НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 4 • 1999

УДК 517.9

РАСЩЕПЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

И. И. Клевчук

Чернов. ун-т,
Украина, 274012, Черновцы, ул. Коцюбинского, 2

A system of linear functional differential equations of neutral type is considered. The existence of an integral manifolds of singularly perturbed system is proved. It is shown that the initial system can be splitted into two independent equations by linear substitution. This transformation is used for investigation of stability in the critical case.

Розглядається система лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. Доведено існування інтегральних многовидів сингулярно збуреної системи. Показано, що вихідну систему за допомогою лінійної заміни можна розщепити на два незалежні рівняння. Це перетворення використовується для дослідження стійкості в критичному випадку.

Данная работа посвящена обобщению результатов работы [1] на случай уравнений нейтрального типа.

1. Регулярно возмущенные уравнения. Рассмотрим линейные дифференциально-функциональные уравнения нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}[D(x_t) - \varepsilon G(t, x_t)] = L(x_t) + \varepsilon F(t, x_t), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}[D(u_t)] = L(u_t), \tag{2}$$

где x_t — элемент пространства $\mathbb{C}$, заданный функцией $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$; $D : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; $G : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; $L : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; функционалы D, L, G, F линейны по x_t; функционал F непрерывен по t, а функционал G непрерывно дифференцируем по t. Согласно теореме Рисса, функционал $D(\varphi)$ можно представить с помощью интеграла Стильтьеса

$$D(\varphi) = \varphi(0) - \int_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]\varphi(\theta),$$

где $\mu(\theta)$ — матрица-функция ограниченной вариации.

Предположим, что функция $\mu(\theta)$ не содержит сингулярную компоненту и полная вариация $V_{-s}^{0}[\mu] \to 0$ при $s \to 0$.

 © И.И. Клевчук, 1999

Обозначим

$$b = \sup \left\{ \operatorname{Re}\lambda : \det \left(E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta) \right) = 0 \right\}.$$

Тогда в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha > b$ содержится конечное число (m) корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2), а остальные корни лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$. Обозначим через $\mathbb{P}$ собственное подпространство в $\mathbb{C}$, порожденное решениями уравнения (2), соответствующими корням в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$. Разложим пространство $\mathbb{C}$ в прямую сумму $\mathbb{C} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$. Пусть $\Phi = \Phi(\theta)$ – базис в $\mathbb{P}$. Рассматривая сопряженное с (2) уравнение, можно аналогичным образом определить базис $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \le \theta \le \Delta$. Тогда каждый элемент $x_t \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $x_t = \Phi y(t) + z_t$, где $y(t) = (\Psi, x_t)$, $z_t = x_t - \Phi y(t)$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $z_t \in \mathbb{Q}$, (Ψ, x_t) – некоторый билинейный функционал [2, 3].

Уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\frac{d}{dt}\left[y - \varepsilon\Psi(0)G(t, x_t)\right] = By + \varepsilon\Psi(0)F(t, x_t),$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \varepsilon \int\limits_{\sigma}^{t} T(t-s)X_0^Q[F(s, x_s) + \frac{d}{ds}G(s, x_s)]ds, \tag{3}$$

где $T(t)\varphi = u_t(\varphi)$, X_0^Q — проекция на подпространство Q функции $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \le \le \theta < 0$; $X_0(0) = E$; B — постоянная матрица, собственные значения которой лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$.

Справедливы неравенства [2 – 4]

$$|T(t)\varphi| \le K_1 \exp[(\alpha - \beta_1)t]|\varphi|, \;\; \varphi \in \mathbb{Q},$$

$$|T(t)X_0^Q| + \int\limits_{0}^{1} |d_s T(t-s)X_0^Q| \le K_1 \exp[(\alpha - \beta_1)t], \tag{4}$$

где $t \ge 0, \; K_1 > 0$.

В силу предположения относительно собственных значений матрицы B справедлива также оценка $|\exp(Bt)| \le K \exp[(\alpha + \beta)t]$, где $t \le 0, \; K > 0$.

Пусть $|G(t, \varphi)| \le \nu|\varphi|$, $|F(t, \varphi)| \le \nu|\varphi|$, $\nu > 0$. В работе [5] доказано, что при достаточно малом ε существуют интегральные многообразия системы (3), представимые в виде $z_t = = g(t, \varepsilon)y$, $y = r(t, z_t, \varepsilon)$, причем справедливы оценки $|g(t, \varepsilon)| \le 0,5$, $|r(t, \varphi, \varepsilon)| \le 0,5|\varphi|$.

