УДК 517.9

НЕТЕРОВА ІМПУЛЬСНА ЗАДАЧА З КЕРУВАННЯМ*

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: boichuk.aa@gmail.com

Є. С. Войтушенко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. Глушкова, 4, Київ, 03680, Україна
e-mail: I_Voitushenko@ukr.net

Л. М. Шегда

Івано-Франків. нац. техн. ун-т нафти і газу
вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, 76019, Україна
e-mail: math@ nung.edu.ua

We find a condition that allows to solve a degenerate impulsive problem that does not have a solution by introducing a control function into both the differential system and the impulsive condition in the case where the degenerate problem without control can be reduced to a central canonical form.

Получены условия, при которых неразрешимую вырожденную импульсную задачу можно сделать разрешимой с помощью введения функции управления как в дифференциальную систему, так и в импульсное условие при предположении, что вырожденная дифференциальная система без управления сводится к центральной канонической форме.

Розглядається імпульсна задача

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + A_1(t)u, \tag{1}$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + b_i + M_i u, \quad t, \tau_i \in [a,b], \quad i = 1, \ldots, p, \tag{2}$$

де $A(t), B(t) \in C^{3q-2}[a,b]$, $A_1(t) \in C^{q-1}[a,b]$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ – n-вимірна вектор-функція, $\det B(t) = 0$ для будь яких $t \in [a,b]$. Розв'язок $x = x(t) = \mathrm{col}\,(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ будемо шукати у просторі $C^1([a,b]|\{\tau_i\}_I)$ кусково неперервно диференційовних вектор-функцій з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, які задаються рівняннями (2); u – n-вимірний сталий вектор-стовпчик, який задає керування, $u \in \mathbb{R}^n$; S_i, $i = 1, \ldots, p$, — $(m_i \times n)$-вимірні сталі матриці; M_i, $i = 1, \ldots, p$, — $(m_i \times n)$-вимірні сталі матриці; E_i — $(m_i \times n)$-вимірні сталі матриці такі, що $\mathrm{rank}\,(E_i + S_i) = m_i < n$, тобто розв'язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0));$$

* Виконано за часткової підтримки Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U004691).

b_i — m_i-вимірний вектор-стовпчик констант, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$; $-\infty < a < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots \ldots < \tau_p < b < \infty$, $i = 1, \ldots, p$.

Відомо [1], що при розгляді імпульсної задачі як крайової задачі з „Interface Conditions” [2] імпульсна задача (1), (2) без керування

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{3}$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + b_i, \quad t, \tau_i \in [a, b], \quad i = 1, \ldots, p, \tag{4}$$

має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f, b])(t) \tag{5}$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a, b]$ в диференціальній системі та $b_i \in \in \mathbb{R}^{m_i}$ в імпульсній умові задовольняють d лінійно незалежних умов

$$P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}\,(\cdot)\} = 0, \tag{6}$$

де

$$\widetilde{x}(t) = \int\limits_a^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau - \Phi(t)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\,\Big(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)f(t)\Big)$$

— частинний розв'язок неоднорідної виродженої диференціальної системи (3) [1, 3];

$$Q := lX_{n-s}(\cdot) = \begin{bmatrix} -S_1X_{n-s}(\tau_1) \\ -S_2X_{n-s}(\tau_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ -S_pX_{n-s}(\tau_p) \end{bmatrix}$$

— $(m \times (n - s))$-вимірна стала матриця; $m = m_1 + \ldots + m_p$;

$$l\widetilde{x}(\cdot) = \begin{bmatrix} E_1\widetilde{x}(\tau_1+) - (E_1 + S_1)\widetilde{x}(\tau_1-) \\ E_2\widetilde{x}(\tau_2+) - (E_2 + S_2)\widetilde{x}(\tau_2-) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E_p\widetilde{x}(\tau_p+) - (E_p + S_p)\widetilde{x}(\tau_p-) \end{bmatrix}$$

— $(m \times 1)$-вимірний вектор-стовпчик імпульсної умови; $b = \mathrm{col}\,(b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^m$ — заданий вектор-стовпчик; $X_{n-s}(t)$ – $(n \times (n - s))$-вимірна матриця, складена з $n - s$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [a, b],$$

