УДК 517.925:62.50

ЧАСТОТНЫЕ УСЛОВИЯ КОНВЕРГЕНТНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ

С. С. Жуматов

*Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
e-mail: sailau.math@mail.ru*

We study convergence conditions for nonlinear control systems in a neighborhood of a program manifold. Sufficient convergence conditions were obtained for a basic control system. We find frequency conditions that imply convergence of the program manifold with respect to a vector-valued function ω. We also find a sufficient condition, as well as a necessary and sufficient condition, for convergence with respect to a parameter.

Досліджено умови конвергентності нелінійних систем керувань в околі програмного многовиду. Отримано достатні умови конвергентності основної системи керування. Встановлено частотні умови, що забезпечують властивості конвергентності програмного многовиду відносно вектор-функції ω. Знайдено достатні, необхідну та достатню умови конвергентності відносно деякого параметра.

1. Введение. Современные методы моделирования динамики сложных систем предполагают обеспечение выполнения требуемых свойств функционирования на этапе составления уравнений динамики. Для составления уравнений динамики управляемых систем, содержащих элементы различной природы, и исследования ее кинематических и динамических свойств успешно используются уравнения и методы классической механики [1 – 5]. Одной из основных задач динамики механических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, является задача определения сил и моментов по заданным кинематическим элементам движения или, в более общей постановке, по заданным свойствам движения. Задачи такого типа с различными их видоизменениями названы обратными задачами динамики или обратными задачами дифференциальных систем [4]. Теория обратных задач дифференциальных систем является обобщением методов решения классических обратных задач динамики. Н. П. Еругиным решена задача построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, которая стала исходной для решения обратных задач дифференциальных систем. В дальнейшем она развивалась как задача построения систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию, как решение различных обратных задач динамики, как построение систем программного движения. Обзор работ по этим направлениям и обширная библиография приведены в [5], а обзор работ, посвященных построению систем автоматического управления по заданному программному многообразию, приведен в монографии [6]. В работах [7, 8] обратные задачи динамики рассматриваются при наличии случайных возмущений, а именно в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито. В работе [9] изучались свойства систем при $s = n$, когда при старшей производной стоит матрица, детерминант которой равен нулю, установлены условия приводимости к канонической форме и условия разрешимости задачи Коши, а также исследованы вопросы существования периодических решений. Заданная программа $\omega(t,x)=0$ выполняется лишь при условии, когда начальные значения вектора состояния системы удовлетворяют равенству $\omega(t_0,x_0)=0$. Но эти равенства не всегда могут быть выполнены. Поэтому при построении систем уравнений следует иметь в виду еще и требования к качественным свойствам заданной программы, таким как устойчивость, конвергентность, диссипативность относительно некоторой функции. В работе [10] найдены достаточные условия устойчивости, экспоненциальной устойчивости программного многообразия, а также условия асимптотической устойчивости неявных дифференциальных систем. В работах [11 – 13] получены условия конвергентности нелинейных систем относительно нулевого положения равновесия.

В рассматриваемой работе мы исследуем условия конвергентности в окрестности программного многообразия. По заданному программному многообразию строятся дифференциальные системы заданной структуры, рассматривается задача построения устойчивой системы управления, подверженной внешним воздействиям. Найдены достаточные частотные условия конвергентности нелинейных систем автоматического управления в окрестности программного многообразия.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу построения устойчивой системы управления следующей структуры, подверженной внешним воздействиям:

$$\dot{x}=f(t,x)-B\xi-g(t),\quad \xi=\varphi(\sigma),\quad \sigma=P^T\omega,\quad t\in I=[0,\infty), \tag{1}$$

