УДК 517.988.63

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИМ λ-ІН'ЄКТИВНИМ ОПЕРАТОРОМ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We obtain conditions for invertibility of differentiable λ-injective maps for arbitrary Banach spaces. We establish conditions for existence and uniqueness of bounded and almost periodic solutions of nonlinear difference equations.

Приведены условия обратимости дифференцируемых λ-инъективных отображений в случае произвольных банаховых пространств. Получены условия существования и единственности ограниченных и почти периодических решений нелинейных разностных уравнений.

Статтю присвячено умовам оборотності диференційовних λ-ін'єктивних відображень, що діють у банахових просторах, та застосуванню їх до дослідження обмеженості та майже періодичності розв'язків нелінійних різницевих рівнянь.

1. Диференційовні та λ-ін'єктивні відображення. Основний об'єкт досліджень. Нехай X і Y – банахові простори з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно.

Позначимо через $L(X,Y)$ множину всіх лінійних неперервних відображень $A\colon X \to Y$ з нормою $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y$. Через $L^k(X,Y)$, де $k \in \mathbb{N}$, позначимо банаховий простір неперервних k-лінійних відображень із X в Y. Зазначимо, що $L^{k+1}(X,Y) = L(X, L^k(X,Y))$ і $L^1(X,Y) = L(X,Y)$.

Нехай $U \subset X$ і $V \subset Y$ — відкриті множини. Відображення $f\colon U \to V$ називається *диференційовним* у точці $x \in U$, якщо існує відображення $L(x) \in L(X,Y)$, для якого

$$f(x+h) - f(x) - L(x)h = \alpha(x,h),$$

де $\alpha(x,h) = o(h)$ при $h \to 0$. Функцію $L(x)$ називають *похідною* відображення $f\colon U \to V$ в точці x і позначають символом $(Df)_x$. Відображення f називається C^1*-відображенням*, якщо f диференційовне в кожній точці $x \in U$ і природне відображення $Df\colon U \to L(X,Y)$ неперервне. Аналогічно, відображення f називається C^{k+1}*-відображенням*, якщо $D^k f$ диференційовне в кожній точці $x \in U$ і відображення $D^{k+1}f\colon U \to L^{k+1}(X,Y)$ неперервне. C^{k+1}-відображення f ще називається *диференційовним відображенням класу* C^{k+1}.

Відображення f називається C^∞*-відображенням*, якщо f є C^k-відображенням для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Відображення $f\colon U \to V$ називається C^k*-дифеоморфізмом* або *дифеоморфізмом класу* C^k, якщо f гомеоморфно відображає U на V і відображення f та f^{-1} є C^k-відображеннями.

Локальним C^k*-дифеоморфізмом у точці* $x \in X$ називається відображення $f : X \to Y$, для якого існує такий окіл $U \subset X$ точки x, що звуження $f|_U$ відображення f на U встановлює C^k-дифеоморфізм між U і відкритою підмножиною простору Y.

Зазначимо, що наведені поняття, пов'язані з диференційовними відображеннями, запозичено в [1 – 3].

Далі розглянемо ще два важливих поняття. Позначимо через Λ множину всіх неперервних функцій $\lambda\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для кожної з яких $\lambda(0) = 0$ і $\lambda(t) > 0$ для всіх $t > 0$. Нагадаємо, що оператор $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, якщо з $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$. Для $\lambda \in \Lambda$ оператор $f\colon X \to Y$ називатимемо λ*-ін'єктивним*, якщо

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \geq \lambda(\|x - y\|_X)$$

для всіх $x, y \in X$. Очевидно, що λ-ін'єктивний оператор є ін'єктивним, а у випадку $\lambda(t) = \mu t$, $\mu \geq 1$, — *розтягувальним* [4, с. 142].

Розглянемо функціональне рівняння

$$Fx = y, \tag{1}$$

де відображення $F\colon X \to Y$ є неперервним, а y — довільний елемент простору Y.

Припустимо, що це рівняння для кожного $y \in Y$ має єдиний розв'язок $x \in X$. Тоді оператор $F\colon X \to Y$ має обернений F^{-1}, а розв'язок x рівняння (1) є функцією від $y \in Y$, тобто

$$x = x(y). \tag{2}$$

Якщо відображення $x\colon Y \to X$, що визначається за допомогою (2), є C^k-відображенням, то залежність розв'язку x рівняння (1) від y називатимемо C^k*-залежністю*. Очевидно, що *C^k-залежність розв'язку x рівняння (1) від y рівносильна C^k-диференційовності відображення F^{-1}*.

