УДК 517.9

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Є. В. Панасенко

Запоріз. нац. ун-т
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна
e-mail: panasenko.yevgeniy@gmail.com

О. О. Покутний*

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
та
Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. Академіка Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна
e-mail: alex_poker@imath.kiev.ua
lenasas@gmail.com

We propose an approach for constructing solutions and quasisolutions of a boundary-value problem for a Lyapunov equation in a Banach space. If necessary and sufficient conditions for solvability are satisfied, corresponding solutions of the boundary-value problem are constructed using a generalized inverse operator. As an example, we consider the problem in the space of bounded sequences of countably infinite-dimensional matrices.

Предложен подход к построению решений и квазирешений краевой задачи для уравнения Ляпунова в банаховом пространстве. При выполнении необходимых и достаточных условий разрешимости соответствующие решения краевой задачи строятся с использованием обобщенно-обратного оператора. В качестве примера рассмотрена задача в пространстве ограниченных последовательностей со счетномерными матрицами.

Операторно-диференціальним рівнянням та крайовим задачам для них як у скінченновимірних, так і нескінченновимірних просторах присвячено багато робіт [1 – 4]. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова. Його розглядають як у матричному, так і в операторному випадках [3, 5 – 7]. Воно використовується при дослідженні задач варіаційного числення, теорії стійкості та ігор [8]. У даній статті розглядається крайова задача для операторно-диференціального рівняння типу Ляпунова у банаховому просторі у випадку, коли відповідна задача може мати не єдиний розв'язок. Дану роботу присвячено дослідженню рівняння типу Ляпунова в банаховому просторі у регулярному й нерегулярному випадках.

1. Постановка задачі та попередній результат. Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

* Підтримано грантом Президента України для молодих учених.

де $Z = Z(t)$ — невідома оператор-функція, $A, B \in \mathcal{L}(B_1)$ — лінійні обмежені оператори, що діють з банахового простору B_1 в себе, оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом у просторі лінійних та обмежених операторів, тобто неперервним відображенням відрізка $[a; b]$ у простір $\mathcal{L}(B_1)$, $\Phi(t) \in C([a; b]; \mathcal{L}(B_1)$, лінійний обмежений оператор ℓ переводить оператор-функцію $Z(t)$ у банаховий простір B_2, тобто $\ell\colon C([a; b]; \mathcal{L}(B_1)) \to B_2$, α — елемент простору B_2.

Матричне рівняння такого вигляду відіграє важливу роль в теорії лінійних гамільтонових систем, варіаційному численні та оптимальному керуванні і широко використовується в теорії ігор [4].

В роботі [5] отримано критерій розв'язності періодичної крайової задачі для матричного рівняння Ріккаті в термінах жорданової структури матриць A та B у нерегулярному випадку.

2. Основний результат. Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C([a; b], L(B_1))$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi] \in C([a; b] \times [a; b]; \mathcal{L}(B_1))$ вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)}, \quad t, \tau \in [a; b]. \tag{3}$$

За допомогою цього оператора загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t[M] + \int\limits_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau, \tag{4}$$

де довільний оператор M належить $\mathcal{L}(B_1)$, $\tilde{Z}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), який має вигляд

$$\tilde{Z}(t) = \int\limits_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau.$$

Підставимо (4) в крайову умову (2) та отримаємо операторне рівняння відносно оператора M:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int\limits_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau, \tag{5}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_a^{\cdot}[M]\colon \mathcal{L}(B_1) \to B_2$.

Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор $\mathbf{L}$ дане рівняння має розв'язки. Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним [6].

У цьому випадку розв'язки рівняння (5) існують тоді й тільки тоді [9, 10], коли

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\left[\alpha - \ell \int\limits_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] = 0. \tag{6}$$

Тут $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}$ — проектор на ядро оператора $\mathbf{L}^*$, спряженого з оператором $\mathbf{L}$. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (5) множині значень оператора $\mathbf{L}$, тобто $\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau] \in R(\mathbf{L})$.

За виконання умови розв'язності (6) операторне рівняння (5) має множину розв'язків вигляду

$$M = \mathbf{L}^- \left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau \right] + \mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C,$$

де C — довільний лінійний обмежений оператор ($C \in \mathcal{L}(B_1)$), $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ — проектор на ядро оператора $\mathbf{L}$. Підставивши оператор M в умову (4), отримаємо загальний розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t [\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t),$$

де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином:

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t [\Phi(\tau)] d\tau - \mathbf{K}_a^t \left[\mathbf{L}^- \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot} \Phi(\tau) d\tau \right] + \mathbf{K}_a^t \left[\mathbf{L}^- \alpha \right].$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *є узагальнено-оборотним. Крайова задача (1), (2) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова (6). За виконання умови (6) розв'язки крайової задачі (1), (2) мають вигляд*

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t [\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t)$$

для довільного оператора $C \in \mathcal{L}(B_1)$.