по заданному $(n-s)$-мерному гладкому интегральному многообразию $\Omega(t)$, которое определяется векторным уравнением

$$\omega(t,x)=0, \tag{2}$$

где $B\in R^{n\times r}$, $P\in R^{s\times r}$ — матрицы, $x\in R^n$ — вектор состояния объекта, $f\in R^n$ — вектор-функция, $g\in R^s$ —вектор внешних возмущений, $\omega\in R^s$ —вектор $s\le n$, $\xi\in$ $\in R^r$ — вектор-функция управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющая условиям локальной квадратичной связи в угле $[0,K]$,

$$\varphi(0)=0,\quad 0<\sigma^T\varphi(\sigma)\le\sigma^TK\sigma,\quad K=\operatorname{diag}\|k_1,\ldots,k_r\|,\quad K=K^T>0, \tag{3}$$

дифференцируемая по σ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma}$ удовлетворяет условию

$$K_1\le\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\le K_2,\quad K_i=\operatorname{diag}\|n_1,\ldots,n_r\|\quad i=1,2,\quad K_2\gg 0. \tag{4}$$

В пространстве R^n выделим область $G(R)$:

$$G(R)=\{(t,x)\colon t\in I\wedge\|\omega(t,x)\|\le\rho<\infty\}. \tag{5}$$

Учитывая необходимое и достаточное условие того, что многообразие Ω будет интегральным для системы (1) имеем

$$\dot{\omega}=F(t,x,\omega)-HB\xi-Hg(t),\quad \xi=\varphi(\sigma),\quad \sigma=P^T\omega,\quad H=\frac{\partial\omega}{\partial x}. \tag{6}$$

Здесь $F(t, x, \omega)$ — функция Еругина, удовлетворяющая условию $F(t, x, 0) \equiv 0$. Полагая в (6) $F = -A\omega$ ($A \in R^{s\times s}$ — гурвицева матрица), получаем

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi - Hg(t), \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega. \tag{7}$$

Таким образом, задача построения сводится к исследованию качественных свойств системы (7) относительно вектор-функции ω. Рассмотрим систему (7) без внешнего возмущения

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega. \tag{8}$$

Определение 1. *Программное многообразие $\Omega(t)$ называется абсолютно устойчивым, если оно устойчиво в целом на решениях системы (1) при любой $\omega(t_0, x_0)$ и функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (3).*

Определение 2. *Программное многообразие $\Omega(t)$ системы (8) называется абсолютно экспоненциально устойчивым при $t \to +\infty$ относительно вектор-функции ω, если существуют постоянные $N > 0$ и $\alpha > 0$, зависящие лишь от коэффициентов системы, и для каждого решения $\omega(t) = \omega(t, t_0, \omega_0)$ в области (5), в которой $\xi(t)$ и $\sigma(t)$ удовлетворяют условиям локальной квадратичной связи (3), выполняется неравенство*

$$\|\omega(t)\| \leq N\|\omega(t_0)\| \exp[-\alpha(t - t_0)].$$

Определение 3. *Будем говорить, что программное многообразие $\Omega(t)$ имеет свойство конвергенции относительно вектор-функции ω, если в области (5) определены все $\omega(t, t_0, \omega_0)$ при $t \geq t_0$ и существует единственное ограниченное решение $\eta(t)$, удовлетворяющее условию*

$$\lim_{t\to\infty}[\omega(t, t_0, \omega_0) - \eta(t)] = 0.$$

Определение 4. *Будем говорить, что программное многообразие $\Omega(t)$ имеет свойством экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функций ω и ξ при $t \to \to \infty$, если в области (5) существуют $N > 0$, $\alpha > 0$ такие, что выполняется неравенство*

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| \leq N\|z_1(t_0) - z_2(t_0)\| \exp[-\alpha(t - t_0)], \quad t \geq t_0, \tag{9}$$

для любой $\omega(t_0, x_0)$ и $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (3), где $\|z\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\xi\|^2$.

Ставится задача: получить достаточное условие экспоненциальной абсолютной устойчивости программного многообразия систем управлений относительно вектор-функций ω и установить условия конвергентности систем управлений в окрестности программного многообразия.

3. Абсолютная устойчивость программного многообразия нелинейных систем управлений. Рассмотрим систему управления (8), где нелинейность $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (3), (4).

