$$\Omega(\alpha x) = \alpha \int\limits_0^x \omega(\alpha\xi) d\xi, \quad x \geq 0,$$

яка виконується для довільного $\alpha > 0$, з урахуванням монотонного зростання ω на $[0,+\infty)$. Аналогічні властивості справджуються для функції M. Отже, при фіксованому $t \in (0,1)$

$$-tM(ax) \leq -M(tax), \quad e^{-tM(ax)+t\Omega(by)} \leq e^{-M(tax)+\Omega(tby)} \leq e^{-M(a_1x)+\Omega(by)}, \quad a_1 = at.$$

Якщо $t > 1$, то $t = [t] + \{t\}$. Тоді

$$e^{-tM(ax)} = e^{-[t]M(ax)} e^{-\{t\}M(ax)} \leq e^{-\{t\}M(ax)} \leq e^{-M(a_2x)}, \quad a_2 = a\{t\},$$

$$e^{t\Omega(by)} \leq e^{\Omega(bty)} = e^{\Omega(b_1y)}, \quad b_1 = bt.$$

Таким чином,

$$|Q_1(t,z)| \leq c e^{-M(a_2x)+\Omega(b_1y)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad t > 1.$$

Нехай $\tilde{a} = \min\{at, a\{t\}\} = a\{t\}$, $\tilde{b} = \max\{b, bT\}$, $t \in (0,T]$. Тоді при фіксованому $t \in (0,T]$ справджується нерівність

$$|Q_1(t,z)| \leq c e^{-M(\tilde{a}x)+\Omega(\tilde{b}y)}, \tag{12}$$

звідки й випливає, що $Q_1(t, \cdot)$ належить $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$.

Доведемо тепер правильність оцінок (10). Внаслідок інтегральної формули Коші

$$D_x^{2n} Q_1(t,x) = \frac{(2n)!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t,z)}{(z-x)^{2n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $x \in \mathbb{R}$. Скориставшись (12), прийдемо до нерівностей

$$\left|D_x^{2n} Q_1(t,x)\right| \leq c\, \frac{(2n)!}{R^{2n}} \max_{z \in \Gamma_R} |Q_1(t,z)| \leq c\, \frac{(2n)!}{R^{2n}}\, e^{-M(\tilde{a}x_0) + \Omega(\tilde{b}R)},$$

де x_0 — точка максимуму функції $\exp\{-M(\tilde{a}\xi)\}$, $\xi \in [x-R, x+R]$. Оскільки M — парна на $\mathbb{R}$ функція, яка зростає на проміжку $[0, +\infty)$, то $x_0 = x + \theta R$, де $\theta \in \{-1, 0, 1\}$. Врахувавши опуклість функції M, отримаємо

$$\left|D_x^{2n} Q_1(t,x)\right| \leq c\, \frac{(2n)!}{R^{2n}}\, e^{-M(\tilde{a}x) - M(\tilde{a}\theta T)} e^{\Omega(\tilde{b}R)}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_n(R) = R^{-2n} \exp\{\Omega(\tilde{b}R)\}$ є диференційовною, причому

$$\lim_{R \to +\infty} g_n(R) = +\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \lim_{R \to +0} g_n(R) = \begin{cases} +\infty, & n \in \mathbb{N}, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_n(R) > 0$, $R \in (0, +\infty)$, то дана функція досягає свого інфімуму, який знайдемо за допомогою методів диференціального числення:

$$g_n'(R) = R^{-(2n+1)}(\tilde{b}R\Omega'(\tilde{b}R) - 2n)e^{\Omega(\tilde{b}R)} = R^{-(2n+1)}(\tilde{b}R\omega(\tilde{b}R) - 2n)e^{\Omega(\tilde{b}R)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

(тут ω — функція, за якою будується функція Ω). Прирівнявши $g_n'(R)$ до нуля, дістанемо $\tilde{b}R\omega(\tilde{b}R) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Безпосередньо переконуємося в тому, що функція $g_n(R)$ досягає свого інфімуму в точці $R_n = \dfrac{\rho_{2n}}{\tilde{b}}$, де ρ_{2n} — розв'язок рівняння $x\omega(x) = 2n$ ($\rho_0 = 0$, якщо $n = 0$, $\rho_{2n} < 2n$, $n \in \mathbb{N}$). Отже,

$$\inf_{R>0} g_n(R) = g_n(R_n) = \frac{\tilde{b}^{2n}}{\rho_{2n}^{2n}}\, e^{\Omega(\rho_{2n})}.$$