та $Y_{n-s}(t)$— $(n \times (n-s))$-вимірна матриця, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків спряженої системи

$$\frac{d}{dt} B^*(t)y = -A^*(t)y, \quad t \in [a,b];$$

$(n \times s)$-вимірні матриці $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$:

$$\Phi(t) = \left[\varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \ldots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \ldots; \varphi_r^{(1)}(t), \ldots, \varphi_r^{(s_r)}(t)\right],$$

$$\Psi(t) = \left[\psi_1^{(1)}(t), \ldots, \psi_1^{(s_1)}(t); \psi_2^{(1)}(t), \ldots, \psi_2^{(s_2)}(t); \ldots; \psi_r^{(1)}(t), \ldots, \psi_r^{(s_r)}(t)\right].$$

Фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ завжди можна визначити так, щоб виконувалась рівність

$$Y_{n-s}^*(t)B(t)X_{n-s}(t) = E_{n-s}.$$

Тут $X_r(t) = X_{n-s}(t)P_{Q_r}$ — $(n \times r)$-вимірна матриця, $P_Q := E_{n-s} - Q^+Q$ — $((n-s)\times(n-s))$-ортопроектор, який проектує простір $\mathbb{R}^{n-s}$ на $\ker Q$. Оскільки $\operatorname{rank} P_Q = r = (n-s) - n_1$, то через P_{Q_r} ми позначаємо $((n-s) \times r)$-вимірну матрицю, що складається з r лінійно незалежних стовпців матриці P_Q.

Зазначимо, що, як і в роботах [1, 4], припускаємо, що рівняння (3) зводиться до центральної канонічної форми.

Постановка задачі. Припускаємо, що імпульсна задача (3), (4) нерозв'язна при довільних $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ та $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$. Ставиться питання: чи можна так збурити імпульсну задачу, щоб вона стала розв'язною? Покажемо, що це можна зробити за допомогою введення керування у вигляді $A_1(t)u$ в диференціальну систему та $M_i u$ в імпульсну умову. Знайдемо умову на сталий вектор $u \in \mathbb{R}^n$, що входить в керування, при якому імпульсна задача (1), (2) буде розв'язною при довільних неоднорідностях $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ та $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$.

Використавши умову (6), запишемо необхідну і достатню умову розв'язності для імпульсної задачі (1), (2) з керуванням у вигляді

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{b + Mu - \ell\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)(f(\tau) + A_1(\tau)u)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left(f(t) + A_1(t)u\right)\right)(\cdot)\Bigg)\Bigg\} = 0, \qquad (7)$$

де $M = \operatorname{col}(M_1, \ldots, M_p)$ — $(m \times n)$-вимірна матриця.

Отримаємо алгебраїчну систему відносно u:

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{-M + \ell\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)A_1(\tau)d\tau +$$

$$+ \Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)A_1(t)\right)(\cdot)\Bigg)\Bigg\}u =$$

$$= P_{Q_d^*}\Bigg\{b - \ell\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\,\Big(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)f(t)\Big)(\cdot)\Bigg)\Bigg\}, \qquad (8)$$

яку запишемо у вигляді алгебраїчної системи відносно невідомого керування $u \in \mathbb{R}^n$:

$$Du = P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\}, \qquad (9)$$

де D — $(d \times n)$-вимірна матриця, що визначається формулою

$$D := P_{Q_d^*}\Bigg\{-M + \ell\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)A_1(\tau)d\tau +$$

$$+ \Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\,\Big(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)A_1(t)\Big)(\cdot)\Bigg)\Bigg\}.$$

Оскільки прямокутна матриця є нетеровим оператором [3, 5–9], то алгебраїчна система (9) розв'язна тоді і тільки тоді, коли її вільний член $P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\}$ належить ортогональному доповненню $N^{\perp}(D) = R(D)$ підпростору $N(D^*)$, тобто коли

$$P_{D^*}P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\} = 0. \qquad (10)$$

При цій умові загальний розв'язок системи (9) має вигляд

$$u = D^+P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\} + P_D\overline{u} \quad \forall\overline{u} \in \mathbb{R}^n,$$