Теорема 1. *Пусть система (8) асимптотически устойчива для $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $h \in [0, K]$, и при нелинейной функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (3), (4), существуют матрицы $L = L^T > 0$, $\beta = \mathrm{diag}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r) > 0$.*

Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ достаточно выполнения условия

$$Q > 0 \wedge Q - CG^{-1}C^T > 0$$

или

$$Q > 0 \wedge G = 0,$$

и оно является экспоненциально абсолютно устойчивым относительно вектор-функции ω.

Доказательство. Если существуют матрицы $L = L^T > 0$, $\beta = \mathrm{diag}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r) > 0$, то для системы (8) можно построить функцию Ляпунова вида

$$V(\omega, \xi) = \omega^T L\omega + \int\limits_0^\sigma \varphi^T \beta d\sigma > 0. \tag{10}$$

Для случая $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $h \leq K$, второе слагаемое равно $J = \dfrac{\sigma^T h\beta\sigma}{2}$.

Производная функции (10) после применения s-процедуры [6] примет вид

$$-\dot{V} = \omega^T G\omega + 2\omega^T C\varphi + \varphi^T C_1\varphi + S > 0, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} G = A^T L + LA, \quad C = LN - \Gamma, \quad C_1 = \beta P^T N + \theta K^{-1}, \quad Q = Q_1 + Q_1^T, \\ Q_1 = \beta P^T N + \theta K^{-1}, \quad \Gamma = \frac{1}{2}\,(P\theta - A^T P\beta), \quad N = HB, \quad S = \varphi^T\theta(\sigma - K^{-1}\varphi) > 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Для того чтобы $-\dot{V} > 0$, при условии $Q > 0$ достаточно выполнения условия

$$Q - CG^{-1}C^T > 0 \tag{13}$$

или

$$Q > 0 \wedge G = 0. \tag{14}$$

Таким образом, программное многообразие $\Omega(t)$ абсолютно устойчиво при выполнении условий (13) или (14).

Пусть теперь $l_1(h), l_2(h)$ и γ_1, γ_{s+r} — действительные наименьшие и наибольшие корни уравнений

$$\det \|L(h) - lE\| = 0, \quad L(h) = L + \frac{Ph\beta P^T}{2},$$

$$\det \|Q - \gamma E\| = 0, \quad Q = \left\| \begin{array}{cc} G & C \\ C^T & C_1 \end{array} \right\|.$$

Тогда в силу соотношений (10) и (11) имеем

$$l_1(h)\|\omega\|^2 \le V \le l_s(h)\|\omega\|^2, \tag{15}$$

$$\gamma_1(\|\omega\|^2+\|\varphi\|^2) \le z^T Q z \le \gamma_{s+r}(\|\omega\|^2+\|\varphi\|^2), \quad z = \left\| \begin{matrix} \omega \\ \varphi \end{matrix} \right\|. \tag{16}$$

Из свойства (3) следует неравенство

$$\frac{\beta_1}{c_s}\|\omega\|^2 \le \|\varphi\|^2 \le \frac{\beta_s}{c_1}\|\omega\|^2, \tag{17}$$

где β_1, β_s и c_1, c_s — действительные наименьшие и наибольшие корни уравнений

$$\det\|B_1-\beta E\| = 0, \quad B_1 = Ph\theta P^T, \quad \det\|C_2 - cE\| = 0, \quad C_2 = \theta K^{-1}.$$

Учитывая неравенства (11), (16) и (17), получаем

$$\mu_1\|\omega\|^2 \le -\dot V \le \mu_1\|\omega\|^2, \tag{18}$$

где

$$\mu_1 = \gamma_1\left(1+\frac{\beta_1}{c_s}\right), \quad \mu_s = \gamma_{s+r}\left(1+\frac{\beta_s}{c_1}\right)+\beta_s.$$

Из соотношений (15) и (18) имеем

$$\frac{\mu_1}{l_s}\,dt \le -\frac{\dot V}{V} \le \frac{\mu_s}{l_1}\,dt. \tag{19}$$

Интегрируя неравенство (19) от t_0 до t и учитывая соотношение (15), получаем

$$l_s^{-1}V_0\exp[\alpha_1(t-t_0)] \le \|\omega\|^2 \le l_1^{-1}V_0\exp[\alpha_2(t-t_0)], \tag{20}$$

где $V_0 = \omega^T(t_0)L(h)\omega(t_0)$, $\alpha_1 = -\mu_s/l_1$, $\alpha_2 = -\mu_1/l_2$.