Таким чином,

$$\left|D_x^{2n} Q_1(t,x)\right| \leq c(2n)! e^{-M(\tilde{a}x)} \inf_{R>0} g_n(R) = c \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_{2n}}\right)^{2n} (2n)! e^{-M(\tilde{a}x) + \Omega(\rho_{2n})},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оцінимо вираз $\exp \Omega(\rho_{2n})$. Оскільки

$$\Omega(\rho_{2n}) = \int\limits_0^{\rho_{2n}} \omega(x) dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

то, згідно з теоремою про середнє значення, маємо

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \xi_n \in (0, \rho_{2n}) \colon \Omega(\rho_{2n}) = \rho_{2n}\omega(\xi_n).$$

Якщо $n = 0$, то $\rho_0 = 0$ і $\Omega(0) = \omega(0) = 0$. Функція ω є зростаючою і неперервною на $(0, \infty)$, $\xi_n < \rho_{2n}$, тому

$$\Omega(\rho_{2n}) < \rho_{2n}\omega(\rho_{2n}) = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді $e^{\Omega(\rho_{2n})} < e^{2n}$. Отже,

$$\left|D_x^{2n} Q_1(t,x)\right| \leq c \left(\frac{\tilde{b}e}{\rho_{2n}}\right)^{2n} (2n)! e^{-M(\tilde{a}x)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лему 1 доведено.

Наслідок 1. $Q_1(t,x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Далі вважатимемо, що виконується умова $c \leq m$, де c — стала з нерівності (11).

Лема 2. *Для похідних функції*

$$Q_2(x) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k f(x)\}\right)^{-1} \equiv \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, x)\right)^{-1}$$

правильними є оцінки

$$\left|D_x^{2n} Q_2(x)\right| \leq \tilde{c} \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_{2n}}\right)^{2n} n! e^{\Omega(\rho_{2n})}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

де $\tilde{c} = c' \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r$, $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$, $c' = c\mu^{-1}$, c — *стала з нерівності (10),* ρ_{2n} — *розв'язок рівняння* $x\omega(x) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Із оцінок (10) випливають нерівності

$$Q_1(t_k, x) \leq c e^{-t_k M(ax)} \leq c, \quad k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Оскільки

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, x) = \mu \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k f(x)\}\right),$$

причому

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k f(x)\} \leq \frac{c}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \leq \frac{m}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k < 1,$$

то, скориставшись поліноміальною формулою, отримаємо

$$Q_2(x) = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{t_k f(x)}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\times$$

$$\times\left(\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\,(\mu_1 e^{t_1 f(x)})^{r_1}\ldots(\mu_m e^{t_m f(x)})^{r_m}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\,\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}Q_1(\lambda,x),$$

де $\lambda := t_1r_1 + \ldots + t_mr_m$, $Q_1(\lambda,x) = e^{\lambda f(x)}$. Звідси та з (10) випливають нерівності

$$\left|D_x^{2n}Q_2(x)\right| \le c\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_{2n}}\right)^{2n} e^{\Omega(\rho_{2n})}(2n)!\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_0^r e^{-\lambda M(ax)} \le$$

$$\le c\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_{2n}}\right)^{2n}(2n)!e^{\Omega(\rho_{2n})}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\mu_0^r\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} = m^r. \tag{14}$$

Тоді

$$\left|D_x^{2n}Q_2(x)\right| \le c'\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_{2n}}\right)^{2n}(2n)!e^{\Omega(\rho_{2n})}\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r = \tilde{c}\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_{2n}}\right)^{2n}(2n)!e^{\Omega(\rho_{2n})},$$

