УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ТА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ СТЄКЛОВА В ТОНКИХ ПЕРФОРОВАНИХ ОБЛАСТЯХ З ШВИДКОЗМІННОЮ ТОВЩИНОЮ ТА РІЗНИМИ ГРАНИЧНИМИ РОЗМІРНОСТЯМИ

А. В. Попов

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна
e-mail: popov256@gmail.com

We consider a Steklov spectral problem for an elliptic equation with rapidly oscillating coefficients for thin perforated domains with rapidly varying thickness. We describe asymptotic algorithms for solving such problems for thin perforated domains with different boundary dimensions. We also find asymptotic estimates for eigenvalues for a Steklov spectral problem for thin perforated domains with different boundary dimensions. With some symmetry conditions on the structure of the thin perforated domain and on the coefficients of the differential operators, we construct and substantiate asymptotic expansions for eigenfunctions and eigenvalues.

Рассматривается спектральная задача Стеклова для эллиптического дифференциального уравнения с быстропеременной толщиной. В статье объединено описание асимптотических алгоритмов для решения таких задач в тонких перфорированных областях с разными предельными размерностями. Получены асимптотические оценки для собственных значений спектральной задачи Стеклова в тонких перфорированных областях с разными предельными размерностями. При некоторых условиях симметрии на структуру тонкой перфорированной области и коэффициенты дифференциальных операторов построены и обоснованы асимптотические разложения для собственных функций и собственных значений.

1. Вступ. Крайовим та спектральним задачам у тонких областях (один із лінійних розмірів такої області значно менший за інші) присвячено велику кількість робіт (див. [2, 5, 12, 17, 21]). Причина такої популярності цих задач полягає у широких можливостях застосування математичних результатів до прикладних задач. Так, всі інженерні конструкції мають своїми елементами тонкі стержні, пластини та оболонки. Разом з тим самі крайові та спектральні задачі в тонких областях досить привабливі для асимптотичного аналізу, оскільки містять природний малий параметр ε — діаметр стержня (товщину пластини).

Для задач математичної фізики, що розглядаються в циліндричних тонких областях, застосовується спосіб, що передбачає введення такої заміни змінних $\left(\text{наприклад, } y = \dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, щоб тонка область втратила залежність від малого параметра ε. Але за рахунок такої заміни у рівнянні задачі малий параметр з'являється при старших похідних відповідних членів. Після цього для відшукання асимптотичного наближення застосовується метод Люстерника – Вишика [3].

Уперше такий підхід було застосовано в роботах А. Л. Гольденвейзера (див. [4, 5]). У монографії [5] розглядалися крайові задачі в тонких пружних однорідних ізотропних оболонках. Подальшій розробці цього методу, зокрема, присвячено роботи М. Г. Джавадова [6], С. О. Назарова [8, 14], А. Б. Васильєвої, В. Ф. Бутузова [2], D. Caillerie [17].

Однак описаний вище спосіб асимптотичного дослідження крайових задач у тонких циліндричних областях не підходить для вивчення крайових задач у тонких перфорованих областях з швидкозмінною товщиною. Для дослідження таких крайових задач використовуються методи теорії усереднення.

Методи теорії усереднення для тонких областей уперше було використано в роботі [16] при вивченні тривимірної задачі теорії пружності в неоднорідній тонкій циліндричній пластині. У 1991 р. в роботі [9] було запропоновано підхід до вивчення еліптичних та спектральних задач у тонких перфорованих областях із швидкозмінною товщиною. Дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків різних крайових задач у тонких областях із швидкозмінною товщиною присвячено роботи [7, 18, 20].

С. А. Назаровим [13] було виявлено тотожність процедури усереднення еліптичних крайових задач із швидкоосцилюючими коефіцієнтами в тонких квазішарах циліндричного типу в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ (не виключався випадок всього простору $\mathbb{R}^n$, перфорованого малими отворами) і побудови канонічної системи жорданових ланцюжків поліноміальних еліптичних в'язок. З допомогою цієї побудови було досліджено основні характеристики усереднених операторів (розміри, порядки елементів, еліптичність та формальну самоспряженість). Однак, як зазначено в [13, с. 3–5], цей метод не спрощує процедуру усереднення і при обґрунтуванні асимптотики необхідно вводити три групи обмежень, що звужують сферу застосування цих результатів.

У роботах [11, 22] було проведено асимптотичний аналіз спектральних задач Неймана та Діріхле в тонких перфорованих областях з швидкозмінною товщиною та різними граничними розмірностями, а саме: доведено теорему збіжності та побудовано асимптотичні розвинення для власних значень та власних функцій відповідних задач. Доведено асимптотичні оцінки у просторах Соболєва, що обґрунтовують побудовані розвинення.

2. Опис тонкої перфорованої області з швидкозмінною товщиною. Нехай $h_{\pm}^{(1)}(\xi')$, $h_{\pm}^{(2)}(\xi'), \ldots, h_{\pm}^{(d)}(\xi')$ — гладкі, додатні та 1-періодичні функції відносно змінних $\xi_1, \ldots, \xi_{n-d}$, де $\xi' := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d}$, $d, n \in \mathbb{N}$, $d < n$, $n \geq 2$, які визначають область

$$\omega = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \colon 0 < \xi_i < 1,\ i = \overline{1, n-d};\ -h_{-}^{(k)}(\xi') < \xi_{n-d+k} < h_{+}^{(k)}(\xi'),\ k = \overline{1, d} \right\};$$

T_0 — скінченне об'єднання замкнених областей класу $C^{2,\alpha}$, які належать ω та не перетинаються і не дотикаються між собою.

Введемо такі позначення:

$$\omega_0 = \omega \setminus T_0, \quad \Upsilon = \bigcup_{\mathbf{z}_0 \in \mathbb{Z}^n} \left(\overline{\omega_0} + \mathbf{z}_0 \right),$$

$$T_0^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot T_0 = \{x \colon \varepsilon^{-1} x \in T_0\}, \quad T^{\varepsilon} = \bigcup_{\mathbf{z}_0 \in \mathbb{Z}^n} \left(T_0^{\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{z}_0 \right),$$

де $\mathbf{z}_0 = (z_1, \ldots, z_{n-d}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$, ε — малий додатний параметр. Комірку періодичності ω_0 зображено на рис. 1.

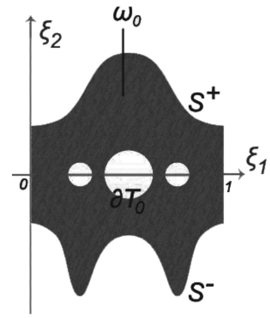

Рис. 1. Комірка періодичності ω_0.

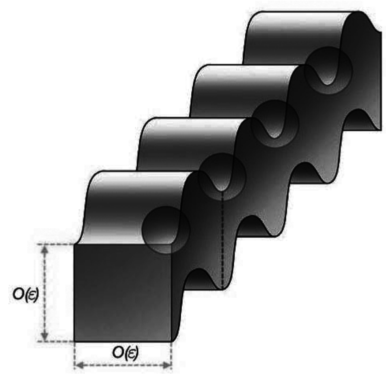

Рис. 2. Тонка перфорована область Ω_ε^{n-d}, $n=3$, $d=2$.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^{n-d}$, $\partial\,\Omega \in C^3$. Розглянемо модельну тонку перфоровану область $\Omega_\varepsilon^{n-d} = Q_\varepsilon \setminus T^\varepsilon$ з граничною розмірністю $n-d$, де

$$Q_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x' = (x_1, \ldots, x_{n-d}) \in \Omega,\ -\varepsilon\, h_-^{(k)}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) < x_{n-d+k} < \varepsilon\, h_+^{(k)}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right),\ k = \overline{1,d} \right\}.$$

Не зменшуючи загальності та для уникнення в подальшому додаткових технічних обчислень будемо вважати, що $\partial T^\varepsilon \cap \partial Q_\varepsilon = \varnothing$. Частини межі області Ω_ε^{n-d} позначимо так:

$$S_\varepsilon^{\pm,i} = \left\{ x \colon x' \in \Omega,\ x_{n-d+i} = \pm\varepsilon\, h_\pm^{(i)}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right), \right.$$

$$\left. x_{n-d+k} \in \left(-\varepsilon\, h_-^{(k)}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right),\ \varepsilon\, h_+^{(k)}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\right),\ k \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{i\} \right\},$$

$$S_\varepsilon^{\pm} = \bigcup_{i=1}^{d} S_\varepsilon^{\pm,i}, \quad G_\varepsilon = \partial T^\varepsilon \cap Q_\varepsilon, \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon^{n-d} \setminus \left(S_\varepsilon^{\pm} \cup Q_\varepsilon\right).$$

На рис. 2 – 4 зображено тонку перфоровану область для різних значень параметрів n і d.

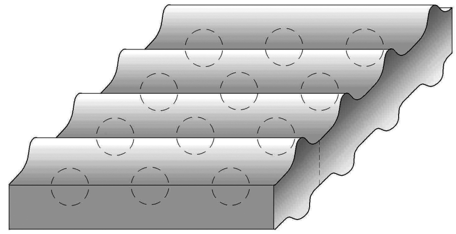

Рис. 3. Тонка перфорована область Ω_ε^{n-d}, $n = 3$, $d = 1$.

