УДК 517.36

ОБ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ МИРОВОЙ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ РАЗВИТИЯ

Д. М. Лила, А. А. Мартынюк

Ин-т механики НАН Украины
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

We give a modification of the Forrester model for the world dynamics. A new characteristic due to the discontent has been introduced at every level of the model. We show that the proposed model could have a limit cycle.

Наведено одну модифікацію моделі Форрестера світової динаміки. Введено фактор невдоволення на кожному системному рівні моделі. Показано, що у запропонованій моделі можливе існування граничного циклу.

Введение. В начале 70-х годов прошлого века Форрестером [1] и Медоузом [2, 3] были созданы первые количественные модели мировой динамики. Обращение к моделям Форрестера и Медоуза в настоящее время объясняется тем, что за прошедшее время общие тенденции мирового развития изменились не слишком сильно, и развитие, в основном, происходит согласно сценарию, указанному в их модели (см. [4, 5]).

Целью данной работы является обсуждение одной численной реализации обобщенной модели Форрестера, учитывающей фактор недовольства развитием на отдельных уровнях модели.

Постановка задачи. Модель мировой динамики Форрестера (см. [1 – 3]) построена на основе подхода, развитого при изучении сложных систем с нелинейными обратными связями. При моделировании мировой динамики были приняты во внимание следующие глобальные процессы:

(i) быстрый рост населения планеты;

(ii) индустриализация и связанный с нею рост промышленного производства;

(iii) ограниченность пищевых ресурсов;

(iv) увеличение отходов производства;

(v) нехватка природных ресурсов.

Основными переменными в модели Форрестера являются:

(a) население P (далее используется обозначение X_1);

(b) основные фонды K (X_2);

(c) доля фондов в сельском хозяйстве X (X_3);

(d) уровень загрязнения окружающей среды Z (X_4);

(i) количество невозобновляемых природных ресурсов R (X_5).

Факторами, через которые осуществляется взаимовлияние переменных $X_1, \ldots, X_5$, приняты следующие:

относительная численность населения P_p (население, нормированное к его численности в 1970 г.);

удельный капитал K_p;

материальный уровень жизни C;

относительный уровень питания F;

нормированная величина удельного капитала в сельском хозяйстве X_p;

относительное загрязнение Z_s;

доля остающихся ресурсов R_R.

Кроме перечисленных факторов Форрестер рассматривал понятие „качество жизни" Q. Этот фактор зависит от переменных P_p, C, F и Z_s: $Q = Q_C Q_F Q_P Q_Z$, где $Q_{(\cdot)}$ — показатель качества жизни по соответствующему критерию.

Для переменных P, K, X, Z, R, которые интерпретируются как системные уровни, записываются уравнения типа

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^-, \tag{1}$$

где y^+ — положительный темп скорости роста переменной y, а y^- — отрицательный темп скорости убывания переменной y. В упрощенном виде уравнения мировой динамики имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P(B - D), \\ \frac{dK}{dt} &= K_+ - T_K^{-1} K, \\ \frac{dX}{dt} &= X_+ - T_X^{-1} X, \\ \frac{dZ}{dt} &= Z_+ - T_Z^{-1} Z, \\ \frac{dR}{dt} &= -R_-, \end{aligned} \tag{2}$$

где B — темп рождаемости, D — темп смертности, K_+ — скорость производства основных фондов, X_+ — прирост доли сельскохозяйственных фондов; Z_+ — скорость генерации загрязнения, T_Z — характерное время естественного разложения загрязнения, R_- — скорость потребления ресурсов. Коэффициенты T_K и T_X имеют смысл характерного времени выбытия фондов.

Математический анализ модели (2) обнаружил существование стационарных и квазистационарных решений, которые интерпретируются как „глобальное равновесие" и „устойчивое общество".