де $c' = c\mu^{-1}$, $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, $\tilde{c} = c'\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r$.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Функція* $Q(t,x) = Q_1(t,x)Q_2(x)$ *при кожному* $t\in(0,T]$, *як функція аргументу* x, *є елементом простору* $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Доведення. Скористаємося твердженням (B). Врахувавши (10), (13) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо

$$\left|D_x^{2n}Q(t,x)\right| = \left|\sum_{l=0}^{2n}C_{2n}^l D_x^l Q_1(t,x)\cdot D_x^{2n-l}Q_2(x)\right| \le$$

$$\le c\tilde{c}\sum_{l=0}^{2n}C_{2n}^l\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_l}\right)^l l!e^{\Omega(\rho_l)}\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_{2n-l}}\right)^{2n-l}(2n-l)!e^{\Omega(\rho_{2n-l})}e^{-tM(ax)}.$$

Далі зазначимо, що $\dfrac{1}{\rho_{2n-l}}\dfrac{1}{\rho_l} \le \dfrac{1}{\rho_1^2}\dfrac{\alpha^{2n}}{\rho_{2n}}$, $1\le l\le 2n-1$, де $\alpha > 1$ — довільно фіксоване число. Послідовність $\{\rho_n\}$ є монотонно зростаючою і необмеженою. Справді, якщо припустити, що $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\rho_n = c < +\infty$, то, виділивши збіжну підпослідовність $\{\rho_{n_k}\}$ таку, що

$\lim_{k\to\infty}\rho_{n_k} = a$, $a < +\infty$, одержали б суперечність, оскільки $\rho_{n_k}\omega(\rho_{n_k}) = n_k$, і перейшовши до границі при $n \to \infty$, дістали б, що $a\omega(a) = +\infty$. Врахувавши цей факт, знайдемо $\rho_{2n-l} \ge \rho_1$, $\rho_l \ge \rho_1$,

$$\frac{\rho_{2n}}{\rho_{2n-l}\,\rho_l} \le \frac{1}{\rho_1^2}\,\rho_{2n} < \frac{2n}{\rho_1^2} < \frac{\alpha^{2n}}{\rho_1^2}$$

для довільного $\alpha > 1$. Крім того, із властивостей функції Ω та послідовності $\{\rho_n\}$ випливають нерівності

$$e^{\Omega(\rho_l)}\,e^{\Omega(\rho_{2n-l})} \le e^{\Omega(\rho_{2n})}\dot{e}^{\Omega(\rho_{2n})} \le e^{2n}\,e^{\Omega(\rho_{2n})}, \quad 1 \le l \le 2n-1.$$

Тоді

$$\left|D_x^{2n}Q(t,x)\right| \le \frac{c\tilde{c}}{\rho_1^2}\left(\frac{\tilde{b}e^2\alpha}{\rho_{2n}}\right)^{2n} e^{\Omega(\rho_{2n})}\sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^l e^{-tM(ax)} = \bar{c}\left(\frac{\bar{b}}{\rho_{2n}}\right)^{2n}(2n)!e^{\Omega(\rho_{2n})}e^{-tM(ax)}, \tag{15}$$

$$\bar{b} = 2\tilde{b}e^2\alpha, \quad \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^l = 2^{2n}, \quad \bar{c} = \frac{c\tilde{c}}{\rho_1^2}\,e^2\sqrt{2\pi}.$$

Тут ми скористалися також тим, що

$$l!(2n-l)! \le 2\pi e^2(2n)^{2n} \le \sqrt{2\pi}e^2e^{2n}(2n)!, \quad 1 \le l \le 2n-1.$$

Із обмеженості функції $Q_2(x)$ та оцінок (15) випливає, що $Q(t,x)$, як функція x, є елементом простору $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ (при фіксованому $t \in (0,T]$).

Лему 3 доведено.

Врахувавши властивості перетворення Бесселя (прямого та оберненого) та співвідношення $F_B[\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})] = \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, знайдемо, що $G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0,T]$. Скориставшись зображенням функції $Q_2(x)$, отримаємо

$$G(t,\sigma) = c_\nu\int_0^\infty Q_1(t,x)Q_2(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}\,dx =$$

$$= c_\nu\int_0^\infty e^{tf(x)}\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{t_k f(x)}\right)^{-1} j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= c_\nu\int_0^\infty e^{tf(x)}\sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\,\mu_1^{r_1}\ldots$$

$$\ldots\mu_m^{r_m}e^{(t_1r_1+\ldots+t_mr_m)f(x)}j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\tilde{G}(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t,\sigma), \tag{16}$$

де

$$\tilde{G}(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t,\sigma)=c_\nu\int\limits_0^\infty e^{(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t)f(x)}j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx,$$

$\tilde{G}(t,\sigma)$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (14), тобто $\tilde{G}(t,\sigma) = F_B^{-1}[Q_1(t,x)](\sigma)$.