Основним об'єктом досліджень у статті є з'ясування умов, при яких у рівнянні (1) відображення $F\colon X \to Y$ буде C^k-дифеоморфізмом, якщо це відображення для деякого $\lambda \in \Lambda$ є λ-ін'єктивним, та застосування цих умов до дослідження різницевих рівнянь.

2. Умови оборотності диференційовних $\boldsymbol{\lambda}$-ін'єктивних відображень. Важливою для з'ясування умов оборотності відображень є така теорема.

Теорема 1. *Нехай X і Y — банахові простори, $U \subset X$ — відкрита множина і $k \in \mathbb{N}$.*

C^k-відображення $F\colon U \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$ тоді і тільки тоді, коли похідна $(DF)_{x_0}\colon X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.

Ця теорема є наслідком двох наступних тверджень.

Теорема 2 [1]. *Нехай X і Y — банахові простори, $U \subset X$ — відкрита множина, $F\colon U \to Y$ — C^k-відображення, $k \in \mathbb{N}$, і для деякої точки $x_0 \in U$ похідна $(DF)_{x_0}\colon X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.*

Тоді F — локальний C^k-дифеоморфізм у точці x_0.

Теорема 3 [5]. *Нехай X і Y — банахові простори, $U \subset X$ – відкрита множина, $k \in \mathbb{N}$ і відображення $F\colon U \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$.*

Тоді похідна $(DF)_{x_0}\colon X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.

Зазначимо, що теорема 2 відома як теорема про обернену функцію. Очевидно, що теорема 3 є оберненою до цієї теореми.

Зауваження 1. У теоремах 1 – 3 k може збігатися з ∞.

Основними результатами статті є такі два твердження.

Теорема 4. *Нехай X і Y — банахові простори та для деяких функції $\lambda \in \Lambda$ і числа $k \in \mathbb{N}$ відображення $F\colon X \to Y$ є λ-ін'єктивним та C^k-відображенням.*

Для того щоб відображення F було C^k-дифеоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб це відображення було локальним C^k-дифеоморфізмом у кожній точці $x_0 \in X$.

Теорема 5. *Нехай X і Y — банахові простори та для деяких функції $\lambda \in \Lambda$ і числа $k \in \mathbb{N}$ відображення $F\colon X \to Y$ є λ-ін'єктивним та C^k-відображенням.*

Для того щоб відображення F було C^k-дифеоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки $x_0 \in X$ похідна $(DF)_{x_0}$ була лінійним ізоморфізмом.

Завдяки теоремі 1 ці твердження (теореми 4 і 5) є рівносильними. Тому обмежимося доведенням теореми 4. Використаємо поняття *відкритого* відображення, тобто відображення, що кожну відкриту множину відображає у відкриту множину [6]. Також використаємо наступне допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай для неперервного відображення $H\colon X \to Y$, де X і Y — банахові простори, виконуються такі умови:*

1) для деякої функції $\lambda \in \Lambda$ відображення H є λ-ін'єктивним;

2) відображення H є відкритим.

Тоді відображення $H\colon X \to Y$ є бієктивним.

Доведення. Спочатку покажемо, що множина значень $R(H)$ відображення H є замкненою. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$ елементів множини $R(H)$, тобто послідовність, для якої $\lim_{n,m\to\infty} \|y_n - y_m\|_Y = 0$. Використаємо послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ елементів простору X, для якої $Hx_n = y_n$, $n \geq 1$. Завдяки першій умові леми $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|_X = 0$, тобто послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ є фундаментальною. Тому на підставі повноти простору X існує елемент $x_0 \in X$, для якого $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді внаслідок неперервності відображення H справджується рівність $\lim_{n\to\infty} Hx_n = Hx_0$, тобто $\lim_{n\to\infty} y_n = Hx_0$, що доводить замкненість множини $R(H)$.

Далі покажемо, що $R(H) = Y$. Припустимо, що це співвідношення не виконується.