Поскольку неравенства (15) выполняются для $\omega(t_0)$, V_0, то из (20) имеем оценку

$$\|\omega\|^2 \le l_1^{-1}V_0\|\omega_0\|^2\exp[\alpha_2(t-t_0)]$$

или

$$\|\omega(t)\| \le N\|\omega(t_0)\|\exp[\alpha(t-t_0)], \tag{21}$$

где $N = l_1^{-1/2}V_0^{1/2}$, $\alpha = 1/2\alpha_2$. Следовательно, программное многообразие $\Omega(t)$ абсолютно устойчиво экспоненциально.

4. Свойство конвергентности программного многообразия систем с внешним воздействием. Теперь рассмотрим систему (7) с внешним воздействием.

Пусть в системе (7) вектор-функция внешних возмущений $g \in R^s$ является ограниченной. Выполним замену $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $h \leq K$. В результате получим следующую систему:

$$\dot{\omega} = -\widetilde{A}\omega - \widetilde{g}(t), \quad \widetilde{A} = A + HBhP^T, \quad \widetilde{g} = Hg(t), \quad \sigma = P^T\omega. \tag{22}$$

Теорема 2. *Если система (7) асимптотически устойчива для $\varphi(\sigma) = h\sigma$, $h \in [0, K]$, вектор-функция $\widetilde{g}$ ограничена на I*

$$\sup_t \|\widetilde{g}(t)\| = M < \infty,$$

то система имеет свойство конвергенции и единственное ограниченное на I решение

$$\eta(t) = \int\limits_0^t \exp \widetilde{A}(t-\tau)\widetilde{g}(t)d\tau. \tag{23}$$

Доказательство очевидно.

5. Экспоненциальная конвергентность программного многообразия. Пусть $\omega_1(t), \omega_2(t)$ — два произвольных решения системы (7).

Введя переменные

$$z = \omega_1 - \omega_2, \quad \zeta = \xi_1 - \xi_2, \quad \eta = \sigma_1 - \sigma_2,$$

систему (7) преобразуем к виду

$$\dot{z} = -Az - N\zeta, \quad \zeta = \psi(\eta), \quad \eta = P^T z, \quad N = HB, \tag{24}$$

где $\zeta \in R^r$ — вектор управления, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{gathered} \psi^T\theta\left(\sigma - K^{-1}\psi\right) > 0, \quad \theta = \operatorname{diag}\|\theta_1, \ldots, \theta_r\|, \quad K = K^T > 0, \\ K_1 \leq \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \leq K_2, \quad \eta(t) \neq 0, \quad K_i = \operatorname{diag}\|k_1, \ldots, k_r\|, \quad i = 1, 2, \quad K_2 \gg 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Систему (24) рассмотрим как линейную часть некоторой системы, вход ζ и выход η нелинейной части которой удовлетворяют соотношениям (25). Поэтому к системе (24) можно применить результаты п. 3. Из теоремы 1 следует, что $\|z\| \to 0$ при $t \to \infty$ и выполняется условие

$$\|z(t)\| \leq N_2\|z(t_0)\| \exp[\alpha(t - t_0)]. \tag{26}$$

Следовательно, программное многообразие $\Omega(t)$ имеет свойство экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции $\bar{\omega}$.