У [4, 5] доведено, що

$$\exists\, b_1\in(0,a)\ \exists\, b_2>b\ \exists d_\nu>0\colon$$

$$|\tilde{G}(t,\sigma+i\tau)|\le d_\nu t^{-(\omega+3/2)}\exp\left\{-tM_1\left(\frac{\sigma}{b_1t}\right)+t\Omega_1\left(\frac{\tau}{b_2t}\right)\right\},\quad \{\sigma,\tau\}\subset\mathbb{R},$$

де $a,b>0$ — параметри з нерівності (11), яку задовольняє функція

$$Q_1(t,x),\quad \omega=\begin{cases}\nu, & 0<T\le 1,\\ 0, & T>1.\end{cases}$$

Звідси та з (15) випливає, що для функції $G(t,\sigma)$ справджується нерівність

$$|G(t,\sigma)|\le\tilde{d}_\nu t^{-(\omega+3/2)}\sum_{r=0}^\infty\tilde{\mu}^r\exp\left\{-tM_1\left(\frac{\sigma}{b_1(rT+t)}\right)\right\},$$

де $\tilde{\mu}=\mu_0 m\mu^{-1}<1$; тут ми також скористалися формулою (14).

Функція $G(t,\cdot)$ є неперервною функцією аргументу $t\in(0,T]$. Справді, для $t\ge t_0>0$ виконуються нерівності (див. (11))

$$|Q(t,x)|\le ce^{-t_0M(ax)}\left(\mu-\sum_{k=1}^m\mu_kQ_1(t,x)\right)^{-1}\le ce^{-t_0M(ax)}\left(\mu-c\sum_{k=1}^m\mu_k\right)^{-1}.$$

Тут враховано, що

$$Q(t,x)=Q_1(t,x)\,Q_2(x),\quad Q_1(t_k,x)\le ce^{-t_kM(ax)}\le c\le m,\quad k\in\{1,\ldots,m\},$$

$$\left(\mu-c\sum_{k=1}^m\mu_k\right)^{-1}\equiv\gamma_0>0.$$

Крім того, функція $M(x)$ при $x\to+\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію, $|j_\nu(\sigma x)|\le A_\nu$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}$, де $A_\nu=\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)/\Gamma(\nu+1/2)$ (ця оцінка випливає з інтегральної формули Пуассона для нормованої функції Бесселя [26]). Звідси вже випливає рівномірна збіжність інтеграла $\int_0^\infty Q(t,x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx$ у довільній смузі $\{(t,x)\colon t_0\le t\le T, x\in\mathbb{R}\}$, $t_0>0$, тому функція $G(t,\cdot)$ є неперервною у кожній точці проміжку $(0,T]$.

Аналогічно доводимо диференційовність по t функції $G(t,\sigma)$ на $(0,T]$.

Лема 4. *Функція $G(t,x)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Бесселя (прямого та оберненого) у просторах типу $\overset{\circ}{W}(\mathbb{R})$ випливає, що для доведення леми досить показати, що функція $F_B[G(t,x)] = Q(t,\sigma)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $F_B[\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})] = \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, диференційовна по t. Врахувавши твердження (B), для цього досить довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)\right] \to f(\sigma)Q(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D^{2n}_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D^{2n}_\sigma(f(\sigma)Q(t,\sigma))$, $\Delta t \to 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[c,d] \subset (0,+\infty)$;

2) $\left|D^{2n}_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)\right| \le c\left(\dfrac{b}{\rho_{2n}}\right)^{2n}(2n)!e^{-M(a\sigma)+\Omega(\rho_{2n})}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де ρ_{2n} — розв'язок рівняння $x\omega(x) = 2n$, причому сталі c, a, $b > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt — досить мала величина.