Функцию $g(t, \varepsilon)$ можно представить в виде предела последовательности

$$g_n(t, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s)X_0^Q[F(s, x_s^{(n)}(t)) + \frac{d}{ds}G(s, x_s^{(n)}(t))]ds,$$

где

$$x_s^{(0)} = 0, x_s^{(n)} = \Phi e^{B(s-t)} - \varepsilon\Phi \int\limits_s^t e^{B(s-\tau)}\Psi(0)[F(\tau, x_\tau^{(n-1)}) + \frac{d}{d\tau}G(\tau, x_\tau^{(n-1)})]d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{s} T(s-\tau)X_0^Q[F(\tau, x_\tau^{(n-1)}) + \frac{d}{d\tau}G(\tau, x_\tau^{(n-1)})]d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда следует, что функцию $g_n(t, \varepsilon)$ можно записать в виде

$$g_n(t, \varepsilon) = \varepsilon h_1(t) + \varepsilon^2 h_2(t) + \ldots + \varepsilon^n h_n(t),$$

где функции $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)$ выражаются через функции F и G. В частности,

$$h_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s)X_0^Q[F(s, \Phi e^{B(s-t)}) + \frac{d}{ds}G(s, \Phi e^{B(s-t)})]ds.$$

Из теоремы 5 работы [5] вытекает оценка

$$|g(t, \varepsilon) - g_n(t, \varepsilon)| \leq L\varepsilon^{n+1},$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; L — некоторая положительная постоянная, не зависящая от ε.

Пусть функции $F(t, \varphi)$, $G(t, \varphi)$ являются квазипериодическими по t и разлагаются в ряды

$$F(t, \varphi) = \sum_k F_k(\varphi)e^{i(k,w)t}, \quad G(t, \varphi) = \sum_k G_k(\varphi)e^{i(k,w)t},$$

где $w = (w_1, \ldots, w_j)$, $k = (k_1, \ldots, k_j)$, $F_k(\varphi)$, $G_k(\varphi)$ – линейные непрерывные функционалы. Тогда определение функции $g_n(t, \varepsilon)$ сводится к вычислению интеграла

$$\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{\delta s}ds,$$

где $\delta = i(k, w) + \lambda$, λ — собственное значение матрицы B.

Теорема 1. *Функция* $\xi(\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$*, принадлежит* $\mathbb{Q} \bigcap D(A)$ *и имеет место равенство*

$$\delta\xi - A\xi = X_0^Q, \tag{5}$$

где A *— производящий оператор полугруппы* $\{T(t), t \geq 0\}$ *с областью определения* $D(A)$.

Доказательство. Действительно,

$$(\Psi, \xi) = \int\limits_{-\infty}^{0} (\Psi, T(-s)X_0^Q)e^{\delta s}ds = 0,$$

поэтому $\xi \in \mathbb{Q}$. Согласно определению производящего оператора A полугруппы $T(t)$ имеем $A\varphi = \lim\limits_{t\to 0} A_t\varphi$, где $A_t = (T(t) - I)/t$. При $t > 0$ получим

$$A_t\xi = \frac{1}{t}\int\limits_{-\infty}^{0} T(t-s)X_0^Q e^{\delta s}ds - \frac{1}{t}\int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{\delta s}ds =$$

$$= \frac{e^{\delta t}-1}{t}\int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{\delta s}ds - \frac{e^{\delta t}}{t}\int\limits_{-t}^{0} T(-s)X_0^Q e^{\delta s}ds,$$

так что $A_t\xi \to \delta\xi - X_0^Q$ при $t \to 0$. Значит, $\xi \in D(A)$ и $A\xi = \delta\xi - X_0^Q$. Отсюда следует равенство (5). Теорема доказана.

Нетрудно показать, что решение уравнения (5) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему

$$6\frac{d}{dt}\left[v - \varepsilon\Psi(0)G_1(t,\varepsilon)v\right] = Bv + \varepsilon\Psi(0)F_1(t,\varepsilon)v,$$

$$w_t = T(t-\sigma)w_\sigma + \varepsilon\int\limits_{\sigma}^{t} T(t-s)X_0^Q[F_2(s,w_s,\varepsilon) + \frac{d}{ds}G_2(s,w_s,\varepsilon)]ds, \tag{6}$$

где $v \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in \mathbb{Q}$, $G_1(t,\varepsilon)v = G(t,\Phi v + g(t,\varepsilon)v)$, $F_1(t,\varepsilon)v = F(t,\Phi v + g(t,\varepsilon)v)$, $G_2(t,w_t,\varepsilon) = G(t,\Phi r(t,w_t,\varepsilon) + w_t)$, $F_2(t,w_t,\varepsilon) = F(t,\Phi r(t,w_t,\varepsilon) + w_t)$.