де D^+ — псевдообернена за Муром–Пенроузом $(n \times d)$-вимірна матриця; P_D та P_{D^*} — $(n \times n)$- та $(d \times d)$-вимірні матриці — ортопроектори, які проектують простори $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^d$ на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ матриць D та D^* відповідно:

$$P_D\colon \mathbb{R}^n \to N(D), \quad P_{D^*}\colon \mathbb{R}^d \to N(D^*).$$

Нехай $\operatorname{rank} P_{D^*} = d_2$ $(d_2 = d - k, k = \operatorname{rank} D)$, тоді $(d \times d)$-вимірну матрицю P_{D^*} можна замінити на $(d_2 \times d)$-вимірну матрицю $P_{D^*_{d_2}}$ складену з повної системи d_2 лінійно незалежних рядків матриці P_{D^*}. Також $(n \times n)$-вимірну матрицю P_D можна замінити на $(n \times n_2)$-вимірну матрицю $P_{D_{n_2}}$, складену з повної системи $n_2 (n_2 = n - k, k = \operatorname{rank} D)$ лінійно незалежних стовпців матриці P_D.

Таким чином, справджується наступне твердження.

Теорема. *Вироджена диференціальна система (1) з імпульсною умовою (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли неоднорідності* $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ *та* $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ *задовольняють* d_2 *лінійно незалежних умов*

$$P_{D^*_{d_2}}P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\} = 0, \quad d_2 = d - k. \qquad (11)$$

При цьому стале керування $u \in \mathbb{R}^n$ *визначається формулою*

$$u = D^+ P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\} + P_{D_{n_2}}\overline{u} \quad \forall \overline{u} \in \mathbb{R}^{n_2}. \tag{12}$$

Наслідок 1. *Якщо* $\operatorname{rank} D = k = n$, *то вироджена диференціальна система (1) з імпульсною умовою (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор-стовпець* $b - l\widetilde{x}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ *задовольняє* d_2 *лінійно незалежних умов*

$$P_{D_{d_2}^*} P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\} = 0, \quad d_2 = d - k.$$

При цьому керування $u \in \mathbb{R}^n$ *є единим та має вигляд* $u = D^+ P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\}$.

Дійсно, оскільки $n_2 = 0$, то $P_{D_{n_2}} = 0$.

Наслідок 2. *Якщо* $\operatorname{rank} D = k = d$, *то вироджена диференціальна система (1) з імпульсною умовою (2) розв'язна при будь-яких неоднорідностях* $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ *та* $f(t) \in C^{q-1}[a, b]$. *При цьому стале керування* $u \in \mathbb{R}^n$ *має вигляд*

$$u = D^+ P_{Q_d^*}\{b - \ell\widetilde{x}(\cdot)\} + P_{D_{n_2}}\overline{u} \quad \forall \overline{u} \in \mathbb{R}^{n_2},$$

тобто стале керування не єдине та залежить від довільної $(n_2 = n - d)$*-вимірної векторної сталої* $\overline{u} \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Дійсно, оскільки $\operatorname{rank} D = d$, то $d_2 = d - d = 0$, $P_{Q_{d_2}^*} \equiv 0$, тому умову (11) завжди виконано.

Зауваження. Якщо умова (11) виконується, то вироджена диференціальна система (1) з імпульсною умовою (2) має розв'язок

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f + A_1 u, b + Mu])(t),$$

де $u \in \mathbb{R}^n$ визначається рівнянням (12).

Література

1. *Boichuk A., Ruzickova M., Langerova M., Voitushenko E.* Systems of singular differential equations with pulse action // Adv. Difference Equat. — 2013. — **2013**. — 186 p.
2. *Zettl A.* Adjoint and self-adjoint boundary value problems with interface conditions // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — **16**, № 4. — P. 851 – 859.
3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
4. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
5. *Boichuk A. A., Shegda L. M.* Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems // Different. Equat. — 2011. — **47**, № 4. — P. 453 – 461.
6. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Вироджені нелінійні крайові задачі // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 9. — С. 1174 – 1188.
7. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Умови біфуркації розв'язків вироджених крайових задач // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 2. — С. 147 – 154.
8. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2013. — **53**, № 6. — P. 777 – 788.
9. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Каранджулов Л. И.* Нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 9. — С. 1186 – 1193.

Одержано 15.09.15