Пусть „нация" N (совокупность международных организаций) формирует общественное мнение о глобальных процессах, происходящих на определенном системном уровне. Изменение меры общественного мнения предлагается моделировать на каждом системном уровне уравнением

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + m^2\chi = 0, \quad \chi'(t_0) = \chi_0', \quad \chi(t_0) = \chi_0. \tag{3}$$

Здесь величина m является функцией значения переменных (a) – (i) в момент $t = t_0$. При этом для системных уровней записываются уравнения типа (1)

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^- + b(t), \tag{4}$$

где функция недовольства $b(t)$ конкретизируется так (см. [6]):

$$b(t) = ge^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

Здесь g — фактор недовольства, отражающий изменение качества жизни стран, вовлеченных в мировую динамику. Соотношение (5) моделирует нарастание (убывание) недовольства протекающими глобальными процессами в зависимости от изменения меры общественного мнения.

Таким образом, обобщением модели Форрестера (1), (2) являются уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{dX_1}{dt} = X_1(B - D) + g_1e^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \\
\frac{dX_2}{dt} = K_+ - T_K^{-1}X_2 + g_2e^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \\
\frac{dX_3}{dt} = X_+ - T_X^{-1}X_3 + g_3e^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \\
\frac{dX_4}{dt} = Z_+ - T_Z^{-1}X_4 + g_4e^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \\
\frac{dX_5}{dt} = -R_- + g_5e^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \\
\frac{d^2\chi}{dt^2} + m^2\chi = 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $g_1, \ldots, g_5$ — факторы недовольства на соответствующем системном уровне.

Общую нелинейную модель мировой динамики предлагается описывать системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX_i}{dt} = W_i(X) + g_ie^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \tag{7}$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + m^2\chi = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Здесь $X = (X_1, \ldots, X_5, \ldots, X_N) \subseteq S(H)$, где $X_1, \ldots, X_5$ — переменные Форрестера, а $X_{5+1}, \ldots, X_n$ — некоторые другие переменные, вовлеченные в уравнения мировой динамики; $W_i \colon S(H) \to R_+^N$ является вектор-функцией с компонентами, описывающими изменение переменных на соответствующем системном уровне. Предполагается, что решение $(X^T(t), \chi(t))^T$ системы связанных уравнений (7), (8) существует при всех $t \geq t_0$ и начальных условиях $(X_0^T, \chi_0', \chi_0)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{int}\,(R_+^N, R \times R)$.

Предположим, что система нелинейных уравнений

$$W_1(X) + g_1 e^{\pm\alpha|\chi(t)|} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$W_N(X) + g_N e^{\pm\alpha|\chi(t)|} = 0$$

имеет квазистационарное решение $X_n(t) = (X_{n1}(t), \ldots, X_{nN}(t))^T$ при любой ограниченной функции $\chi(t)$, являющейся решением уравнения (8). При этом заменой Ляпунова

$$Y(t) = X(t) - X_n(t)$$

система уравнений (7) приводится к виду

$$\frac{dY}{dt} = Y(t, Y), \tag{9}$$

где $Y(t,Y) = W(Y + X_n(t)) + ge^{\pm|\chi(t)|} - (W(X_n(t)) + ge^{\pm|\chi(t)|})$. Очевидно, $Y(t, 0) = 0$ при всех $t \geq 0$. Система (9) является системой возмущенных уравнений мировой динамики.

Проблема устойчивого развития связана с анализом решения $Y = 0$ уравнений (9).

Численная реализация. Пусть $X_n(t)$ — $\dfrac{2\pi}{m}$-периодическое решение уравнений мировой динамики (7), в которых $W_i(X)$, $i = 1, \ldots, 5$, взяты из обобщенной модели (6). В этом случае система возмущенных уравнений мировой динамики (9) имеет вид

$$\frac{dY}{dt} = SY,$$

где $S = \mathrm{diag}\left[B - D, -T_K^{-1}, -T_X^{-1}, -T_Z^{-1}, 0\right]$. При $T_K, T_X, T_Z > 0$ условием устойчивости соответствующего предельного цикла системы (7) является условие