Функции $r(t,w_t,\varepsilon)$, $g(t,\varepsilon)v$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}[r(t,w_t,\varepsilon) - \varepsilon\Psi(0)G_2(t,w_t,\varepsilon)] = Br(t,w_t,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\Psi(0)F_2(t,w_t,\varepsilon), g(t,\varepsilon)v(t) = T(t-\sigma)g(\sigma,\varepsilon)v(\sigma) + \tag{7}$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_{\sigma}^{t} T(t-s)X_0^Q[F_1(s,\varepsilon)v(s) + \frac{d}{ds}(G_1(s,\varepsilon)v(s))]ds.$$

Складывая равенства (6), (7) и выполняя замену

$$y = v + r(t,w_t,\varepsilon), \quad z_t = w_t + g(t,\varepsilon)v, \tag{8}$$

получаем систему (3).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При помощи замены (8) система (6) приводится к виду (3).*

В силу линейности $r(t,\varphi,\varepsilon)$ по φ система (8) однозначно разрешима относительно v и w_t. Следовательно, определяя из (8) v и w_t, находим замену, которая расщепляет систему (3) на два независимых уравнения (6).

Второе уравнение системы (6) перепишем в виде

$$w_t = T(t-\sigma)[w_\sigma - \varepsilon X_0^Q G_2(\sigma, w_\sigma, \varepsilon)] + \varepsilon X_0^Q G_2(t, w_t, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon \int_\sigma^t T(t-s) X_0^Q F_2(s, w_s, \varepsilon) ds - \varepsilon \int_\sigma^t d_s[T(t-s)X_0^Q] G_2(s, w_s, \varepsilon).$$

Оценим решение этого уравнения, использовав метод последовательных приближений

$$w_t^{(0)} = 0, \quad w_t^{(n+1)} = T(t-\sigma)[c - \varepsilon X_0^Q G_2(\sigma, c, \varepsilon)] + \varepsilon X_0^Q G_2(t, w_t^{(n)}, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon \int_\sigma^t T(t-s) X_0^Q F_2(s, w_s^{(n)}, \varepsilon) ds - \varepsilon \int_\sigma^t d_s[T(t-s)X_0^Q] G_2(s, w_s^{(n)}, \varepsilon),$$

где $c = w_\sigma$, $n = 0, 1, 2, ...$ Функции $G_2(t, \varphi, \varepsilon)$ и $F_2(t, \varphi, \varepsilon)$ удовлетворяют по переменной φ условию Липшица с постоянной $\nu_1 = \nu(0,5|\Phi| + 1)$. По индукции докажем, что справедливо неравенство

$$|w_t^{(q)} - w_t^{(q-1)}| \le K_1(1 + \varepsilon |X_0^Q| \nu_1)(\varepsilon\gamma)^{q-1} |c| \exp[\alpha(t-\sigma)], \tag{9}$$

где $\gamma = \nu_1(|X_0^Q| + K_1/\beta_1 + K_1/(\exp(\beta_1 - 1))$, $q = 1, 2, ..., t \ge \sigma$.

При $q = 1$ неравенство (9) следует из (4).

Пусть неравенство (9) справедливо при $q = n$. Тогда, учитывая (4), получаем

$$|w_t^{(n+1)} - w_t^{(n)}| \le K_1(1 + \varepsilon |X_0^Q| \nu_1)(\varepsilon\gamma)^n |c| \exp[\alpha(t-\sigma)].$$

Значит, неравенство (9) справедливо при $q = n + 1$, следовательно, оно справедливо при всех натуральных q.