Функція $Q(t,\sigma) = e^{tf(\sigma)}Q_2(\sigma)$, $t \in (0,T]$, $\sigma \in \mathbb{R}$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = f(\sigma)e^{(t+\theta\Delta t)f(\sigma)}Q_2(\sigma), \quad 0 < \theta < 1, \quad t+\theta\Delta t \le T, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$D^{2n}_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{2n} C^l_{2n} D^l_\sigma(f(\sigma)Q_2(\sigma))\, D^{2n-l}_\sigma e^{(t+\theta\Delta t)f(\sigma)}. \tag{17}$$

Доведемо, що

$$D^l_\sigma e^{(t+\theta\Delta t)f(\sigma)} \to D^l_\sigma e^{tf(\sigma)}, \quad \Delta t \to 0, \tag{18}$$

рівномірно по σ на кожному проміжку $[c,d] \subset (0,\infty)$, тобто встановимо, що

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sup_{\sigma \in [c,d]} \left| D^l_\sigma \left[e^{(t+\theta\Delta t)f(\sigma)} - e^{tf(\sigma)}\right]\right| = 0.$$

Оскільки f — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$, то (див. п. 1)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, c_\varepsilon > 0 \;\forall\, z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}\colon |f(z)| \le c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon\sigma) + \Omega(\varepsilon\tau)\}.$$

Скориставшись цією нерівністю та інтегральною формулою Коші

$$f^{(n)}(\sigma) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z-\sigma)^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \sigma \in [c,d],$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in [c,d]$, знайдемо

$$\left|f^{(n)}(\sigma)\right| \le \tilde{c}_\varepsilon \left(\frac{e\varepsilon}{\rho_n}\right)^n n! e^{\Omega(\rho_n)}, \quad \sigma \in [c,d] \subset (0,\infty), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

де $\tilde{c}_\varepsilon = c_\varepsilon \exp M(\varepsilon d)$, ρ_n — розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Із оцінок похідних функцій $\exp\{tf(\sigma)\}$ та $f(\sigma)$ (див. (10) та (19)) випливає, що

$$\begin{aligned}\left|D_\sigma^l\left[e^{(t+\theta\Delta t)f(\sigma)} - e^{tf(\sigma)}\right]\right| &= \theta\left|D_\sigma^l(f(\sigma)e^{(t+\theta_1\Delta t)f(\sigma)})\right| |\Delta t| = \\ &= \theta\left|\sum_{j=0}^{l} C_l^j D_\sigma^j f(\sigma)\, D_\sigma^{l-j}\, e^{(t+\theta_1\Delta t)f(\sigma)}\right| |\Delta t| \le \\ &\le c\tilde{c}_\varepsilon \sum_{j=0}^{l} C_l^j \left(\frac{e\varepsilon}{\rho_j}\right)^j j! e^{\Omega(\rho_j)} \left(\frac{\tilde{b}_l}{\rho_{l-j}}\right)^{l-j} (l-j)! \times \\ &\times e^{-(t+\theta_1\Delta t)M(a\sigma)} |\Delta t| \le c(\varepsilon,l)|\Delta t|, \quad 0 < \theta_1 < 1,\end{aligned}$$

де стала $c(\varepsilon,l)$ не залежить від σ та Δt. Звідси випливає, що співвідношення (18) виконується. Отже, умова 1 справджується. Доведення властивості 2 ґрунтується на методиці, застосованій при доведенні леми 3, з урахуванням оцінок похідних функцій $f(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma)$, $Q_2(\sigma)$.

Лему 4 доведено.