Зауваження. Якщо оператор $\mathbf{L}$ оборотний, то умова (6) виконується автоматично і крайова задача для рівняння Ляпунова має єдиний розв'язок.

3. Приклад. Розглянемо крайову задачу (1), (2) для рівняння Ріккаті у банаховому просторі $m = l_\infty$ обмежених числових послідовностей із зліченновимірними матрицями A, B і $\Phi(t)$:

$$A = \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots \right\},$$

$$B = \operatorname{diag} \left\{ 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots \right\},$$

$$\Phi(t) = \operatorname{diag} \left\{ e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots \right\}$$

і крайовою умовою вигляду

$$\ell Z(\cdot) = (Z_{ii}(0) - Z_{ii}(p))_{i \in \mathbb{N}} = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in m, \quad p > 0.$$

Знайдемо матрицю $\mathbf{K}_\tau^t[\Phi(t)], t, \tau \in [0; p]$. Зліченновимірні матриці $e^{A(t-\tau)}$ та $e^{B(t-\tau)}$ мають вигляд

$$e^{A(t-\tau)} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$e^{B(t-\tau)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{t-\tau} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{t-\tau} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

звідки

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{3}{2}t} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{3}{2}t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок $\tilde{Z}(t)$ неоднорідного рівняння (1) має вигляд

$$\tilde{Z}(t) = \int\limits_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t}t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{3}{2}t}t & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t}t & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{3}{2}t}t & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді $Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \tilde{Z}(t)$, де M — зліченновимірна матриця з невідомими компонентами, які потрібно знайти. Оскільки за умовою задачі A і B — діагональні матриці, то для зручності будемо шукати матрицю M у вигляді діагональної зліченновимірної матриці з ненульовими елементами на діагоналі:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_{k-1k-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{kk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Знайдемо матрицю $\mathbf{K}_0^t[M]$. Для цього підставимо в формулу (3) матрицю M вигляду (7):

$$\mathbf{K}_0^t[M] = \begin{pmatrix} m_{11}e^{\frac{1}{2}t} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_{22}e^{\frac{3}{2}t} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_{k-1k-1}e^{\frac{1}{2}t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{kk}e^{\frac{3}{2}t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Підставивши (8) у крайову умову (2), переконаємося, що оператор $\mathbf{L}$ діє на M таким чином:

$$\mathbf{L}M = \left(m_{11}\left(1 - e^{\frac{1}{2}p}\right), m_{22}\left(1 - e^{\frac{3}{2}p}\right), m_{33}\left(1 - e^{\frac{1}{2}p}\right), \dots\right).$$

Легко бачити, що даний оператор діє неперервним чином і має обернений $\mathbf{L}^{-1}$, який можна визначити так:

$$\mathbf{L}^{-1}(y_1, y_2, \dots) = \operatorname{diag}\left(\frac{y_1}{1 - e^{\frac{1}{2}p}}, \frac{y_2}{1 - e^{\frac{3}{2}p}}, \dots\right).$$

Проектори $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ та $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}$ у цьому випадку будуть нульовими.

Умова (6) виконується. Тоді операторне рівняння $\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau$ має множину розв'язків вигляду

$$M = \mathbf{L}^{-1}\left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dfrac{\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p}{1 - e^{\frac{3}{2}p}} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha_{2i+1} + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Таким чином, за допомогою матриці (9) загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \tilde{Z}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p}{1 - e^{\frac{3}{2}p}} e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{3}{2}t}t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha_{2i+1} + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} e^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Безпосередньою підстановкою матриці (10) у крайову задачу (1), (2) можна переконатися в достовірності отриманого результату.

Таким чином, отримані результати можна використовувати при дослідженні зліченновимірних крайових задач для рівняння Ляпунова.

Зауваження. Основний результат можна посилити, відмовившись від умови замкненості множини значень оператора L. Для зображення розв'язків у цьому випадку потрібно використовувати сильний узагальнено-обернений оператор [11].

Література

1. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
3. *Крейн С. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
4. *Панасенко Є. В., Покутний О. О.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором у лінійній частині // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 4. — С. 518–526.
5. *Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 8. — С. 1021–1026.
6. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation // Different. Equat. — 2001. — **37**, № 4. — P. 464–471.

7. *Чуйко С. М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. — 2014. — № 1120. — С. 85–94.

8. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.

9. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.

10. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.

11. *Покутний О. О.* Узагальнено-обернений оператор у просторах Фреше, Банаха та Гільберта // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка Фіз.-мат. науки. — 2013. — № 4. — С. 158–161.

Одержано 31.12.14