Зафіксуємо довільні точки $y^* \in R(H)$ і $y^{**} \in Y \setminus R(H)$. Розглянемо відрізок прямої, що з'єднує ці точки, тобто множину $P = \{y^* + t(y^{**} - y^*)\colon t \in [0,1]\}$. Ця множина, як і множина $R(H)$, є замкненою. Тому існує точка $z \in R(H) \cup P$, для якої

$$\{z + t(y^{**} - z)\colon t \in (0,1]\} \subset Y \setminus R(H). \tag{3}$$

Нехай u — така точка простору X, що $Hu = z$. Завдяки другій умові леми для кожної відкритої множини G, що містить точку x, множина HG містить точку z і є відкритою, що суперечить (3). Отже, припущення, що $R(H) \neq Y$, є хибним.

Таким чином, відображення $H\colon X \to Y$ є сур'єктивним. Звідси та з ін'єктивності відображення H випливає твердження леми.

Лему 1 доведено.

Доведення теореми 4. *Достатність.* Припустимо, що відображення $F\colon X \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у кожній точці $x_0 \in X$. Тоді це відображення є відкритим. Оскільки також відображення F є λ-ін'єктивним, то на підставі леми 1 це відображення має обернене відображення F^{-1}. На підставі припущення, що відображення $F\colon X \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у кожній точці $x_0 \in X$, та оборотності F відображення F гомеоморфно відображає X на Y, і це відображення та F^{-1} є C^k-відображеннями. Отже, відображення $F\colon X \to Y$ є C^k-дифеоморфізмом.

Необхідність. Якщо відображення $F\colon X \to Y$ є C^k-дифеоморфізмом, то, очевидно, що це відображення є локальним C^k-дифеоморфізмом у кожній точці $x_0 \in X$.

Отже, теорему 4 доведено.

Зауваження 2. Якщо $\dim X = 1$, то за теоремою 5 вимога, що $(DF)_x\colon X \to Y$ — лінійний ізоморфізм для кожного $x \in X$, є достатньою для оборотності C^k-відображення $F\colon X \to Y$. У випадку $\dim X > 1$ вимоги, що C^k-відображення $F\colon X \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у кожній точці $x_0 \in X$ (або за теоремою 1 похідна $(DF)_{x_0}$ є лінійним ізоморфізмом для кожного $x_0 \in X$), недостатньо для того, щоб це відображення було C^k-дифеоморфізмом. Це підтверджується таким прикладом.

Приклад 1. Нехай X — простір матриць-стовпців $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, де $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, з нормою $\|x\|_X = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Розглянемо довільну функцію $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ класу C^∞, що задовольняє такі умови:

1) $\varphi(s) = 0$ для всіх $s \in [-1/2, \varepsilon) \bigcup (1/2 - \varepsilon, +\infty)$, де ε — достатньо мале додатне число;

2) $\displaystyle\int_0^{1/2} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{2}$.

Визначимо C^∞-відображення $A\colon X \to L(X, X)$ за допомогою рівності

$$A(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \varphi\left(\|x\|_X\right) \\ \varphi\left(\|x\|_X - \dfrac{1}{2}\right) & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Очевидно, что на підставі властивостей функції φ для кожного $x \in X$ правою частиною рівності (4) є одна з матриць

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & a \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ b & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},$$

де a і b залежать від x, причому $ab = 0$ для всіх $x \in X$. Тому для спектрального радіуса $r(A(x))$ матриці $A(x)$ для кожного $x \in X$ виконується співвідношення

$$r(A(x)) = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Далі розглянемо C^∞-відображення $B\colon X \to L(X, X)$, що визначається рівністю

$$B(x) = I - A(x),$$

де I — одиничний елемент з $L(X, X)$. Очевидно, що згідно з (5) відображення $B(x)\colon X \to X$ для кожного $x \in X$ є лінійним ізоморфізмом.