Передаточная матрица линейной части системы (24) от входа ζ к выходу $-\eta$ имеет вид

$$W(i\bar{\omega}) = -P^T(A - i\bar{\omega}E)^{-1}N. \tag{27}$$

С учетом выражения (27) можно сформулировать частотный аналог теоремы 1.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 [12]. *Пусть* $-A$ *— гурвицева матрица,* $\psi(\eta)$ *удовлетворяет условиям локальной квадратичной связи, дифференцируема по* η *и существуют диагональные матрицы* K, θ, β *такие, что*

$$Q + \mathrm{Re}\,\Gamma^T(A - i\bar{\omega}E)^{-1}N > 0 \quad \forall\bar{\omega} \geq 0 \tag{28}$$

или

$$\mathrm{Re}\,\Gamma^T(A - i\bar{\omega}E)^{-1}N > 0 \quad \forall\bar{\omega} \geq 0, \tag{29}$$

$$\lim_{\bar{\omega}\to\infty} \bar{\omega}^2 \mathrm{Re}\,\Gamma^T(A - i\bar{\omega}E)^{-1}N > 0 \quad \forall\bar{\omega} \geq 0. \tag{30}$$

Тогда программное многообразие $\Omega(t)$ *имеет свойство экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции* $\bar{\omega}$.

Можно сделать переход от условия (28) к частотному условию В. М. Попова. Рассмотрим очевидное тождество

$$(A - i\bar{\omega}E)(A - i\bar{\omega}E)^{-1} = E.$$

Преобразуем это тождество к виду

$$AA_{i\bar{\omega}}^{-1} = E + i\bar{\omega}A_{i\bar{\omega}}^{-1}, \quad A_{i\bar{\omega}} = A - i\bar{\omega}E. \tag{31}$$

Умножая первое равенство из (31) слева на P^T и справа N, получаем

$$P^T AA_{i\bar{\omega}}^{-1}N = P^T N + i\bar{\omega}W(i\bar{\omega}). \tag{32}$$

Подставляя значения Γ из (11) в (32), находим

$$\Pi(\bar{\omega}) = Q + \mathrm{Re}\,(\theta P^T - \beta P^T A)A_{i\bar{\omega}}^{-1}N > 0 \quad \forall\bar{\omega} \geq 0. \tag{33}$$

В силу (24) имеем

$$\Pi(\bar{\omega}) = Q - \beta P^T N + \mathrm{Re}\,[(\theta + i\bar{\omega}\beta)W(i\bar{\omega})] > 0. \tag{34}$$

Подставляя значение матрицы Q из (11) в (34), получаем условия типа Попова

$$\Pi(\bar{\omega}) = \theta K^{-1} + \mathrm{Re}\,[(\theta + i\bar{\omega}\beta)W(i\bar{\omega})] > 0 \quad \forall\bar{\omega} \geq 0. \tag{35}$$

Неравенство (35) гарантирует существование функции Ляпунова „квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности” (10).

6. Конвергентные свойства программного многообразия по параметру. На основании тождества $A_{i\bar{\omega}}^{-1} = A^{-1} + i\bar{\omega}A_{i\bar{\omega}}^{-1}A^{-1}$ из (35) определим

$$\Pi(\bar{\omega}) = \theta\Gamma + \mathrm{Re}\,\left(-\beta\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}\theta\right)A^T A_{i\bar{\omega}}^{-1}A^{-1}N > 0 \quad \forall\bar{\omega} \geq 0, \tag{36}$$

где

$$\Gamma = K^{-1} + P^T A^{-1} N. \tag{37}$$

В силу соотношений

$$A_{i\bar\omega}^{-1} A^{-1} = D_\mu^{-1}\left(E + i\bar\omega A^{-1}\right), \quad D_\mu = A^2 + \mu E, \quad \mu = \bar\omega^2,$$

от частотного условия устойчивости (37) можно перейти к условиям относительно параметра μ. Имеем

$$\Pi(\mu) = \theta\Gamma + \mu\Psi(\mu,\, \theta,\, \beta) > 0 \quad \forall\mu > 0, \tag{38}$$

$$\Psi = \beta R_1(\mu) + \theta R_2(\mu),$$

$$R_1(\mu) = P^T D_\mu^{-1} N, \quad R_2(\mu) = P^T D_\mu^{-1} A[-1] N.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть матрица $-A$ гурвицева и существуют положительные матрицы θ, β такие, что для любого $\mu > 0$ выполняется неравенство (38). Тогда многообразие $\Omega(t)$ имеет свойство экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции ω при выполнении условий (25).*