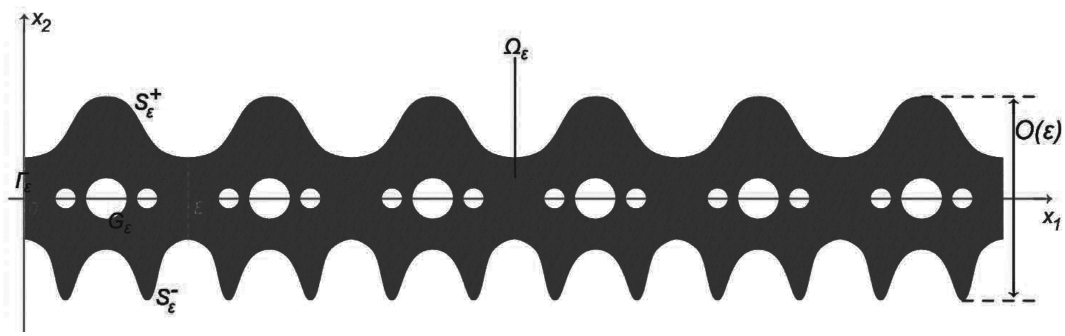

Рис. 4. Тонка перфорована область Ω_ε^{n-d}, $n = 2$, $d = 1$.

У подальшому також будемо використовувати тонку область

$$\widetilde{Q}_\varepsilon = \left\{ x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n \colon x' \in \Omega,\ x'' \in K_\varepsilon^{(d)} := (-\varepsilon H_-, \varepsilon H_+)^d \right\},$$

що містить у собі Q_ε. Тут $x'' = (x_{n-d+1}, x_{n-d+2}, \ldots, x_n)$ та

$$H_\pm := 1 + \max_{i=\overline{1,d}} \max_{\xi' \in \mathbb{R}^{n-d}} \left| h_\pm^{(i)}(\xi') \right|.$$

3. Постановка задачі та допоміжні твердження. ***3.1. Спектральна задача Стєклова.*** Нехай

$$L_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

— симетричний, рівномірно еліптичний диференціальний оператор, тобто

$$a_{ij}(\xi) = a_{ji}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

та існують сталі $\chi_1 > 0$ та $\chi_2 > 0$ такі, що

$$\chi_1 |\eta|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi) \eta_i \eta_j \le \chi_2 |\eta|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Зауваження 3.1. Далі будемо відкидати знак підсумовування за індексами i, j від 1 до n, що повторюються.

У тонкій перфорованій області Ω_ε^{n-d}, яка описана в п. 2, розглянемо спектральну задачу

$$
\begin{aligned}
&L_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^{n-d},\\
&\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\rho_\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{на} \quad G_\varepsilon,\\
&\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad S_\varepsilon^{\pm},\\
&u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

де $\lambda(\varepsilon)$ — спектральний параметр, $\rho_\varepsilon(x) = \rho\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$, функція $\rho(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, належить простору $C^{0,\alpha}$, є 1-періодичною за змінними $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-d})$ та обмеженою додатними сталими: $0 < \rho_0 \le \rho \le \rho_1$.

Основною метою статті є дослідження асимптотичної поведінки та побудови асимптотичних розвинень власних функцій та власних значень задачі (3.2) при $\varepsilon \to 0$.

3.2. Допоміжні твердження. Наведемо деякі допоміжні твердження (див. [3, 10]). Нехай H та V — сепарабельні гільбертові простори зі скалярними добутками $(\cdot\,,\,\cdot)_H$ та $(\cdot\,,\,\cdot)_V$ відповідно, $B\colon H \to V$ — компактний лінійний оператор, область значень якого є щільною в V.

Твердження 3.1 [10]. *Оператор $A_1 \equiv BB^*\colon V \to V$ є самоспряженим, додатним та компактним.*

Твердження 3.2 [10]. *Нехай $\operatorname{Ker} B^* = \{0\}$. Тоді оператор $A_2 \equiv B^*B\colon V \to V$ є самоспряженим, додатним та компактним.*

Лема 3.1 [3]. *Нехай $A\colon H \to H$ — самоспряжений, додатний та компактний оператор. Припустимо, що існують елементи $u \in H$, $\|u\|_H = 1$ та $\mu \in \mathbb{R}$ такі, що $\|Au - \mu u\|_H \le \beta$. Тоді:*

1. *Існує таке власне значення λ оператора A, що $|\mu - \lambda| \le \beta$.*

2. *Для всіх $d_0 > \beta$ існує $\widetilde{u} \in H$, $\|\widetilde{u}\|_H = 1$, таке, що*

$$\|u - \widetilde{u}\|_H \le 2d_0^{-1}\beta,$$

де $\widetilde{u}$ — лінійна комбінація власних функцій оператора A, яка відповідає власним значенням з інтервалу $(\mu - d_0, \mu + d_0)$.

Розглянемо наступну задачу: знайти функцію $N \in H^1_\sharp(\omega_0)$ таку, що

$$
\begin{aligned}
&L_{\xi\xi}N(\xi) = F_0(\xi) + \partial_{\xi_i}F_i(\xi), \quad \xi \in \omega_0,\\
&\sigma_\xi(N(\xi)) = \Phi_0^{\pm}(\xi) + F_i(\xi)\nu_i(\xi), \quad \xi \in S^{\pm},\\
&\sigma_\xi(N(\xi)) = \Phi_1(\xi) + F_i(\xi)\nu_i(\xi), \quad \xi \in \partial T_0,\\
&\langle N\rangle_{\omega_0} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Тут $H^1_\sharp(\omega_0) := \{v \in H^1(\omega_0)\colon v$ — 1-періодичні за змінними $\xi'\}$,

$$L_{\xi\xi}(N) := \partial_{\xi_i}\left(a_{ij}(\xi)\,\partial_{\xi_j}N(\xi)\right), \quad \sigma_\xi(N) := a_{ij}(\xi)\partial_{\xi_j}N(\xi)\,\nu_i(\xi),$$

$$\langle N\rangle_{\omega_0} = \frac{1}{|\omega_0|}\int\limits_{\omega_0} N(\xi)\,d\xi,$$

$(\nu_1(\xi),\ldots,\nu_n(\xi))$ — зовнішня нормаль до $\partial\omega_0$, $\partial_{\xi_i}F = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_i}$, $|\omega_0|$ — міра Лебега області ω_0, $\{F_0,F_1,\ldots,F_n\} \subset L^2(\omega_0)$, $\Phi_1 \in L^2(\partial T_0)$, $\Phi_0^\pm \in L^2(S^\pm)$, $S^\pm = \bigcup_{i=1}^d S^{\pm,i}$,

$$S^{\pm,i} = \Big\{\xi\colon \xi' \in (0,1)^{n-d}, \xi_{n-d+i} = \pm h_\pm^{(i)}(\xi'),$$
$$\xi_{n-d+k} \in \left(-h_-^{(k)}(\xi'), h_+^{(k)}(\xi')\right),\ k \in \{1,\ldots,d\}\setminus\{i\}\Big\}.$$

Означення 3.1. *Функція $N \in H^1_\sharp(\omega_0)$ називається узагальненим розв'язком задачі (3.3), якщо для довільної функції $\psi \in H^1_\sharp(\omega_0)$*

$$\int\limits_{\omega_0} a_{ij}\,\partial_{\xi_j}N\,\partial_{\xi_i}\psi\,d\xi = \int\limits_{\omega_0}\left(F_i\partial_{\xi_i}\psi - F_0\psi\right)\,d\xi + \int\limits_{\partial T_0}\Phi_1\psi\,d\sigma_\xi + \int\limits_{S^\pm}\Phi_0^\pm\psi\,d\sigma_\xi.$$

Аналогічно, як у теоремі 1 [1, с. 339], можна показати, що задача (3.3) має єдиний узагальнений розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\int\limits_{\omega_0} F_0(\xi)d\xi = \int\limits_{S^\pm}\Phi_0^\pm(\xi)\,d\sigma_\xi + \int\limits_{\partial T_0}\Phi_1(\xi)\,d\sigma_\xi. \tag{3.4}$$

Крім того, для узагальненого розв'язку має місце апріорна оцінка

$$\|N\|_{H^1(\omega_0)} \le C\left(\sum_{i=0}^n \|F_i\|_{L^2(\omega_0)} + \|\Phi_1\|_{L^2(\partial T_0)} + \|\Phi_0^\pm\|_{L^2(S^\pm)}\right),$$

де стала C не залежить від N, $\{F_i\}$, $\Phi_0^\pm$, Φ_1.