Визначимо C^∞-відображення $F\colon X \to X$ за допомогою інтеграла

$$F(x) = \int_0^1 B(tx)x\, dt, \quad x \in X. \tag{6}$$

Покажемо, що

$$(DF)_x = B(x). \tag{7}$$

На підставі формули Тейлора [3], означення відображення B і властивостей функції φ маємо

$$\sup_{t\in[0,1]} \|B(t(x+h))(x+h) - B(tx)x - ((DB)_{tx}tx + B(tx))h\|_X = o(\|h\|_X)$$

при $h \to 0$. Тому згідно з (6)

$$\left\| F(x+h) - F(x) - \int\limits_0^1 ((DB)_{tx}tx + B(tx))h\,dt \right\|_X = o(\|h\|_X)$$

при $h \to 0$. Отже,

$$(DF)_x = \int\limits_0^1 ((DB)_{tx}tx + B(tx))\,dt.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^1 ((DB)_{tx}tx + B(tx))\,dt = \int\limits_0^1 (DB)_{tx}tx\,dt + \int\limits_0^1 B(tx)\,dt = \int\limits_0^1 t\,dB(tx) + \int\limits_0^1 B(tx)\,dt =$$

$$= (tB(tx))|_0^1 - \int\limits_0^1 B(tx)\,dt + \int\limits_0^1 B(tx)\,dt = B(x)$$

(тут ми застосували формулу інтегрування частинами), то рівність (7) виконується.

Далі розглянемо елементи $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $x_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ простору X. Справджується рівність

$$F(x_1) = F(x_2). \tag{8}$$

Дійсно,

$$F(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і на підставі властивостей функції φ та рівності (4)

$$F(x_2) = \int\limits_0^1 B(tx_2)x_2\,dt = \int\limits_0^1 (I - A(tx_2))x_2\,dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рівність (8) означає, що відображення $F\colon X \to R(X)$ не є ін'єктивним і, отже, не має неперервного оберненого.

Таким чином, побудову необоротного C^∞-відображення $F\colon X \to R(X)$, для якого похідні $(DF)_x\colon X \to X$, $x \in X$, — лінійні ізоморфізми, завершено.

3. Застосування теорем 4 і 5 до теорії різницевих рівнянь. Нехай E — довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, $\mathfrak{M}$ — банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)$, для кожної з яких $x_n \in E$, $n \in \mathbb{Z}$, з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E$, і $\mathfrak{N}$ — банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{A} = (A_n)$, для кожної з яких $A_n \in L(E,E)$, $n \in \mathbb{Z}$, з нормою $\|\mathbf{A}\|_{\mathfrak{N}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E,E)}$.

Розглянемо відображення $f_n\colon E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, що задовольняють умови:

а) для кожного числа $r > 0$ виконується співвідношення $\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E \le r} \|f_n(x)\|_E < \infty$;

б) для деякого числа $\mu > 1$ і всіх чисел $n \in \mathbb{Z}$ та векторів $x, y \in E$ виконується нерівність $\|f_n(x) - f_n(y)\|_E \ge \mu\|x - y\|_E$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n = f_n(x_{n-1}) + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

де $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{M}$, та відповідний різницевий оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається формулою

$$(\mathcal{R}\mathbf{x})_n = x_n - f_{n-1}(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Важливим для подальшого є наступне допоміжне твердження.

Лема 2. *Якщо виконуються умови а) і б), то різницевий оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є обмеженим та λ-ін'єктивним при $\lambda(t) = (\mu - 1)t$.*

Доведення. Завдяки умові а) оператор $\mathcal{R}$ є обмеженим, тобто відображає кожну обмежену множину елементів простору $\mathfrak{M}$ в обмежену множину. Оскільки на підставі умови б)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}\mathbf{x} - \mathcal{R}\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|(x_n - f_{n-1}(x_{n-1})) - (y_n - f_{n-1}(y_{n-1}))\|_E = \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|(x_n - y_n) - (f_{n-1}(x_{n-1})) - f_{n-1}(y_{n-1}))\|_E \ge \\ &\ge \sup_{n\in\mathbb{Z}} (\|f_{n-1}(x_{n-1}) - f_{n-1}(y_{n-1})\|_E - \|x_n - y_n\|_E) \ge \\ &\ge \sup_{n\in\mathbb{Z}} (\mu\|x_{n-1} - y_{n-1}\|_E - \|x_n - y_n\|_E) \ge \\ &\ge \sup_{n\in\mathbb{Z}} (\mu\|x_{n-1} - y_{n-1}\|_E - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}) = \\ &= \mu\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} = (\mu - 1)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}, \end{aligned}$$

то оператор $\mathcal{R}$ є λ-ін'єктивним при $\lambda(t) = (\mu - 1)t$.

Лему 2 доведено.

Наведемо умови, при яких різницеве рівняння (9) для кожної послідовності $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{M}$ буде мати єдиний розв'язок $\mathbf{x} = (x_n) \in \mathfrak{M}$, тобто оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ матиме обернений оператор $\mathcal{R}^{-1}$.