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi * G(t,\cdot)) = \varphi * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t} \quad \forall \varphi \in (\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'.$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$\varphi * G(t,x) = \langle \varphi_\xi, T_x^\xi G(t,x)\rangle \equiv \langle \varphi_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi * G(t,\cdot)) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[(\varphi * G)(t+\Delta t,\cdot) - (\varphi * G)(t,\cdot)\right] = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0}\left\langle \varphi_\xi, \frac{1}{\Delta t}\left[T_x^\xi G(t+\Delta t,\cdot) - T_x^\xi G(t,\cdot)\right]\right\rangle.\end{aligned}$$

За лемою 4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\left[T_x^\xi G(t+\Delta t,\cdot) - T_x^\xi G(t,\cdot)\right] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, тому, з урахуванням неперервності функціонала φ, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\varphi * G(t,\cdot)) = \left\langle \varphi_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[T_x^\xi G(t+\Delta t,\cdot) - T_x^\xi G(t,\cdot)\right]\right\rangle =$$

$$= \left\langle \varphi_\xi, \frac{\partial}{\partial t}\,T_x^\xi G(t,\cdot)\right\rangle = \left\langle \varphi_\xi, T_x^\xi\,\frac{\partial}{\partial t}\,G(t,\cdot)\right\rangle = \varphi * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Наслідок 2 доведено.

Лема 5. *У просторі* $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l} G(t,\cdot) = \delta \tag{20}$$

(δ — *дельта-функція Дірака*).

Доведення. Оскільки $G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0,T]$, $Q(t,\cdot) = F_B[G(t,\cdot)]$, то, скориставшись властивістю неперервності перетворення Бесселя та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, співвідношення (20) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \tag{21}$$

Для доведення (21) візьмемо довільну функцію $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle = \mu \lim_{t\to+0}\int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma -$$

$$- \sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l}\int_0^\infty Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma = \int_0^\infty \left[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l Q(t_l,\sigma)\right]\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}\,d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\mu}{\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\,\frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\right]\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}\,d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma = \langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (21) виконується у просторі $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}))'$, а отже, правильним є співвідношення (20).

Лему 5 доведено.

Символом $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)'$ позначатимемо клас узагальнених функцій з $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)'$, які є згортувачами у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$.

Наслідок 3. *Нехай*

$$\omega(t,x) = \varphi * G(t,x), \quad \varphi \in (\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *)', \quad (t,x) \in \Pi_T.$$

Тоді у просторі $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = \varphi. \tag{22}$$

Доведення. Оскільки φ — згортувач у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, який є досконалим простором із неперервною операцією зсуву аргументу, то [4, 5]

$$F_B[\varphi * G(t,\cdot)] = F_B[\varphi] \cdot F_B[G(t,\cdot)] = F_B[\varphi] \cdot Q(t,\cdot)$$

(при цьому $F_B[\varphi]$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$). Урахувавши цей факт та властивість неперервності перетворення Бесселя, співвідношення (22) запишемо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} F_B[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F_B[\omega(t,\cdot)] =$$
$$= F_B[\varphi](\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot)) = F_B[\varphi]$$

(вказане співвідношення розглядається у просторі $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}))'$). Врахувавши (21), прийдемо до (22).

Наслідок 3 доведено.

Функція $\omega(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (4). Справді, оскільки φ — згортувач у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, то

$$A_f\omega(t,\cdot) = F_B^{-1}[f(\sigma)F_B[\varphi * G(t,\cdot)]] = F_B^{-1}[f(\sigma)F_B[\varphi]Q(t,\sigma)] =$$
$$= F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)F_B[\varphi]\right] = F_B^{-1}\left[F_B\left[\frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)\right] F_B[\varphi]\right] =$$
$$= F_B^{-1}\left[F_B\left[\varphi * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\right]\right] = \varphi * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

З іншого боку (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi * G(t,\cdot)) = \varphi * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $\omega(t,\cdot)$ задовольняє рівняння (4) у звичайному розумінні.

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (4) m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u \in C^1\left((0,T], \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)$ рівняння (4), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = \varphi, \quad \varphi \in (\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *)', \tag{23}$$

де граничне співвідношення (23) розглядається у просторі $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m, t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як у випадку задачі (4), (5)).

Із доведеного раніше випливає, що функція $u(t,x) = \varphi * G(t,x)$, $\varphi \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)'$, є розв'язком рівняння (4). Якщо $\varphi = \delta \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)'$, то $\varphi * G(t,\cdot) = G(t,\cdot)$, тобто функція $G(t,\cdot)$ також є розв'язком рівняння (4). Врахувавши цей факт, а також співвідношення (20), функцію G далі називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі (4), (23).