Введемо позначення

$$S'_\beta\xi := \left((-1)^{\delta_{1,\beta}}\xi_1,\ldots,(-1)^{\delta_{n-d,\beta}}\xi_{n-d},\xi_{n-d+1},\ldots,\xi_n\right), \quad \beta = 1,\ldots,n-d, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Лема 3.2 [10]. *Якщо для деякого $\beta \in \{1,\ldots,n-1\}$ праві частини задачі (3.3) задовольняють умови*

$$\Phi_0(S'_\beta(\xi)) = \Phi_0(\xi), \quad \xi \in \partial T_0, \quad \Phi_0^\pm(S'_\beta(\xi)) = \Phi_0^\pm(\xi), \quad \xi \in S^\pm,$$

$$F_i(S'_\beta(\xi)) = (-1)^{\delta_{i,\beta}}F_i(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \quad i = 0,1,2,\ldots,n,$$

то розв'язок задачі (3.3) є парною відносно $\frac{1}{2}$ *за змінною* ξ_β *функцією, тобто*

$$N(S'_\beta(\xi)) = N(\xi), \quad \xi \in \omega_0.$$

Якщо для деякого $\beta \in \{1, \ldots, n-1\}$ *праві частини задачі (3.3) задовольняють умови*

$$\Phi_0(S'_\beta(\xi)) = -\Phi_0(\xi), \quad \xi \in \partial T_0, \quad \Phi_0^\pm(S'_\beta(\xi)) = -\Phi_0^\pm(\xi), \quad \xi \in S^\pm,$$

$$F_i(S'_\beta(\xi)) = (-1)^{\delta_{i,\beta}+1} F_i(\xi), \quad \xi \in \omega_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

то розв'язок задачі (3.3) є непарною відносно $\frac{1}{2}$ *за змінною* ξ_β *функцією, тобто*

$$N(S'_\beta(\xi)) = -N(\xi), \quad \xi \in \omega_0.$$

Для функцій із просторів Соболєва, які задані на тонких перфорованих областях, так само, як і в [15] (гл. I, § 4.2), можна побудувати оператори продовження

$$\mathcal{P}_0 \colon H^1(\omega_0) \mapsto H^1(\omega),$$

$$\mathcal{P}_\varepsilon \colon H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d}) \mapsto H^1(Q_\varepsilon),$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon \colon H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d}) \mapsto H^1(\widetilde{Q}_\varepsilon)$$

такі, що $\mathcal{P}_0 u = u$, $\mathcal{P}_\varepsilon u = u$, $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon u = u$, якщо $u = \mathrm{const}$, та

$$\forall\, u \in H^1(\omega_0)\colon \quad \begin{aligned} &\|\mathcal{P}_0 u\|_{H^1(\omega)} \le c_1 \|u\|_{H^1(\omega_0)}, \\ &\|\nabla_\xi \mathcal{P}_0 u\|_{L^2(\omega)} \le c_1 \|\nabla_\xi u\|_{L^2(\omega_0)}, \end{aligned}$$

$$\forall\, u \in H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})\colon \quad \begin{aligned} &\|\mathcal{P}_\varepsilon u\|_{H^1(Q_\varepsilon)} \le c_2 \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})}, \\ &\|\nabla_x \mathcal{P}_\varepsilon u\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \le c_2 \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{n-d})}, \end{aligned}$$

$$\forall\, u \in H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})\colon \quad \begin{aligned} &\|\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon u\|_{H^1(\widetilde{Q}_\varepsilon)} \le c_3 \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})}, \\ &\|\nabla_x \widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon u\|_{L^2(\widetilde{Q}_\varepsilon)} \le c_3 \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{n-d})}. \end{aligned}$$

3.3. Допоміжна інтегральна тотожність. Нехай $\psi_0 \in H^1_\sharp(\omega_0)$ є слабким розв'язком (який можна періодично продовжити на Υ) такої крайової задачі на комірці періодичності ω_0:

$$\begin{aligned} &L_{\xi\xi}(\psi_0) = \Theta \quad \text{в} \quad \omega_0, \\ &\sigma_\xi(\psi_0) = \rho \quad \text{на} \quad \partial T_0, \\ &\sigma_\xi(\psi_0) = 0 \quad \text{на} \quad S^\pm, \\ &\langle \psi_0 \rangle_{\omega_0} = 0, \end{aligned}$$

де

$$\Theta = \widehat{\rho} \cdot |\omega_0|^{-1}, \quad \widehat{\rho} = \int\limits_{\partial T_0} \rho \, d\sigma_x.$$

Для цієї задачі виконується умова розв'язності (3.4). Тоді ε-періодична функція $\psi_0\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \Omega_\varepsilon^{n-d}$, є розв'язком такої задачі:

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_i}\left(a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \Theta\,\varepsilon^{-2} \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^{n-d},\\
&a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nu_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \rho_\varepsilon\,\varepsilon^{-1} \quad \text{на} \quad G_\varepsilon,\\
&a_{ij}^\varepsilon(x)\,\partial_{x_j}\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nu_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \quad \text{на} \quad S^\pm,\\
&\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Домноживши рівняння задачі на довільну функцію $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})$, $\varphi|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$ та зінтегрувавши по області Ω_ε^{n-d}, отримаємо інтегральну тотожність

$$\Theta\,\varepsilon^{-1}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^{n-d}}\varphi(x)\,dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} a_{ij}^\varepsilon(x)\,\partial_{\xi_j}\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,\partial_{x_i}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{G_\varepsilon}\rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Інтегральну тотожність (3.5) будемо неодноразово використовувати в подальших міркуваннях.

4. Еквівалентна та усереднена задачі. Введемо гільбертовий простір $H_\varepsilon :=$ $:= \left\{u \in H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})\colon\, u|_{\Gamma_\varepsilon} = 0\right\}$ зі скалярним добутком

$$\langle u,\, v\rangle_\varepsilon := \int\limits_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} a_{ij}^\varepsilon\partial_{x_i}u\partial_{x_j}v\,dx, \quad u, v \in H_\varepsilon.$$

Скалярний добуток в $L^2(G_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ будемо позначати таким чином:

$$(u, v)_\varepsilon := \int\limits_{G_\varepsilon}\rho_\varepsilon uv\,d\sigma_x, \quad u, v \in L^2(G_\varepsilon, \rho_\varepsilon).$$

Покажемо, що задача (3.2) еквівалентна спектральній задачі для деякого самоспряженого, додатного та компактного оператора. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned}
&L_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^{n-d},\\
&\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) = \rho_\varepsilon\,\varphi_\varepsilon \quad \text{на} \quad G_\varepsilon,\\
&\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad S_\varepsilon^\pm,\\
&u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Домноживши рівняння задачі (4.1) на довільну функцію $\Psi_\varepsilon \in H_\varepsilon$ та зінтегрувавши по Ω_ε^{n-d}, отримаємо тотожність

$$\langle u^\varepsilon, \Psi_\varepsilon \rangle_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon, B_\varepsilon \Psi_\varepsilon)_\varepsilon \quad \forall \Psi_\varepsilon \in H_\varepsilon, \tag{4.2}$$

де $B_\varepsilon \colon H_\varepsilon \to L^2(G_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ — оператор сліду.

Означення 4.1. *Функція $u^\varepsilon \in H_\varepsilon$ називається слабким розв'язком задачі (4.1), якщо виконується тотожність (4.2).*

Означення 4.2. *$\lambda(\varepsilon)$ називається власним значенням задачі (3.2), якщо існує $u^\varepsilon \in H_\varepsilon$, $u^\varepsilon \neq 0$, така, що*

$$\langle u^\varepsilon, \Psi_\varepsilon \rangle_\varepsilon = \lambda(\varepsilon)(B_\varepsilon u^\varepsilon, B_\varepsilon \Psi_\varepsilon)_\varepsilon \quad \forall \Psi_\varepsilon \in H_\varepsilon.$$

При цьому u^ε називається власною функцією, що відповідає власному значенню $\lambda(\varepsilon)$.

Позначимо $A_\varepsilon := \varepsilon B_\varepsilon B_\varepsilon^*$, де B_ε^* — спряжений оператор до B_ε. За твердженням 3.1 A_ε є самоспряженим, додатним та компактним.

Аналогічно тому, як це було зроблено в [10], можна довести наступне твердження.

Твердження 4.1. *Спектральна задача для A_ε є еквівалентною до (3.2).*

Таким чином, власні значення задачі можна впорядкувати таким чином (з урахуванням кратності):

$$0 < \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \le \lambda_3(\varepsilon) \le \ldots \le \lambda_m(\varepsilon) \le \ldots \to +\infty, \quad m \to +\infty.$$

Виберемо відповідні власні функції $u_m^\varepsilon \in H_\varepsilon$ так, щоб

$$(B_\varepsilon u_m^\varepsilon, B_\varepsilon u_k^\varepsilon)_\varepsilon = \varepsilon^{d-1} \delta_{m,k} \quad \forall m, k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Аналогічно тому, як це зроблено в [10], запишемо усереднену до (3.2) задачу

$$\begin{gathered} \widehat{L}u + \Theta\, \lambda\, u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \end{gathered} \tag{4.4}$$

де

$$\widehat{L}u = \sum_{p,q=1}^{n-d} \widehat{a}_{pq} \frac{\partial^2 u}{\partial x_p\, \partial x_q}, \quad \widehat{a}_{pq} = \left\langle a_{pq} + \sum_{j=1}^{n} a_{pj} \frac{\partial N_q}{\partial \xi_j} \right\rangle_{\omega_0}, \quad p, q = \overline{1, n-d}.$$

Функції $N_p \in H_\sharp^1(\omega_0)$, $p \in \{1, \ldots, n-d\}$, є розв'язками таких задач на комірці періодичності:

$$L_{\xi\xi}(N_p(\xi)) = -\partial_{\xi_i} a_{ip}(\xi), \quad \xi \in \omega_0,$$

$$\sigma_\xi(N_p(\xi)) = -a_{ip}(\xi)\nu_i(\xi), \quad \xi \in S^\pm \cup \partial T_0,$$

$$\langle N_p \rangle_{\omega_0} = 0.$$

5. Оцінки на власні значення.

Твердження 5.1. *Для довільного* $m \in \mathbb{N}$ *існує така додатна стала* C_m (*незалежна від* ε), *що*

$$C_0\, \varepsilon \le \lambda_m(\varepsilon) \le C_m\, \varepsilon, \tag{5.1}$$

де C_0 — *стала, що не залежить від* $m \in \mathbb{N}$ *та* ε.