Если просуммировать неравенства (9) по q, то при $\varepsilon\gamma < 0,5$ получим оценку

$$|w_t| \le 2K_1(1 + \varepsilon |X_0^Q| \nu_1)|c| \exp[\alpha(t-\sigma)], \quad t \ge \sigma.$$

Аналогично, используя неравенство Гронуолла – Беллмана, можно получить оценку

$$|v(t)| \le M_1 |c| \exp[(\alpha + \beta - \varepsilon M)(t-\sigma)],$$

где

$$t \le \sigma, M = \frac{K|\Psi(0)|\nu_2(1 + |B|)}{1 - \varepsilon|\Psi(0)|\nu_2}, \quad M_1 = \frac{K(1 + \varepsilon|\Psi(0)|\nu_2)}{1 - \varepsilon|\Psi(0)|\nu_2}, \quad \nu_2 = \nu(|\Phi| + 0,5).$$

Рассмотрим теперь критический случай: характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2), имеет m корней на мнимой оси (с учетом их кратности), а остальные корни имеют отрицательные действительные части. В этом случае $\alpha < 0$. Из теоремы 2 вытекает, что если нулевое решение уравнения

$$\frac{d}{dt}[v - \varepsilon\Psi(0)G_1(t,\varepsilon)v] = Bv + \varepsilon\Psi(0)F_1(t,\varepsilon)v \tag{10}$$

устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво, то и нулевое решение уравнения (1) соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.

Для исследования устойчивости уравнение (10) можно разрешить относительно v и применить метод Штокало [6] или метод ускоренной сходимости [7]. Если собственные значения матрицы B имеют простые элементарные делители, то в уравнении (10) можно сделать замену $v = \exp(Bt)u$ и получить систему в стандартной форме. Для исследования устойчивости решений такой системы во многих случаях целесообразно применять метод усреднения.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 позволяют обосновать алгоритм исследования устойчивости линейных почти периодических уравнений с последействием. Аналогичный метод предложен в [8].

2. Расщепление линейных сингулярно возмущенных систем. Рассмотрим систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t),$$
$$\varepsilon\frac{d}{dt}[C(t)x(t) + D(t, y_t)] = B_1(t)x(t) + G_1(t, y_t), \tag{11}$$

где x — m-мерный вектор; y — n-мерный вектор; $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$; $F(t,\varphi), G_1(t,\varphi), D(t,\varphi)$ – линейные по φ функционалы; матрицы $A(t), B_1(t)$ и функционалы $F(t,\varphi), G_1(t,\varphi), D(t,\varphi)$ непрерывны по t. Согласно теореме Рисса, функционалы $D(t,\varphi)$ и $G_1(t,\varphi)$ можно представить с помощью интеграла Стильтьеса

$$D(t,\varphi) = \varphi(0) - \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\mu(t,\theta)]\,\varphi(\theta), \;\; G_1(t,\varphi) = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(t,\theta)]\,\varphi(\theta),$$

где $\mu(t,\theta), \eta(t,\theta)$ — матрицы-функции ограниченной вариации по θ.

Предположим, что функция $\mu(t,\theta)$ не содержит сингулярную компоненту и полная вариация по θ $V_{-s}^{0}[\mu] \to 0$ при $s \to 0$ равномерно относительно t. Обозначим

$$b(t) = \sup\left\{\operatorname{Re}\lambda(t) : \det\left(E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(t,\theta)\right) = 0\right\}.$$

Пусть $b(t) < b_0 < 0$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) нормы матриц $A, B_1, C, D, C', B_1 - \varepsilon C' - \varepsilon CA$ и функционалов $F, G_1, D, \partial D/\partial t$ равномерно ограничены при $t \in \mathbb{R}$ некоторой положительной постоянной M;

2) все корни характеристического уравнения

$$\det\,\Lambda(\lambda) = 0, \;\; \Lambda(\lambda) = \lambda[E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(t,\theta)] - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(t,\theta),$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda(t) \le -2\alpha < 0$.

Путем дифференцирования второго уравнения систему (11) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t), \\ &\varepsilon \frac{d}{dt} D(t, y_t) = B(t, \varepsilon)x(t) + G(t, y_t, \varepsilon), \end{aligned} \tag{12}$$

где $B(t, \varepsilon) = B_1(t) - \varepsilon C'(t) - \varepsilon C(t)A(t),\ G(t, \varphi, \varepsilon) = G_1(t, \varphi) - \varepsilon C(t)F(t, \varphi)$.