Зазначимо, що у випадку виконання умов а) і б) різницевий оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ може бути необоротним. Це підтверджується таким прикладом.

Приклад 2. Будемо вважати, що $E = l^2$, де l^2 — гільбертів простір, що складається з усіх нескінченних послідовностей $\langle \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \rangle$ комплексних чисел, для яких $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$.

Використаємо оператор $U\colon l^2 \to l^2$ одностороннього зсуву, що визначається рівністю

$$U\langle \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \rangle = \langle 0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \rangle.$$

Відомо [7, с. 49, 223–225], що для спектра $\sigma(U)$ цього оператора виконується рівність $\sigma(U) = \{z\colon |z| \le 1\}$, а всі точки множини $\{z\colon |z| < 1\}$ є точками спектра стискання $\Gamma(U)$ [7, с. 45, 223–225] цього оператора, тобто якщо $\mu \in \Gamma(U)$, то замикання області значень $R(\mu I - U)$ (I — одиничний елемент алгебри $L(l^2, l^2)$) оператора $\mu I - U$ є власним підпростором в l^2 (тобто не збігається з l^2).

Очевидно, що

$$l^2 \setminus \overline{R(I - 2U)} \neq \varnothing. \tag{10}$$

Зафіксуємо довільний елемент $a \in l^2 \setminus \overline{R(I - 2U)}$ і розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$z_n = 2U z_{n-1} + a, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

що є окремим випадком рівняння (9).

Очевидно, що у випадку цього рівняння для відображень $f_n = 2U, \in \mathbb{Z}$, виконуються умови а) і б). За лемою 2 відповідний різницевий оператор $(\mathcal{S}\mathbf{x})_n = x_n - 2U x_{n-1}$ буде λ-ін'єктивним при $\lambda(t) = t$.

Припустимо, що рівняння (11) має розв'язок $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathfrak{M}$ (до того ж єдиний, оскільки оператор $\mathcal{S}$ ін'єктивний). Тоді для кожного $m \in \mathbb{Z}$ елемент $\mathbf{z}_m = (z_{n+m}) \in \mathfrak{M}$ також є розв'язком рівняння (11) і внаслідок його єдиності $z_n \equiv c$, де c — деяка векторна стала з l^2.

Таким чином, $(I - 2U)c = a$, що суперечить (10).

Отже, припущення, що рівняння (11) має розв'язок $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathfrak{M}$, є хибним. Тому оператор $\mathcal{S}$ є необоротним.

Завдяки наведеному прикладу виконання для різницевого рівняння (9) умов а) і б) недостатньо для розв'язності цього рівняння у просторі $\mathfrak{M}$ для кожного $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{M}$. Тому ми додатково вимагатимемо виконання таких умов:

в) похідна $(Df_n)_x$ відображення $f_n\colon E \to E$ у точці $x \in E$ задовольняє співвідношення

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(Df_n)_{u_n}\|_{L(E,E)} < \infty$$

для кожного елемента $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$;

г) для кожної послідовності $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n(u_n + h_n) - f_n(u_n) - (Df_n)_{u_n} h_n\|_E = o(\|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}})$$

при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, де $\mathbf{0}$ — нульовий елемент простору $\mathfrak{M}$;

д) відображення $T\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, що визначається за допомогою формули

$$(T\mathbf{u})_n = (Df_n)_{u_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

неперервне в кожній точці $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$.

Очевидно, що завдяки виконанню умов а) – д) різницевий оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є відображенням класу C^1 та λ-ін'єктивним оператором при $\lambda(t) = (\mu - 1)t$ і похідна цього оператора в точці $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$ визначається формулою

$$((D\mathcal{R})_{\mathbf{u}}\mathbf{x})_n = x_n - ((Df_{n-1})_{u_{n-1}})x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тому на підставі теорем 4 і 5 справджуються такі два твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови а) – д).*

Для того щоб різницевий оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ був C^1-дифеоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб цей оператор був локальним C^1-дифеоморфізмом у кожній точці $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови а) – д).*

Для того щоб різницевий оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ був C^1-дифеоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$ похідна $(D\mathcal{R})_{\mathbf{u}}$ була лінійним ізоморфізмом.