Доведення. Згідно з мінімаксним принципом маємо

$$\lambda_m(\varepsilon) = \min_{\substack{H_m \subset H_\varepsilon \\ \dim H_m = m}} \max_{\substack{v \in H_m \\ v \neq 0}} R_\varepsilon(v),$$

де $R_\varepsilon(v) = \dfrac{\langle v, v\rangle_\varepsilon}{(v,v)_\varepsilon}$. Розглянемо простір $\mathcal{L}_m$, що породжений $w_1, \ldots, w_m$ першими власними функціями (ортонормованими в $L^2(\Omega)$) задачі

$$\begin{gathered} \chi_2 \Delta w(x') + \lambda\, w(x') = 0, \quad x' \in \Omega, \\ w(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Домножимо рівняння задачі (5.2) на довільну функцію $\phi \in H_0^1(\Omega)$ та зінтегруємо по Ω:

$$\chi_2 \int\limits_\Omega \nabla w \cdot \nabla \phi\, dx' = \lambda \int\limits_\Omega w\, \phi\, dx' \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{5.3}$$

Кожну функцію з $H_0^1(\Omega)$ можна розглядати як таку, що визначена на Q_ε та є сталою за змінними x''. Тоді її звуження на Ω_ε^{n-d} буде належати H_ε. Неважко бачити, що $\mathcal{L}_m$ є підпростором H_ε та $\dim \mathcal{L}_m = m$. Тоді з (3.1) та (5.3) отримуємо

$$\lambda(\varepsilon) \le \max_{v \in \mathcal{L}_m} \frac{\langle v, v\rangle_\varepsilon}{(v,v)_\varepsilon} = \max_{v \in \mathcal{L}_m} \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} a_{ij}^\varepsilon\, \partial_{x_i} v\, \partial_{x_j} v\, dx}{\displaystyle\int_{G_\varepsilon} \rho_\varepsilon\, v^2\, d\sigma_x} \le \max_{v \in \mathcal{L}_m} \frac{\chi_2 \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} (\partial_{x_i} v)^2\, dx}{\displaystyle\int_{G_\varepsilon} \rho_\varepsilon\, v^2\, d\sigma_x} =$$

$$= \widetilde{\lambda} \max_{v \in \mathcal{L}_m} \frac{\chi_2 \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} (\partial_{x_i} v)^2\, dx}{\displaystyle\int_{G_\varepsilon} \rho_\varepsilon\, v^2\, d\sigma_x} \le \widetilde{\lambda}\, \varepsilon^d \max_{v \in \mathcal{L}_m} \frac{\displaystyle\int_\Omega v^2\, dx}{\displaystyle\int_{G_\varepsilon} \rho_\varepsilon\, v^2\, d\sigma_x}.$$

Доведемо методом від супротивного, що

$$\max_{v \in \mathcal{L}_m} \frac{\displaystyle\int_\Omega v^2\, dx}{\displaystyle\int_{G_\varepsilon} \rho_\varepsilon\, v^2\, d\sigma_x} \le c \cdot \varepsilon^{1-d}.$$

Припустимо, що існують такі підпослідовність $\{\varepsilon'\}$ послідовності $\{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо через $\{\varepsilon\}$) та $v_\varepsilon \in H_m$, що

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-d} \int\limits_{G_\varepsilon} \rho_\varepsilon\, v_\varepsilon^2 d\sigma_x = 0.$$

Використавши тотожність (3.5) при $\varphi \equiv v_\varepsilon^2$ для кожного фіксованого ε, будемо мати

$$\Theta \prod_{i=1}^{d} \left(h_-^{(i)} + h_+^{(i)}\right) \int\limits_{\Omega} v_\varepsilon^2\, dx + \varepsilon \cdot \varepsilon^{-d} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} a_{ij}^\varepsilon(x)\, \partial_{\xi_j} \psi_0 \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_i}(v_\varepsilon^2)\, dx = \varepsilon \cdot \varepsilon^{-d} \int\limits_{G_\varepsilon} \rho_\varepsilon v_\varepsilon^2\, dx.$$

Підінтегральний вираз у другому інтегралі в лівій частині є обмеженою функцією, тому

$$\varepsilon \cdot \varepsilon^{-d} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} a_{ij}^\varepsilon(x)\, \partial_{\xi_j} \psi_0 \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_i}(v_\varepsilon^2)\, dx \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Права частина прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$ за введеними припущеннями.

Отже, переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$ в останній тотожності, отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} v_\varepsilon^2\, dx' = 0.$$

Оскільки послідовність $\{v_\varepsilon\}$ є обмеженою в $H_0^1(\Omega)$, то можна вибрати таку її підпослідовність, що $v_\varepsilon \to v_0$ в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Це означає, що $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Остання рівність суперечить умові $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Тому маємо

$$\lambda(\varepsilon) \le c_m \cdot \varepsilon.$$

Доведемо, що має місце оцінка $C_0\, \varepsilon \le \lambda_m(\varepsilon)$. Для цього скористаємося нерівністю (2.7) з [11]. Тоді

$$\lambda_m(\varepsilon) \ge \lambda_1(\varepsilon) = \min_{\substack{H_1 \subset H_\varepsilon \\ \dim H_1 = 1}} \max_{\substack{v \in H_1 \\ v \ne 0}} \frac{\langle v, v\rangle_\varepsilon}{(v, v)_\varepsilon} \ge c\, \varepsilon \min_{\substack{H_1 \subset H_\varepsilon \\ \dim H_1 = 1}} \max_{\substack{v \in H_1 \\ v \ne 0}} \frac{\|v\|^2_{L^2(G_\varepsilon, \rho_\varepsilon)}}{\|v\|^2_{L^2(G_\varepsilon, \rho_\varepsilon)}} = C_0\, \varepsilon.$$

Наведемо деякі твердження, що були доведені в [11].

Лема 5.1. *Існує лінійний оператор* $\mathrm{P}_\varepsilon\colon H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d}; \Gamma_\varepsilon) \mapsto H_0^1(\Omega)$ *такий, що для будь-якої функції* $u \in H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d}; \Gamma_\varepsilon)$

$$\|\mathrm{P}_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)} \le c_3 \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})}.$$

Наслідок 5.1. *Нехай для послідовності* $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d}; \Gamma_\varepsilon)$ *виконується нерівність*

$$\sup_{\varepsilon>0} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d}; \Gamma_\varepsilon)} \le c_4 \varepsilon^{\frac{d}{2}}.$$

Тоді

$$\varepsilon^{-\frac{d}{2}} \left\| u_\varepsilon - \mathrm{P}_\varepsilon u_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{n-d})} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Використовуючи наведені твердження, як і в [22], можна довести наступну теорему.

Теорема 5.1. *Нехай* $\{\lambda_m(\varepsilon)\}_{m\in\mathbb{N}}$ *та* $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *— впорядковані послідовності власних чисел задач (3.2) та (4.4) відповідно;* $\{u_m^\varepsilon\}_{m\in\mathbb{N}}$ *— послідовність відповідних власних функцій задачі (3.2), що ортонормовані умовою (4.3).*

Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda_m(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lambda_m.$$

Існує підпослідовність послідовності $\{\varepsilon\}$, *яку знову позначимо через* $\{\varepsilon\}$, *така, що для довільного* $m \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}_\varepsilon u_m^\varepsilon \to u_m \quad \text{слабко в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *— відповідні власні функції задачі (4.4) такі, що*

$$\widehat{\rho} \int\limits_\Omega u_m\, u_k\, dx' = \delta_{m,k}, \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

6. Побудова асимптотичних розвинень. ***6.1. Умови симетрії.*** У цьому пункті введемо додаткові припущення для тонкої області Ω_ε^{n-d} та коефіцієнтів диференціального оператора L_ε. Будемо вважати, що:

S$_1$) $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}$, функції $h_\pm^{(k)}$, $k = \overline{1, d}$, є парними за кожною змінною $\xi_1, \ldots, \xi_{n-d}$;

S$_2$) $\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{n-d} \colon x_i \in (0,1),\ i = 1, \ldots, n-d\}$;

S$_3$) комірка періодичності ω_0 є симетричною відносно гіперплощин

$$\xi_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, \ldots, n-d;$$

S$_4$) коефіцієнти $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ оператора L_ε задовольняють умови

$$a_{ij}(S'_\beta \xi) = (-1)^{\delta_{i,\beta}+\delta_{j,\beta}} a_{ij}(\xi) \quad \forall\, \xi \in \Upsilon \quad \forall\, \beta = \overline{1, n-d},$$

де $S'_\beta \xi = \left((-1)^{\delta_{1,\beta}}\xi_1, \ldots, (-1)^{\delta_{n-d,\beta}}\xi_{n-d}, \xi_{n-d+1}, \ldots, \xi_n\right)$.

Зауваження 6.1. Умови **S**$_1$ – **S**$_4$ будемо позначати $\mathcal{S}(d)$.

Зауваження 6.2. Уперше описані вище умови симетрії з'явились в [1] (гл. 6, § 3). Там було показано, що умови симетрії для крайових задач з швидкоосцилюючими коефіцієнтами дозволяють суттєво зменшити об'єм обчислень локальних та усереднених характеристик композитного матеріалу.