Теорема. *Задача (4), (23) коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою* $u(t,x) = \varphi * G(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, $u(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Доведення. Функція $u(t,x) = \varphi * G(t,x)$ задовольняє рівняння (4). Розв'язок $u(t,\cdot)$ неперервно залежить від функції, яка задає умову (23) в тому розумінні, що якщо $\{\varphi, \varphi_n, n \ge 1\} \subset \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)'$ і $\varphi_n \to \varphi$, $n \to \infty$, у просторі $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)'$, то $u_n(t,\cdot) = \varphi_n * G(t,\cdot) \to u = \varphi * G(t,\cdot)$, $n \to \infty$, у просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Ця властивість випливає з властивості неперервності операції згортки.

Залишається переконатися в тому, що задача (4), (23) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A_f^* v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}, \quad 0 \le t < t_0 \le T, \tag{24}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = g, \quad g \in (\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *)', \tag{25}$$

де A_f^* — звуження спряженого оператора до оператора A на простір

$$\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)'.$$

Умову (25) розуміємо в слабкому сенсі. Із результатів, одержаних у [5], випливає, що задача Коші (24), (25) розв'язна, при цьому $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0} \colon \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)' \to \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ — оператор, який зіставляє функціоналу $g \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)'$ розв'язок задачі (24), (25). Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, визначеним для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$, і має такі властивості:

$$\forall g \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)' \colon \frac{dQ^t_{t_0} g}{dt} + A_f^* Q^t_{t_0} g = 0, \quad \lim_{t\to t_0} Q^t_{t_0} g = g$$

(границя розглядається у просторі $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, задачі (4), (23), який розумітимемо як регулярний функціонал із простору $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),*)' \supset \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Доведемо, що задача (4), (23) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),*)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (4) при нульовій граничній умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,T]$). Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_{t_0} g \in \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, де g — довільно фіксований елемент із простору $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),*\right)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (4), (24), знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u, Q^t_{t_0}g\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}g\right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}g}{\partial t}\right\rangle = \langle A_f u, Q^t_{t_0}g\rangle - \langle u, A^*_f Q^t_{t_0}g\rangle =$$

$$= \langle A_f u, Q^t_{t_0}g\rangle - \langle A_f u, Q^t_{t_0}g\rangle = 0, \quad t \in [0,t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}g\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}g\rangle = \langle u(t_0,\cdot), g\rangle = \mathrm{const} \equiv c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Отже, якщо в (23) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot), g\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot), g\rangle = c\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right) = 0,$$

тобто $c = 0$. Таким чином, $\langle u(t,\cdot), g\rangle = 0 \quad \forall g \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, тобто $u(t_0,x)$ — нульовий функціонал із простору $(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),*)'$. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і вибране довільним чином, то $u(t,x) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$.

Теорему доведено.

Як приклад, розглянемо рівняння (4) з оператором A_f, побудованим за функцією $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. У цьому випадку

$$A_f = \frac{1}{2}B_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + (2\nu+1)^{-1}x^{-1}\frac{d}{dx}\right), \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

а рівняння (4) — це рівняння з оператором Бесселя

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad (t,x) \in \Pi_T. \tag{26}$$

Функція $f(z) = -\dfrac{z^2}{2}$ є елементом простору $\overset{\circ}{P}{}^{\Omega}_{M}$, де $M(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $\Omega(y) = \dfrac{y^2}{2}$. Справді, $e^{-z^2/2} \in W^{y^2/2}_{x^2/2}$, оскільки

$$\left|e^{-z^2/2}\right| = \left|e^{-(x+iy)^2/2}\right| = e^{-x^2/2+y^2/2}.$$

Крім того, функція $\dfrac{-z^2}{2}$ — мультиплікатор у просторі $W^{y^2/2}_{x^2/2}$. Стала c в нерівності (11) у даному випадку дорівнює одиниці, тобто умова $c \le m$, $m \in \mathbb{N}$, виконується. Внаслідок доведеної теореми нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння (26) коректно розв'язна, якщо $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *\right)'$, де Ω_1 та M_1 — функції, двоїсті за Юнгом до функцій M та Ω відповідно. У цьому випадку маємо $\Omega_1(y) = \dfrac{y^2}{2}$, $M_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$ (див. приклад з п. 1). Отже, для рівняння (26) вказана задача коректно розв'язна у просторі $\left(\overset{\circ}{W}{}^{y^2/2}_{x^2/2}(\mathbb{R}), *\right)'$, при цьому $u(t,x) = \varphi * G(t,x)$, де