Сформулюємо рівносильні теоремам 6 і 7 твердження з використанням різницевого рівняння (9).

Теорема 8. *Нехай виконуються умови а) – д).*

Різницеве рівняння (9) для кожної послідовності $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ має єдиний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ і має місце C^1-залежність цього розв'язку від $\mathbf{y}$ тоді і тільки тоді, коли різницевий оператор $\mathcal{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є локальним C^1-дифеоморфізмом у кожній точці $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$.

Теорема 9. *Нехай виконуються умови а) – д).*

Різницеве рівняння (9) для кожної послідовності $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ має єдиний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ і має місце C^1-залежність цього розв'язку від $\mathbf{y}$ тоді і тільки тоді, коли для кожної точки $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$ похідна $(D\mathcal{R})_{\mathbf{u}}$ є лінійним ізоморфізмом.

Далі розглянемо випадок майже періодичного рівняння (9).

Для довільного $m \in \mathbb{Z}$ визначимо оператор зсуву $S_m\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ за допомогою співвідношення

$$(S_m\mathbf{x})_n = x_{n+m}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Послідовність $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ називається *майже періодичною*, якщо замикання множини $\{S_m\mathbf{x}\colon m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ компактне у цьому просторі.

Очевидно, що множина $\mathfrak{B}$ всіх майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є банаховим простором з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}$.

Оператор $A \in L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ називається *майже періодичним*, якщо замикання множини $\{S_m A S_{-m}\colon m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ компактне у цьому просторі.

Оскільки в теоремах 4 і 5 банахові простори X і Y довільні, то на підставі цих теорем з урахуванням леми 2 справджуються такі твердження.

Теорема 10. *Нехай виконуються умови а) – д), послідовність* $\mathbf{u} = (f_n(z_n))$ *є майже періодичною для всіх* $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathfrak{B}$ *і оператор* $G_{\mathbf{y}} \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, *що визначається співвідношенням*

$$(G_{\mathbf{y}}\mathbf{u})_n = (Df_{n-1})_{y_{n-1}} u_{n-1}, \tag{12}$$

є майже періодичним елементом простору $L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ *для всіх* $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{B}$.

Різницеве рівняння (9) для кожної послідовності $\mathbf{y} \in \mathfrak{B}$ *має єдиний розв'язок* $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$ *і має місце* C^1*-залежність цього розв'язку від* $\mathbf{y}$ *тоді і тільки тоді, коли різницевий оператор* $\mathcal{R} \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ *є локальним* C^1*-дифеоморфізмом у кожній точці* $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{B}$.

Теорема 11. *Нехай виконуються умови а) – д), послідовність* $\mathbf{u} = (f_n(z_n))$ *є майже періодичною для всіх* $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathfrak{B}$ *і оператор* $G_{\mathbf{y}} \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, *що визначається співвідношенням (12), є майже періодичним елементом простору* $L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ *для всіх* $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{B}$.

Різницеве рівняння (9) для кожної послідовності $\mathbf{y} \in \mathfrak{B}$ *має єдиний розв'язок* $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$ *і має місце* C^1*-залежність цього розв'язку від* $\mathbf{y}$ *тоді і тільки тоді, коли для кожної точки* $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{B}$ *похідна* $(D\mathcal{R})_{\mathbf{u}}$ *є лінійним ізоморфізмом.*

Зауваження 3. Умови оборотності лінійного майже періодичного різницевого оператора $(D\mathcal{R})_{\mathbf{u}}$ (в теоремі 11) можна знайти, наприклад, у [8].

Зауваження 4. Інші умови існування обмежених і майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь можна знайти в [9 – 15].

Література

1. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967. — 204 с.
2. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977. – 292 с.
3. *Зорич В. А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1984. — 640 с.
4. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 233 с.
5. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність теореми про обернену функцію для диференційовних функцій // Буков. мат. журн. — 2014. — **2**, № 4. — С. 112 – 113.
6. *Садовничий В. А.* Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 368 с.
7. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970. — 352 с.
8. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 109 – 115.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 368 – 378.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 536 – 555.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні різницеві рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 528 – 538.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 416 – 425.
13. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. — 2014. — **15**, № 1. — P. 211 – 215.
14. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. — 2015. — **97**, № 2. — С. 277 – 285.
15. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 1. — С. 112 – 119.

Одержано 29.07.15