6.2. Побудова асимптотичних розвинень. За виконання умов симетрії $\mathcal{S}(d)$ усереднена задача (4.4) набирає вигляду

$$\begin{gathered} \sum_{p=1}^{n-d} \widehat{a}_{pp} \frac{\partial^2 u(x')}{\partial x_p^2} + \Theta\lambda u(x') = 0, \quad x' \in \Omega, \\ u(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{6.1}$$

$$\widehat{a}_{pp} \equiv \left\langle a_{pp} + \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{pj}\, \partial_{\xi_j} N_p \right\rangle_{\omega_0}, \quad \Theta = \widehat{\rho} \cdot |\omega_0|^{-1}.$$

Неважко перевірити, що функція

$$v_{k_1 \ldots k_{n-d}}(x') = \sin(\pi k_1 x_1)\, \sin(\pi k_2 x_2) \ldots \sin(\pi k_{n-d} x_{n-d}), \quad x' \in \Omega, \quad k_p \in \mathbb{N},$$

є власною функцією задачі (6.1), а множина попарно ортогональних функцій

$$\left\{ \prod_{p=1}^{n-d} \sin(\pi\, k_p\, x_p) \right\}_{k_p \in \mathbb{N}}$$

є щільною в $L^2(\Omega)$. Власній функції $v_{k_1 \cdots k_{n-d}}$ відповідає власне значення

$$\lambda = \frac{\pi^2}{\Theta} \sum_{p=1}^{n-d} k_p^2\, \widehat{a}_{pp},$$

кратність якого визначається кількістю точок з координатами з натуральної множини чисел, що лежать на поверхні $\lambda = \dfrac{\pi^2}{\Theta} \sum_{p=1}^{n-d} x_p^2\, \widehat{a}_{pp}$. Впорядкуємо власні значення задачі (6.1) з урахуванням їхньої кратності у неспадну послідовність:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_m \le \ldots, \quad \lim_{m \to +\infty} \lambda_m = +\infty.$$

Розглянемо довільне власне значення λ_m кратності r з цієї послідовності, для якого

$$\lambda_{m-1} < \lambda_m = \ldots = \lambda_{m+r-1} = \frac{\pi^2}{\Theta} \sum_{p=1}^{n-d} k_{ps}^2\, \widehat{a}_{pp} < \lambda_{m+r}, \quad k_{ps} \in \mathbb{N}, \quad s = \overline{1, r}.$$

Власні функції усередненої задачі (6.1), що відповідають λ_m, позначимо так:

$$v_s(x') := \prod_{p=1}^{n-d} \sin(\pi k_{p,s} x_p), \quad x' \in \Omega, \quad s = \overline{1, r}.$$

Будемо шукати асимптотичні розвинення для власних функцій $u_m^\varepsilon, \ldots, u_{m+r-1}^\varepsilon$ та власних значень $\lambda_m(\varepsilon), \ldots, \lambda_{m+r-1}(\varepsilon)$ задачі (3.2) у вигляді

$$R_\varepsilon^{(s)}(x) := v_s(x') + \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q \sum_{\alpha} N_\alpha^{(s,q)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) D^\alpha v_s(x'), \tag{6.2}$$

$$\Lambda_\varepsilon^{(s)} := \varepsilon \lambda_m + \varepsilon^3 \lambda_3^{(s)} + \varepsilon^5 \lambda_5^{(s)} + \ldots, \quad s = 1, \ldots, r, \tag{6.3}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha \equiv \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $N_\alpha^{(s,q)}(\xi)$, $\xi \in \Upsilon$, — 1-періодичні за змінними $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-d})$ функції, що будуть визначені нижче.

Діючи на $R_\varepsilon^{(s)}$ диференціальними операторами рівняння та крайових умов задачі (3.2), при кожному фіксованому $s \in \{1, \ldots, r\}$ одержуємо

$$L_\varepsilon(R_\varepsilon^{(s)}(x)) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \varepsilon^k \sum_\alpha \left[L_{\xi\xi}\left(N_\alpha^{(s,k+2)}(\xi)\right) + \theta_\alpha(j)\,\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(\xi) N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,k+1)}(\xi)\right) + \right.$$

$$\left. + \theta_\alpha(j) a_{ij}(\xi)\,\frac{\partial N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,k+1)}(\xi)}{\partial \xi_i} + \widetilde{\theta}_\alpha(i,j) N_{\mu_{ij}(\alpha)}^{(s,k)}(\xi) a_{ij}(\xi)\right]\Bigg|_{\xi=\varepsilon^{-1}x} D^\alpha v_s(x'),$$

$$\sigma_\varepsilon(R_\varepsilon^{(s)}(x)) = \sum_\alpha \left[\sigma_\xi(N_\alpha^{(s,1)}(\xi)) + \theta_\alpha(j) a_{ij}(\xi) N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,0)}(\xi)\nu_i(\xi)\right]\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x} D^\alpha v_s(x') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \sum_\alpha \left[\sigma_\xi(N_\alpha^{(s,k+1)}(\xi)) + \theta_\alpha(j) a_{ij}(\xi) N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,k)}(\xi)\nu_i(\xi)\right]\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x} D^\alpha v_s(x').$$

Підставляючи розвинення (6.2), (6.3) при кожному фіксованому $s \in \{1, \ldots, r\}$ у рівняння та крайові умови задачі (3.2), розділяючи швидкі $\xi = \varepsilon^{-1}x$ та повільні x змінні, групуючи доданки при однакових степенях ε, отримуємо рекурентну послідовність задач для визначення функцій $\{N_\alpha^{(s,q)} \in H_\sharp^1(\omega_0)\}_{q=0,1,2,\ldots}$:

$$\begin{gathered} L_{\xi\xi} N_\alpha^{(s,q+1)} + \widetilde{M}_\alpha^{(s,q)} = 0 \quad \text{в} \quad \omega_0, \\ \sigma_\xi\left(N_\alpha^{(s,q+1)}\right) + \sum_{i,j=1}^n \theta_\alpha(j)\, a_{ij}\, N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,q)}\, \nu_i = \sum_{t=1}^q \lambda_{2t-1}^{(s)}\, \rho\, N_\alpha^{(s,q-t)} \quad \text{на} \quad \partial T_0, \\ \sigma_\xi\left(N_\alpha^{(s,q+1)}\right) + \sum_{i,j=1}^n \theta_\alpha(j)\, a_{ij}\, N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,q)}\, \nu_i = 0 \quad \text{на} \quad S^\pm, \\ \int_{\partial T_0} \rho\, N_\alpha^{(s,q+1)}\, d\sigma_\xi = 0, \end{gathered} \tag{6.4}$$

де

$$\widetilde{M}_\alpha^{(s,q)} = \sum_{i,j=1}^n \left[\theta_\alpha(j)\,\partial_{\xi_i}\left(a_{ij} N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,q)}\right) + \theta_\alpha(j) a_{ij}\,\partial_{\xi_i} N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,q)} + \widetilde{\theta}_\alpha(i,j) a_{ij} N_{\mu_{ij}(\alpha)}^{(s,q-1)}\right],$$

$$\mu_j(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, 1-\alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n),$$

$$\mu_{ij}(\alpha) = \mu_i(\mu_j(\alpha)), \quad \theta_\alpha(j) = (-(\pi k_{js})^2)^{1-\alpha_j}, \quad \widetilde{\theta}_\alpha(i,j) = \theta_\alpha(j)\,\theta_{\mu_i(\alpha)}(j).$$

Зауваження 6.3. Вважаємо, що для всіх $\xi \in \Upsilon$ $N_\alpha^{(s,0)}(\xi) = 0$, якщо $|\alpha| = 1$, і $N_\alpha^{(s,0)}(\xi) = 1$, якщо $|\alpha| = 0$, $N_\alpha^{(s,-1)}(\xi) = 0$.

При $q = 0$ маємо крайову задачу

$$L_{\xi\xi} N_\alpha^{(s,1)} + \theta_\alpha(j) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,0)}(\xi) \right) = 0 \quad \text{в} \quad \omega_0,$$

$$\sigma_\xi \left(N_\alpha^{(s,1)} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \theta_\alpha(j)\, a_{ij}\, N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,0)}\, \nu_i = 0 \quad \text{на} \quad \partial T_0 \cup S^{\pm}, \tag{6.5}$$

$$\int_{\partial T_0} \rho N_\alpha^{(s,1)}\, d\sigma_\xi = 0.$$

Очевидно, що умова розв'язності (3.4) для задачі (6.5) виконується. Застосовуючи умову розв'язності до задач (6.4) і використовуючи лему 3.2, отримуємо наступне твердження.

Лема 6.1. *При кожному фіксованому $s \in \{1, \ldots, r\}$ функції $\{N_\alpha^{(s,q)}\}$ однозначно визначаються з рекурентної послідовності задач (6.4) тоді і лише тоді, коли для кожного непарного числа $q \in \mathbb{N}$*

$$\lambda_q^{(s)} = \Theta^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle (\pi k_{is})^2\, a_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(N_{\mu_j([0])}^{(s,q)} \right) - \widetilde{\theta}_{[0]}(i,j)\, a_{ij}\, N_{\mu_j([0])}^{(s,q-1)} \right\rangle_{\omega_0},$$

де $[0] := (0, \ldots, 0)$, $\Theta = \widehat{\rho}\,|\omega_0|^{-1}$.

Крім того, для довільного мультиіндексу α та довільного $q \in \mathbb{N}$

$$N_\alpha^{(s,q)} \equiv 0, \quad \textit{якщо} \quad |\alpha| + q \quad \textit{— непарне число},$$

$$N_\alpha^{(s,q)}(S'_\beta \xi) = (-1)^{\delta_\alpha(\beta)} N_\alpha^{(s,q)}(\xi) \quad \forall\, \xi \in \Upsilon \quad \forall\, \beta = 1, \ldots, n-d,$$

де $\delta_\alpha(\beta) := \delta_{\alpha_1,\beta} + \delta_{2\alpha_2,\beta} + \ldots + \delta_{(n-d)\alpha_{n-d},\beta}$.