Система (12) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t), \\ &y_t = T(t, \sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t, s)X_0 B(s, \varepsilon)x(s)ds, \end{aligned} \tag{13}$$

где $X_0(\theta) = 0, -\varepsilon\Delta \le \theta < 0; X_0(0) = E; T(t, s)$ — оператор сдвига по решениям уравнения

$$\varepsilon \frac{d}{dt} D(t, y_t) = G(t, y_t, \varepsilon).$$

Лемма 1. *Пусть относительно системы (11) выполняются условия 1 и 2. Тогда для оператора $T(t, s)$ справедлива оценка*

$$|T(t, s)\varphi| \le K|\varphi| \exp[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t - s)], t \ge s.$$

Доказательство леммы можно провести аналогично работам [9, 10].

Теорема 3. *Пусть относительно системы (11) выполняются условия 1 и 2. Тогда можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует интегральное многообразие системы (13), представимое в виде $y_t = P(t, \varepsilon)x$, где $P(t, \varepsilon) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ — равномерно ограниченный при $t \in \mathbb{R}$ оператор.*

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &x(t) = H(t, \sigma) - \int\limits_t^\sigma H(t, s)F(s, y_s)ds, \\ &y_t = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t, s)X_0 B(s, \varepsilon)x(s)ds, \end{aligned} \tag{14}$$

где $H(t, s)$ — фундаментальная матрица уравнения $dx/dt = A(t)x$.

Существование решения системы (14) докажем с помощью метода последовательных приближений

$$y_t^{(0)} = 0, x_n(t) = H(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma H(t,s)F(s, y_s^{(n)})ds,$$
$$y_t^{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t,s)X_0B(s,\varepsilon)x_n(s)ds, n = 0,1,2,\dots. \tag{15}$$

Имеет место неравенство

$$|H(t,s)| \le \exp[-M(t-s)], t \le s.$$

Докажем, что справедлива оценка

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \le \frac{N}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \tag{16}$$

где

$$q = 1,2,..., \quad N = \frac{4KM}{\alpha}, \quad \varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2M}, \frac{\alpha^2}{32KM^2}\right), t \le \sigma.$$

При $q = 1$ неравенство (16) справедливо.

Пусть неравенство (16) справедливо при $q = n$. Тогда получим

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \frac{2MN\varepsilon}{2^n(\alpha - \varepsilon M)}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Отсюда находим

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \le \int\limits_{-\infty}^t \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right]\frac{2KM^2N}{(\alpha-\varepsilon M)2^n}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - s)\right]ds =$$

$$= \frac{4\varepsilon KM^2N}{(\alpha-\varepsilon M)^2 2^n}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right] \le \frac{32KM^2\varepsilon N}{\alpha^2 2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Из справедливости неравенства (16) при $q = n$ вытекает его справедливость при $q = n+1$. Следовательно, неравенство справедливо при всех натуральных q. Из (16) следует, что последовательность $(x_n(t), y_t^{(n)})$ сходится к некоторой функции $(x(t), y_t)$, которая является решением системы (14).

Полагая в (14) $t = \sigma$, получаем представление интегрального многообразия

$$P(\sigma,\varepsilon) = y_\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^\sigma T(\sigma,s)X_0B(s,\varepsilon)x(s)ds.$$

Если просуммировать неравенства (16) по q и положить $t = \sigma$, то получим равномерную оценку $|P(\sigma,\varepsilon)| \le N$.

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Аналогично работе [11] можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P(t,\varepsilon) = G(t,E,0)^{-1}B(t,0).$$

Теорема 4. *Пусть относительно системы (11) выполняются условия 1 и 2. Тогда можно указать такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ существует интегральное многообразие системы (13), представимое в виде $x = Q(t, y_t, \varepsilon)$, где $Q(t,\varphi,\varepsilon)$ — линейный по φ функционал. Имеет место оценка*

$$|Q(t,\varphi,\varepsilon)| \le \varepsilon N|\varphi|, N > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_t^\infty H(t,s)F(s,y_s)ds, \\ y_t &= T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0B(s,\varepsilon)x(s)ds. \end{aligned} \tag{17}$$

Существование решения системы (17) докажем с помощью метода последовательных приближений

$$x_0(t) = 0, \quad x_{n+1}(t) = -\int_t^\infty H(t,s)F(s,y_s^{(n)})ds,$$

$$y_t^{(n)} = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0B(s,\varepsilon)x_n(s)ds.$$

Докажем, что справедлива оценка

$$|x_q(t) - x_{q-1}(t)| \le \frac{\varepsilon N|\varphi|}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \tag{18}$$

где

$$q = 1,2,..., \quad N = \frac{4KM}{\alpha}, \quad \varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2M}, \frac{\alpha^2}{32KM^2}\right), t \ge \sigma.$$

При $q = 1$ неравенство (18) справедливо.