Приведем еще одно условие конвергентности нелинейной системы. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть $A(s \times s), K(r \times r)$ — невырожденные матрицы. Тогда справедливо равенство*

$$\Delta = \det\|A + NhP^T\| = \det A \cdot \det K \cdot \det\Gamma. \tag{39}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство вида

$$\det\begin{Vmatrix} A & -N \\ KP^T & E \end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix} A + NKP^T & 0 \\ KP^T & E \end{Vmatrix} = \Delta. \tag{40}$$

Умножая слева первую строку матрицы из (40) на $KP^T A^{-1}$ и вычитая из второй строки, определяем

$$\det\begin{Vmatrix} A & -N \\ 0 & E + KP^T A^{-1} N \end{Vmatrix} = \det A \cdot \det K \cdot \det\Gamma. \tag{41}$$

Теорема 5. *Пусть матрица $-A$ гурвицева и существуют положительные матрицы $\theta > 0$, $\beta > 0$ такие, что*

$$\Psi(\mu) \geq 0 \quad \forall\mu > 0. \tag{42}$$

Многообразие $\Omega(t)$ имеет свойство экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции ω тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\Gamma = K^{-1} + P^T A^{-1} N > 0, \tag{43}$$

а если $\Psi(\mu) > 0$, то условие (43) является необходимым.

Доказательство. Достаточность условия (42) следует из (35) с учетом (37).

Чтобы доказать необходимость условия (42), рассмотрим линеаризованную систему

$$\dot{z} = -(A + NhP^T)z, \quad N = HB, \tag{44}$$

которая получена из (24) при $\zeta = \psi(\eta) = h\eta$, где $h = \operatorname{diag}\|h_1, \ldots, h_r\|$. Составляем характеристическое уравнение системы (44):

$$\det\|A + NhP^T - \lambda E\| = 0.$$

Как известно, для асимптотической устойчивости системы (44), в частности, необходимо,чтобы

$$Sp\|A + NhP^T\| > 0, \quad 0 < h < K, \tag{45}$$

$$(-1)^s\|A + NhP^T\| < 0, \quad 0 < h < K,$$

Умножая равенство (41) на $(-1)^{s+r}$ и сравнивая с неравенством (45), получаем необходимое условие устойчивости (43).

Литература

1. *Layton R. A.* Principle of analytical system dynamics. – New York: Springer, 1998. — 158 p.
2. *Meiser P., Enge O., Freudenberg H., Kielau G.* Electromechanical interactions in multibody systems containing electromechanical drives // Multibody System Dynamics. — 1997. — № 1. — P. 281 – 302.
3. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование динамических процессов различной природы // Проблемы аналитической механики и теория устойчивости: Сборник трудов, посвященный памяти академика В. В. Румянцева. — М.: Наука, 2009. — С. 310 – 324.
4. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
5. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. — 1994. — № 1. — С. 5 – 21.
6. *Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управление движением. — Алматы: Гылым, 1999. — 228 с.
7. *Тлеубергенов М. И.* К обратной стохастической задаче восстановления // Дифференц. уравнения. — 2014. — **50**, № 2. — С. 269 – 273.
8. *Ибраева Г. Т., Тлеубергенов М. И.* Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся диффузией // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 5. — С. 712 – 716.
9. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. — 1993. — № 4. — С. 10 – 15.
10. *Жуматов С. С.* Асимптотическая устойчивость неявных дифференциальных систем в окрестности программного многообразия // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 4. — С. 558 – 565.
11. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
12. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1975. — С. 74 – 180.
13. *Буркин И. М.* Конвергентность и абсолютная устойчивость систем управления с монотонными нелинейностями // Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. и техн. науки. — 2007. — **12**, вып. 4. — С. 423 – 425.

Получено 17.02.15,
после доработки — 13.05.16