6.3. Обґрунтування побудованих розвинень. Для довільного непарного $p \in \mathbb{N}$ і кожного фіксованого $s \in \{1, \ldots, r\}$ розглянемо часткові суми асимптотичних рядів (6.2), (6.3):

$$R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon^k \sum_\alpha N_\alpha^{(s,k)}(\xi) D^\alpha v_s(x'), \quad x \in \Omega_\varepsilon^{n-d}, \quad \Lambda_{\varepsilon,p}^{(s)} = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon^k \lambda_k^{(s)}.$$

Діючи на $R_{\varepsilon,p}^{(s)}$ та $\Lambda_{\varepsilon,p}^{(s)}$ диференціальними операторами рівняння та крайових умов задачі (3.2), при кожному фіксованому $s \in \{1, \ldots, r\}$ маємо

$$L_\varepsilon(R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x)) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \varepsilon^k \sum_\alpha \left[L_{\xi\xi} \left(N_\alpha^{(s,k+2)}(\xi) \right) + \widetilde{M}_\alpha^{(s,k+1)}(\xi) \right] + \varepsilon^{p-1} F_1^{(s)}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon^{n-d},$$

де

$$F_1^{(s)}(x) = \sum_\alpha \left[\widetilde{M}_\alpha^{(s,p)}(\xi) + \varepsilon\, \widetilde{\theta}_\alpha(i,j) a_{ij}(\xi) N_\alpha^{(s,p)}(\xi) \right] \Big|_{\xi = \varepsilon^{-1} x} D^\alpha v_s(x'),$$

$$\sigma_\varepsilon(R_\varepsilon^{(s)}(x)) = \sum_\alpha \left[\sigma_\xi(N_\alpha^{(s,1)}(\xi)) + \theta_\alpha(j)a_{ij}(\xi)N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,0)}(\xi)\nu_i(\xi)\right]\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x} D^\alpha v_s(x')+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\varepsilon^k\sum_\alpha \left[\sigma_\xi(N_\alpha^{(s,k+1)}(\xi)) + \theta_\alpha(j)a_{ij}(\xi)N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,k)}(\xi)\nu_i(\xi)\right]\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x} D^\alpha v_s(x')+$$

$$+\varepsilon^p F_2^{(s)}(x), \quad x\in S^\pm\cup G_\varepsilon,$$

$$F_2^{(s)}(x) = \sum_\alpha a_{ij}(\xi)\theta_\alpha(j)N_{\mu_j(\alpha)}^{(s,p)}(\xi)\nu_i(\xi)\Big|_{\xi=\varepsilon^{-1}x} D^\alpha v_s(x').$$

З леми 6.1 випливає, що $R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x) = 0$ при $x\in\Gamma_\varepsilon$.

Використовуючи оцінки для слідів на $S_\varepsilon^\pm$ функцій з $H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})$ та тотожність (3.5), отримуємо наступне твердження.

Лема 6.2. *Для кожного фіксованого $s\in\{1,\ldots,r\}$ справджуються оцінки*

$$\left\|F_1^{(s)}\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{n-d})} \le c_1\varepsilon^{\frac{d}{2}},$$

$$\left\|F_2^{(s)}\right\|_{L^2(S_\varepsilon^\pm)} \le c_2\,\varepsilon^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}},$$

$$\left\|F_2^{(s)}\right\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le c_3\,\varepsilon^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, $R_{\varepsilon,p}^{(s)}$ задовольняє задачу

$$\begin{gathered} L_\varepsilon(R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x)) = \varepsilon^{p-1}F_1^{(s)}(x), \quad x\in\Omega_\varepsilon^{n-d},\\ \sigma_\varepsilon(R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x)) = \rho_\varepsilon\,\Lambda_{\varepsilon,p}^{(s)}R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x) + \varepsilon^p F_2^{(s)}(x), \quad x\in G_\varepsilon,\\ \sigma_\varepsilon(R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x)) = \varepsilon^p F_2^{(s)}(x), \quad x\in S_\varepsilon^\pm,\\ R_{\varepsilon,p}^{(s)}(x) = 0, \quad x\in\Gamma_\varepsilon. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Позначимо $\widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(s)} = \varepsilon^{-1}\Lambda_{\varepsilon,p}^{(s)}$. Припустимо, що асимптотичні ряди $\widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(s)}$, $s=\overline{1,r}$, розпадаються на k серій. Тобто існує число l таке, що для довільного непарного $p\ge l$ при достатньо малих ε

$$\widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(1)} = \ldots = \widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(r_1)} < \widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(r_1+1)} = \ldots = \widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(r_1+r_2)} < \ldots < \widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(r_1+\ldots+r_{k-1}+1)} = \ldots = \widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(r)}. \tag{6.7}$$

Тут $r_0=0$, $r_1+\ldots+r_k=r$, $\tau_{i,t}=r_1+\ldots+r_{i-1}+t$, $i\in\{1,\ldots,k\}$.

Зауваження 6.4. Для довільних $i,h\in\{1,\ldots,k\}$, $i\ne h$, та достатньо малих ε

$$\left|\left[\widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(h)}\right]^{-1} - \left[\widetilde\Lambda_{\varepsilon,p}^{(i)}\right]^{-1}\right| \ge c\,\varepsilon^l. \tag{6.8}$$

Теорема 6.1. *Нехай λ_m — r-кратне власне значення усередненої задачі (6.1), $R^{(s)}_{\varepsilon,p}$ та $\Lambda^{(s)}_{\varepsilon,p}$ — формальні асимптотичні ряди (6.2) та (6.3) відповідно, причому $\left\{\widetilde{\Lambda}^{(s)}_{\varepsilon,p}\right\}_{s=1}^{r}$ розпадаються на k серій (6.7).*

Тоді для довільного непарного $p \in \mathbb{N}$ та довільних $i \in \{1,\ldots,k\}$, $t \in \{1,\ldots,r_i\}$ при достатньо малих значеннях ε мають місце асимптотичні оцінки

$$\left|\widetilde{\Lambda}^{(\tau_{i,1})}_{\varepsilon,p} - \varepsilon^{-1}\lambda_{m+\tau_{i,t}-1}(\varepsilon)\right| \le c_1\varepsilon^{p+1}, \tag{6.9}$$

$$\left\|R^{(\tau_{i,t})}_{\varepsilon,p} - \widetilde{u}_\varepsilon\right\|_{H^1(\Omega^{n-d}_\varepsilon)} \le c_2\varepsilon^{p+\frac{d}{2}}, \tag{6.10}$$

де функція $\widetilde{u}_\varepsilon$ є лінійною комбінацією власних функцій $\{u^\varepsilon_{m+r_1+\ldots+r_{i-1}},\ldots,u^\varepsilon_{m+r_1+\ldots+r_i-1}\}$ задачі (3.2), які ортонормовані умовами (4.3).

Якщо для деякої серії $r_i = 1$, то визначена стала $d_{\varepsilon,p}$ є такою, що

$$\left\|R^{(\tau_{i,1})}_{\varepsilon,p} - \gamma_p(\varepsilon)u^\varepsilon_{m+r_1+\ldots+r_{i-1}}\right\|_{H^1(\Omega^{n-d}_\varepsilon)} \le c_3\varepsilon^{p+\frac{d}{2}},$$

де $\gamma_p(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2}}\|R^{(\tau_{i,1})}_{\varepsilon,p}\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)}$.

Доведення. Розглянемо довільне $p > l+1$. Нехай $\varphi^{(s)}_\varepsilon \in H_\varepsilon$ є слабким розв'язком задачі

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\varphi^{(s)}_\varepsilon(x)) &= \varepsilon^{p-1}F^{(s)}_1(x), \quad x \in \Omega^{n-d}_\varepsilon,\\ \sigma_\varepsilon(\varphi^{(s)}_\varepsilon(x)) &= \varepsilon^{p}F^{(s)}_2(x), \quad x \in G_\varepsilon \cup S^\pm_\varepsilon. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Використовуючи апріорні оцінки для розв'язків крайових еліптичних задач у тонких перфорованих областях, маємо

$$\left\|\varphi^{(s)}_\varepsilon\right\|_{H_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{\frac{d}{2}+p-1}. \tag{6.12}$$

Віднімаючи від (6.6) задачу (6.11), отримуємо

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(R^{(s)}_{\varepsilon,p}(x) - \varphi^{(s)}_\varepsilon(x)) &= 0, \quad x \in \Omega^{n-d}_\varepsilon,\\ \sigma_\varepsilon(R^{(s)}_{\varepsilon,p}(x) - \varphi^{(s)}_\varepsilon(x)) &= \rho_\varepsilon(x)\,\Lambda^{(s)}_{\varepsilon,p}\,R^{(s)}_{\varepsilon,p}(x), \quad x \in G_\varepsilon,\\ \sigma_\varepsilon(R^{(s)}_{\varepsilon,p}(x) - \varphi^{(s)}_\varepsilon(x)) &= 0, \quad x \in S^\pm_\varepsilon,\\ R^{(s)}_{\varepsilon,p}(x) - \varphi^{(s)}_\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Використовуючи означення оператора $A_\varepsilon \equiv \varepsilon B_\varepsilon B^*_\varepsilon\colon L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon) \to L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)$, для кожного фіксованого $s \in \{1,\ldots,r\}$ отримуємо операторну рівність, що еквівалентна задачі (6.13):

$$R^{(s)}_{\varepsilon,p} - \varphi^{(s)}_\varepsilon = \widetilde{\Lambda}^{(s)}_{\varepsilon,p}\,A_\varepsilon\left(R^{(s)}_{\varepsilon,p}\right), \quad s \in \{1,\ldots,r\}. \tag{6.14}$$

Зауваження 6.5. Тут і далі будемо писати $R^{(s)}_{\varepsilon,p}$, $\varphi^{(s)}_{\varepsilon}$, зокрема, в сенсі сліду на G_ε.