Пусть неравенство (18) справедливо при $q = n$. Тогда получим

$$|y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)}| \le \frac{2\varepsilon KMN|\varphi|}{(\alpha - \varepsilon M)2^n}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Отсюда находим

$$|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \le \int\limits_t^\infty \exp\left[M(s-t)\right] \frac{2\varepsilon KM^2N|\varphi|}{(\alpha-\varepsilon M)2^n} \exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma-s)\right] ds =$$

$$= \frac{4\varepsilon^2 KM^2N|\varphi|}{(\alpha-\varepsilon M)^2 2^n} \exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right] \le \frac{32KM^2\varepsilon^2 N}{\alpha^2 2^{n+1}} \exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right].$$

Неравенство (18) справедливо при $q=n+1$, следовательно, оно справедливо при всех натуральных q. Из (18) следует, что последовательность $(x_n(t), y_t^{(n)})$ равномерно сходится к функции $(x(t), y_t)$, которая является решением системы (17).

Полагая в (17) $t=\sigma$, получаем представление интегрального многообразия

$$Q(\sigma,\varphi,\varepsilon) = x(\sigma) = -\int\limits_\sigma^\infty H(\sigma,s)F(s,y_s)ds.$$

Складывая неравенства (18) и полагая $t=\sigma$, находим $|Q(\sigma,\varphi,\varepsilon)| \le \varepsilon N|\varphi|$.

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = A(t)v + F(t, P(t,\varepsilon)v), \\ &w_t = T(t,\sigma)w_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0 B(s,\varepsilon)Q(s,w_s,\varepsilon)ds. \end{aligned} \tag{19}$$

Функции $Q(t,w_t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)v$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{dQ(t,w_t,\varepsilon)}{dt} = A(t)Q(t,w_t,\varepsilon) + F(t,w_t), \\ &P(t,\varepsilon)v(t) = T(t,\sigma)P(\sigma,\varepsilon)v(\sigma) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0 B(s,\varepsilon)v(s)ds. \end{aligned} \tag{20}$$

В результате замены

$$x = v + Q(t,w_t,\varepsilon), \quad y_t = w_t + P(t,\varepsilon)v \tag{21}$$

и сложения равенств (19), (20) получим систему (13).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *С помощью замены (21) система (19) приводится к виду (13).*

Для достаточно малого ε систему (21) можно разрешить относительно v и w_t и тем самым определить замену, которая расщепляет систему (13) на два независимых уравнения (19).

Из второго уравнения системы (19) находим

$$|w_t| \le K \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(\sigma - t)\right] |w_\sigma| + \int\limits_{\sigma}^{t} K \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s - t)\right] MN |w_s| ds.$$

Отсюда, согласно лемме Гронуолла – Беллмана, получаем

$$|w_t| \le K |w_\sigma| \exp\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - KMN\right)(\sigma - t)\right], \quad t \ge \sigma.$$

Поэтому устойчивость нулевого решения системы (10) равносильна устойчивости нулевого решения первого уравнения системы (19).

1. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1986. — № 8. — С. 23 – 26.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
3. *Hale J.K.* Critical cases for neutral functional differential equations // J. Different. Equat. — 1971. — **10**, № 1. — P. 59 – 82.
4. *Henry D.* Linear autonomous neutral functional differential equations // Ibid. — 1974. — **15**, № 1. — P. 106 – 28.
5. *Клевчук И.И., Фодчук В.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа. — Черновцы, 1984. — 26 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, № 271 Ук-85.
6. *Штокало И.З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. — Киев: Изд-во АН УССР, 1960. — 78 с.
7. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости // Укр. мат. журн. — 1965. — **17**, № 6. — С. 42 – 59.
8. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Обоснование алгоритма исследования устойчивости решений линейных почти периодических уравнений с последействием, коэффициенты которых близки к постоянным // Вестн. Ярослав. ун-та. — 1974. — Вып. 10. — С. 70 – 105.
9. *Черевко И.М.* Оценка фундаментальной матрицы сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1997. — **33**, № 2. — С. 281 – 283.
10. *Якімов І.В.* Оцінка фундаментальної матриці сингулярно збуреного диференціального рівняння нейтрального типу // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. — С. 85 – 96.
11. *Клевчук І. І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, № 8. — С. 1022 – 1028.

Получено 18.02.99