$$G(t,x) = 2^{-\nu-1/2}\Gamma^{-1}(\nu+1)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\frac{1}{(2\lambda(t,r))^{\nu+1}}\,e^{-x^2/(2\lambda(t,r))},$$

де $\lambda(t,r) = t_1r_1 + \ldots + t_mr_m + t$. Зокрема, якщо $f = \delta \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{x^2/2}_{x^2/2}(\mathbb{R}), *\right)'$, $m = 1$, $t_1 = T$ (випадок двоточкової задачі), то

$$u(t,x) = G(t,x) = 2^{-2\nu-3/2}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r\frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}}e^{-\frac{x^2}{2(t+rT)}}.$$

Література

1. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР. — 1968. — **181**, № 6. — С. 1320–1323.
2. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Мат. сб. — 1955. — **36**, № 2. — С. 299–310.
3. *Городецький В. В., Житарюк І. В.* Задача Коші для одного класу параболічних систем з оператором Бесселя в просторах узагальнених функцій // Доп. АН УРСР. — 1991. — № 7. — С. 20–23.
4. *Городецкий В. В., Мартынюк О. В.* Задача Коши для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка. I // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 6. — С. 3–15.
5. *Городецкий В. В., Мартынюк О. В.* Задача Коши для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка. II // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 7. — С. 31–42.
6. *Гуревич Б. Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. — 1954. — **99**, № 6. — С. 893–896.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 307 с.
9. *Pathak R. S.* On Hankel transformable spaces and a Cauchy problem // Can. J. Math. — 1985. — **37**, № 1. — P. 84–106.
10. *Duran Antonio J.* Gel'fand–Shilov spaces for the Hankel transform // Indag. Math. (N. S.). — 1992. — **3**, № 2. — P. 137–151.
11. *Marrero I.* The Fourier–Bessel transformation and the Gelfand–Shilov spaces of type W // Bol. Soc. mat. mexic. — 2003. — **9**, № 2. — P. 257–271.
12. *Sharma V. D., Dolas P. D.* Some S-type spaces of Fourier–Stieltjes transform // Int. J. Eng. and Innov. Technol. — 2013. — **3**, № 3. — P. 361–363.

13. *Prasad A., Mahato A.* The fractional wavelet transform on spaces of type W // Integral Transforms and Special Functions. — 2013. — **24**, № 3. — P. 239 – 250.

14. *Pathak R. S.* The wavelet transform on spaces of type W. The wavelet transform // Atlantis Stud. Math. Eng. and Sci. — 2009. — **4**. — P. 83 – 91.

15. *Городецький В. В.* Про гладкі розв'язки B-параболічних рівнянь та множини їх початкових значень // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. — 1996. — Вип. 12. — С. 268 – 272.

16. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

17. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1998. — **38**, № 6. — С. 885 – 902.

18. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. — М.: Наука, 1980. — 208 с.

19. *Романко В. К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. — 1974. — **10**, № 11. — С. 117 – 131.

20. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1994. — **30**, № 1. — С. 144 – 150.

21. *Чесалин В. И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 1979. – **15**, № 11. — С. 2104 – 2106.

22. *Ильків В. С., Пташник Б. И.* Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. — 2005. — **46**, № 11. — С. 119 – 129.

23. *Готинчан Т. І.* Про нетривіальність та вкладення просторів типу W // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. — 2003. — Вип. 160. — С. 39 – 44.

24. *Готинчан Т. І., Атаманюк Р. М.* Різні форми означення просторів типу W // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. — 2001. — Вип. 111. — С. 21 – 26.

25. *Левитан Б. И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. — 1951. — **6**, вып. 2. — С. 102 – 143.

26. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1977. — 832 с.

Одержано 15.03.16,
після доопрацювання — 26.06.16