Для часткових сум мають місце такі оцінки:

$$0 < c_1 \le \widetilde{\Lambda}^{(s)}_{\varepsilon,p} \le c_2, \tag{6.15}$$

$$c_3\, \varepsilon^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \le \left\| R^{(s)}_{\varepsilon,p} \right\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} \le c_4\, \varepsilon^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}. \tag{6.16}$$

Зокрема, остання нерівність випливає з тотожності (3.5). Розділивши рівність (6.14) на $\|R^{(s)}_{\varepsilon,p}\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)}$ та врахувавши оцінки (6.12), (6.16) та тотожність (3.5), отримаємо нерівність

$$\left\| A_\varepsilon \left(w^{(s)}_{\varepsilon,p} \right) - \left[\widetilde{\Lambda}^{(s)}_{\varepsilon,p} \right]^{-1} w^{(s)}_{\varepsilon,p} \right\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} \le c\, \varepsilon^{p-1} =: \beta_p(\varepsilon). \tag{6.17}$$

Розглянемо інтервали

$$I_0 = \{\mu \in \mathbb{R} \colon |\mu - \lambda_m^{-1}| < \delta\},$$

$$I_p^{(i)} = \left\{ \mu \in \mathbb{R} \colon \left| \mu - \left[\widetilde{\Lambda}^{(\tau_{i,1})}_{\varepsilon,p} \right]^{-1} \right| < \beta_p(\varepsilon) \right\},$$

де $\delta = \dfrac{1}{4} \min\left\{ (\lambda_{m-1})^{-1} - (\lambda_m)^{-1}; (\lambda_m)^{-1} - (\lambda_{m+r})^{-1} \right\}$. Для достатньо малого ε справедливими є наступні твердження:

M_1. В I_0 знаходяться лише власні значення оператора A_ε:

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_{m+r-1}(\varepsilon)} \le \frac{\varepsilon}{\lambda_{m+r-2}(\varepsilon)} \le \ldots \le \frac{\varepsilon}{\lambda_m(\varepsilon)}.$$

Це випливає з теореми 5.1.

M_2. $I_p^{(i)}(\varepsilon) \subset I_0\ \forall i = \overline{1,k}$, $I_p^{(i)}(\varepsilon) \cap I_p^{(j)}(\varepsilon)$, $i \ne j$, $I_p^{(i)}(\varepsilon)$ знаходиться справа від $I_p^{(i+1)}(\varepsilon)$ на дійсній осі.

M_3. $I_{p+2}^{(i)}(\varepsilon) \subset I_p^{(i)}(\varepsilon)\ \forall i = \overline{1,k}$. Це випливає з (6.15) та того, що

$$\left| \left[\widetilde{\Lambda}^{(s)}_{\varepsilon,p} \right]^{-1} - \left[\widetilde{\Lambda}^{(s)}_{\varepsilon,p+2} \right]^{-1} \right| \le c\varepsilon^{p+1}.$$

M_4. $I_p^{(i)}(\varepsilon)$ містить власні значення оператора A_ε. Це випливає з леми 3.1 та (6.17).

Доведемо, що для достатньо малих ε

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_{m+\tau_{i,t}-1}(\varepsilon)} \in I_p^{(i)}(\varepsilon) \quad \forall i = \overline{1,k} \quad \forall t = \overline{1,r_i}, \tag{6.18}$$

звідки можемо отримати (6.9).

У випадку, коли $r_i = 1\ \forall i = \overline{1,k}$, включення (6.18) випливають автоматично з тверджень $\mathrm{M}_1 - M_4$. Припустимо, що $r_i > 1$ для деякого $i = \overline{1,k}$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $r_1 > 1$. Припустимо, що кількість власних значень оператора A_ε, що потрапляють в $I_p^{(1)}$, є меншою за r_1. В лемі 3.1 виберемо $d = d(\varepsilon)$ так, щоб

$$d(\varepsilon) > \beta_{p+2}(\varepsilon), \quad \varepsilon^{p+1}\, d^{-1}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Тоді кількість власних значень A_ε, що потрапляють в інтервал

$$\left\{\mu \in \mathbb{R}\colon \left|\mu - \left[\widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,1})}\right]^{-1}\right| < d(\varepsilon)\right\},$$

також буде меншою за r_1. Крім того, з леми 3.1 випливає, що

$$\left\| w_{p+2}^{(s)} - \widetilde{u}_\varepsilon \right\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} \le c\,\varepsilon, \quad s = \overline{1, r_1}, \tag{6.19}$$

де $\widetilde{u}_\varepsilon = \sum_{t=1}^{r_1'} \alpha_{st}(\varepsilon) u_{m+t-1}^\varepsilon$, $r_1' < r_1$, $\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} = 1$.

З (6.16) отримуємо

$$\left\| w_{\varepsilon,p+2}^{(s)} - \widetilde{u}_\varepsilon \right\|^2_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} \ge c\,\varepsilon^{1-d} \left\| R_{\varepsilon,p+2}^{(s)} - \sum_{t=1}^{r_1'} \widetilde{\alpha}_{st}(\varepsilon) u_{m+t-1}^\varepsilon \right\|^2_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)},$$

де $\widetilde{\alpha}_{st}(\varepsilon) = \left\| R_{\varepsilon,p+2}^{(s)} \right\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} \alpha_{st}(\varepsilon)$. На підставі (4.3) маємо

$$1 = \|\widetilde{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} = \sum_{t=1}^{r_1'} \alpha_{st}^2(\varepsilon) \|u_{m+t-1}^\varepsilon\|^2_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} = \varepsilon^{d-1} \sum_{t=1}^{r_1'} \alpha_{st}^2(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{d-1} \sum_{t=1}^{r_1'} \widetilde{\alpha}_{st}^2(\varepsilon) \left\| R_{\varepsilon,p+2}^{(s)} \right\|^{-2}_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)},$$

звідки $\sum_{t=1}^{r_1'} \widetilde{\alpha}_{st}^2(\varepsilon) = \varepsilon^{1-d} \left\| R_{\varepsilon,p+2}^{(s)} \right\|^2_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)}$, і на підставі (6.16) отримуємо

$$c_0 \le \sum_{t=1}^{r_1'} \widetilde{\alpha}_{st}^2(\varepsilon) \le c_1.$$

Це означає, що $\widetilde{\alpha}_{st}^2(\varepsilon) \to \widehat{\alpha}_{st}\ \forall s = \overline{1, r_1}\ \forall t = \overline{1, r_1'}$.

Таким чином, використовуючи тотожність (3.5), з (6.19) одержуємо

$$\Theta\,\varepsilon^{-d} \left\| R_{\varepsilon,p+2}^{(s)} - \sum_{t=1}^{r_1'} \widetilde{\alpha}_{st}(\varepsilon)\, u_{m+t-1}^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon^{n-d})} + c_1\,\varepsilon^{1-d} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^{n-d}} a_{ij}^\varepsilon(x)\,\partial_{\xi_j}\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_i} \times$$

$$\times \left(R_{\varepsilon,p+2}^{(s)} - \sum_{t=1}^{r_1'} \widetilde{\alpha}_{st}(\varepsilon)\, u_{m+t-1}^\varepsilon \right)^2 dx \le c_2\,\varepsilon.$$

Модуль другого доданка в лівій частині цієї нерівності не перевищує $c\,\varepsilon$ і тому, переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо

$$\left\| v_s - \sum_{t=1}^{r_1'} \widehat{\alpha}_{st}\, u_{m+t-1} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall s \in \{1, \ldots, r_1\}.$$

Прийшли до суперечності: r_1 лінійно незалежних функцій виражені через лінійну комбінацію лінійно незалежних функцій, кількість яких є меншою за r_1.

В інтервал $I_p^{(1)}(\varepsilon)$ при достатньо малих ε не може потрапляти більш ніж r_1 власних значень оператора A_ε, оскільки в деякому з інтервалів $I_p^{(2)}(\varepsilon), \ldots, I_p^{(k)}(\varepsilon)$, наприклад $I_p^{(2)}(\varepsilon)$, опиниться менш ніж r_2 власних значень оператора A_ε. А цього, як показано вище, не може бути.

Отже, мають місце включення (6.18), тобто

$$\left| \frac{\varepsilon}{\lambda_{m+\tau_{i,t}-1}(\varepsilon)} - \left[\widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,1})} \right]^{-1} \right| \le c\,\varepsilon^{p-1} \quad \forall i = \overline{1,k} \quad \forall t = \overline{1, r_i}.$$

Використовуючи твердження 5.1 та (6.15), отримуємо

$$\left| \widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,1})} - \varepsilon^{-1} \lambda_{m+\tau_{i,t}-1}(\varepsilon) \right| \le c_1 \varepsilon^{p-1},$$

звідки

$$\left| \widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p-2}^{(\tau_{i,1})} - \varepsilon^{-1} \lambda_{m+\tau_{i,t}-1}(\varepsilon) \right| \le c_1 \varepsilon^{p-1},$$

що і доводить нерівність (6.9).

Доведемо нерівність (6.10). Враховуючи нерівність (6.8) та те, що $p > l + 1$, можемо вибрати сталу $d(\varepsilon)$ в лемі 3.1 так, щоб $d(\varepsilon) = c\varepsilon^l > \beta_p(\varepsilon)$ та інтервали

$$\left\{ \mu \in \mathbb{R} \colon \left| \mu - \left[\widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,1})} \right]^{-1} \right| < d(\varepsilon) \right\}, \quad i = \overline{1,k},$$

були попарно неперетинними. Тоді, враховуючи включення (6.18) та друге твердження леми 3.1, для достатньо малих ε та довільних $i \in \{1, \ldots, k\}$ і $t \in \{1, \ldots, r_i\}$ маємо

$$\left\| w_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} - u_\varepsilon \right\|_{L^2(G_\varepsilon, \rho_\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{p-1-l},$$

де $u_\varepsilon = \sum_{q=1}^{r_i} \alpha_{\tau_{i,q}\tau_{i,t}}(\varepsilon)\, u^\varepsilon_{m+\tau_{t,i}-1}$, $\|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} = 1$. Використовуючи нерівності (6.16), отримуємо

$$\varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{d}{2}} \left\| R_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} - \widetilde{u}_\varepsilon \right\|_{L^2(G_\varepsilon, \rho_\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{p-1-l}, \tag{6.20}$$

де $\widetilde{u}_\varepsilon = \sum_{q=1}^{r_i} \widetilde{\alpha}_{\tau_{i,q}\tau_{i,t}}(\varepsilon)\, u^\varepsilon_{m+\tau_{t,i}-1}$, $\widetilde{\alpha}_{\tau_{i,q}\tau_{i,t}}(\varepsilon) = \left\| R_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} \right\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} \alpha_{\tau_{i,q}\tau_{i,t}}(\varepsilon)$. Аналогічно попереднім міркуванням

$$\sum_{q=1}^{r_i} \widetilde{\alpha}^2_{\tau_{i,q}\tau_{i,t}}(\varepsilon) = \varepsilon^{1-d} \left\| R_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} \right\|^2_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)}, \quad c_0 \le \sum_{t=1}^{r_1'} \widetilde{\alpha}^2_{\tau_{i,q}\tau_{i,t}}(\varepsilon) \le c_1.$$

З нерівності (6.20) отримаємо

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\| R_{\varepsilon,p-l-1}^{(\tau_{i,t})} - \widetilde{u}_\varepsilon \right\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{p-1-l+\frac{d}{2}}. \tag{6.21}$$

Оцінимо тепер $(R_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} - \widetilde{u}_\varepsilon)$ у просторі $H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})$. Розглянемо функцію

$$U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} = R_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} - \widetilde{u}_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^{(\tau_{i,t})}.$$

Неважко бачити, що $U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})}$ задовольняє задачу

$$L_\varepsilon(U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})}(x)) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon^{n-d},$$

$$\sigma_\varepsilon(U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})}(x)) = \varepsilon\,\rho_\varepsilon(x)\,W_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})}(x), \quad x \in G_\varepsilon,$$

$$\sigma_\varepsilon(U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})}(x)) = 0, \quad x \in S_\varepsilon^{\pm},$$

$$U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

де $W_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} = \widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})}\,R_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} - \varepsilon^{-1}\sum_{q=1}^{r_i}\widetilde{\alpha}_{\tau_{i,q}\tau_{i,t}}(\varepsilon)\,u_{m+\tau_{t,i}-1}^{\varepsilon}$. Використовуючи оцінки для розв'язків еліптичних крайових задач у тонких перфорованих областях, нерівності (6.15), (6.21), (5.1), а також (4.3), отримуємо

$$\left\| U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})} \le c\,\varepsilon^{p+\frac{d}{2}}.$$

На підставі нерівності (6.12) одержуємо

$$\left\| R_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} - \widetilde{u}_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})} \le \left\| U_{\varepsilon,p}^{(\tau_{i,t})} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})} + \left\| \varphi_\varepsilon^{(\tau_{i,t})} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})} \le c\,\varepsilon^{p-1+\frac{d}{2}},$$

звідки

$$\left\| R_{\varepsilon,p-1}^{(\tau_{i,t})} - \widetilde{u}_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})} \le c\,\varepsilon^{p-1+\frac{d}{2}},$$

що й доводить нерівність (6.10).

Теорему доведено.

Наслідок 6.1. *У випадку, коли асимптотичні ряди $\widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(s)}$, $s = \overline{1,r}$, розпадаються на r серій, тобто*

$$\widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(1)} < \widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(2)} < \ldots < \widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(r)},$$

оцінки (6.9) та (6.10) мають вигляд

$$\left| \widetilde{\Lambda}_{\varepsilon,p}^{(s)} - \varepsilon^{-1}\lambda_{m+s-1}(\varepsilon) \right| \le c_1 \varepsilon^{p+1},$$

$$\left\| R_{\varepsilon,p}^{(s)} - \alpha_p^{(s)}(\varepsilon) u_{m+s-1}^{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{n-d})} \le c_2 \varepsilon^{p+\frac{d}{2}},$$

де $\alpha_p^{(s)}(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2}}\|R_{\varepsilon,p}^{(s)}\|_{L^2(G_\varepsilon,\rho_\varepsilon)}$, $\{\lambda_{m+s-1}(\varepsilon)\}_{s=1}^{r}$, $\{u_{m+s-1}^{\varepsilon}\}_{s=1}^{r}$ *— власні значення та відповідні власні функції задачі (3.2).*

Наслідок 6.2. *З оцінки (6.9) випливає нерівність*

$$|\lambda_m - \varepsilon^{-1}\lambda_m(\varepsilon)| \leq c_m\varepsilon^2 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

де $\lambda_m(\varepsilon)$ *та* λ_m *— власні значення задач (3.2) та (6.1) відповідно.*

Зауваження 6.6. На підставі отриманих результатів та результатів [11, 22] можна порівняти асимптотичну поведінку власних значень спектральних задач Неймана, Діріхле та Стєклова в тонких перфорованих областях з швидкозмінною товщиною та різною граничною розмірністю (де типи крайових умов задано на межах порожнин G_ε):

задача Неймана: $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_m(\varepsilon) = \lambda_m$;

задача Діріхле: $\lambda_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2}\Lambda^* + \lambda_m$, $\varepsilon \to 0$;

задача Стєклова: $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\lambda_m(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lambda_m$.

Література

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, № 5. — С. 3 – 192.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикл. математика и механика. — 1962. — **26**, № 4. — С. 668 – 686.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976.
6. *Джавадов М. Г.* Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в тонких областях // Дифференц. уравнения. — 1968. — **4**, № 10. — С. 1901 – 1909.
7. *Колпаков А. Г.* Определяющие уравнения тонкой упругой напряженной балки периодической структуры // Прикл. математика и механика. — 1999. — **63**, вып. 3. — С. 513 – 523.
8. *Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В.* Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1986. — **26**, № 7. — С. 1032 – 1048.
9. *Мельник Т. А.* Усереднення еліптичних рівнянь, які описують процеси в сильно неоднорідних тонких перфорованих областях з швидко змінною товщиною // Доп. АН України. — 1991. — № 10. — С. 15 – 19.
10. *Мельник Т. А.* Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций эллиптических краевых задач с быстроосциллирующими коэффициентами в перфорированном кубе // Труды сем. им. И. Г. Петровского. — 1994. — Вып. 17. — С. 51 – 88.
11. *Мельник Т. А., Попов А. В.* Асимптотический анализ краевых и спектральных задач в тонких перфорированных областях с быстро изменяющейся толщиной и различными предельными размерностями // Мат. сб. — 2012. — **203**, № 8. — С. 97 – 124.
12. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. — Новосибирск: Науч. книга, 2002. — Т. 1. — 408 с.
13. *Назаров С. А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. — 1995. — **7**, № 5. — С. 1 – 92.
14. *Назаров С. А.* Структура решений краевой задачи для эллиптических уравнений в тонких областях // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. — 1982. — Вып. 2. — С. 65 – 68.

15. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990. — 310 с.

16. *Панасенко Г. П., Резцов М. В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. — 1987. — **294**, № 5. — С. 1061 – 1065.

17. *Caillerie D.* Thin elastic and periodic plates // Math. Methods Appl. Sci. — 1984. — **6**. — P. 159 – 191.

18. *Chechkin G. A., Pichugina E. A.* Weighted Korn's inequality for a thin plate with a rough surface // Rus. J. Math. Phys. — 2000. — **7**, № 3. — P. 375 – 383.

19. *Ciarlet P., Kesavan S.* Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problem in plate theory // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 1981. — **26**. — P. 145 – 172.

20. *Korn R. V., Vogelius M.* A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II: A convergence proof // Quart. Appl. Math. — 1985. — **18**, № 1. — P. 1 – 22.

21. *Lewinsky T., Telega J.* Plates, laminates and shells // Asymptotic Analysis and Homogenization. — Singapore: World Sci., 2000.

22. *Mel'nyk T. A., Popov A. V.* Asymptotic analysis of the Dirichlet spectral problems in thin perforated domains with rapidly varying thickness and different limit dimensions // Math. and Life Sci. — Berlin: De Gruyter, 2012. — P. 89 – 109.

Одержано 24.02.15