$$B - D < 0.$$

Нелинейная функция $m = m(X_{10}, \ldots, X_{50})$ выбирается согласованно с нулевым приближением к $X_n(t)$,

$$X_1 = X_{10} e^{(B-D)(t-t_0)},$$

$$X_2 = K_+ T_K + (X_{20} - K_+ T_K) e^{-T_K^{-1}(t-t_0)},$$

$$X_3 = X_+ T_X + (X_{30} - X_+ T_X) e^{-T_X^{-1}(t-t_0)},$$

$$X_4 = Z_+ T_Z + (X_{40} - Z_+ T_Z) e^{-T_Z^{-1}(t-t_0)},$$

$$X_5 = X_{50} - R_-(t - t_0),$$

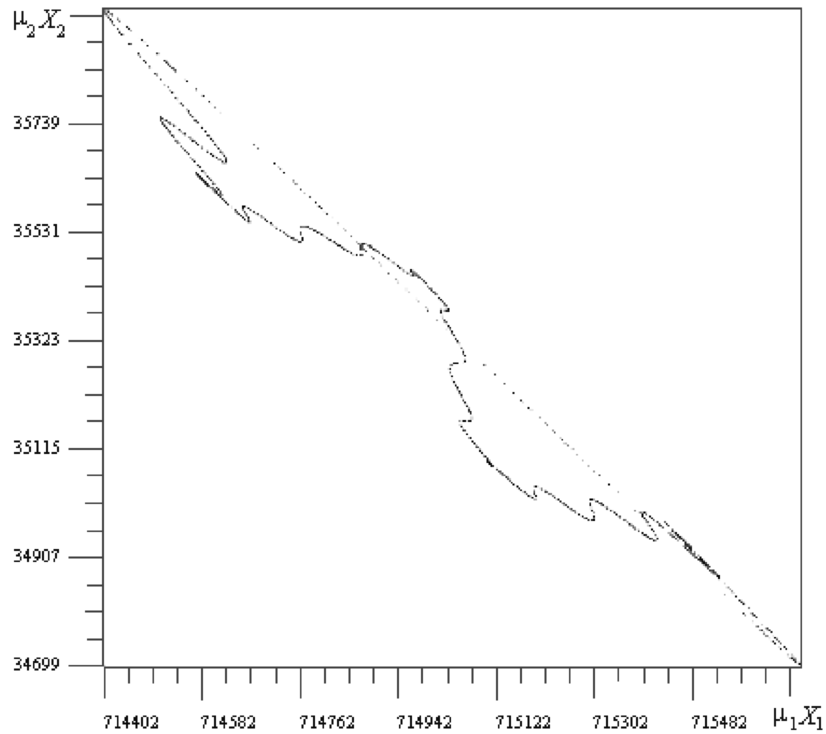

Рис. 1

полученным как решение упрощенной модели мировой динамики (2), не учитывающей изменений меры общественного мнения

$$\chi(t) = A\sin(mt + \delta).$$

Здесь $A = \sqrt{\chi_0^2 + \frac{\dot{\chi}_0^2}{m^2}}$, $\delta = \operatorname{arctg} \frac{m\chi_0}{\dot{\chi}_0} - mt_0$.

Проекции на отдельные фазовые плоскости найденного с определенной точностью методом тригонометрической коллокации по численно-аналитической схеме [7] устойчивого цикла обобщенной модели Форрестера приведены на рис. 1–3. При этом $B = 4,6 \cdot 10^{-3}$, $D = 6,7 \cdot 10^{-3}$, $g_1 = -3 \cdot 10^{-4}$, $K_+ = 1,4 \cdot 10^{-3}$, $T_K = 51,1126$, $g_2 = -9 \cdot 10^{-4}$, $X_+ = 7 \cdot 10^{-3}$, $T_X = 65,8536$, $g_3 = -6 \cdot 10^{-4}$, $Z_+ = 7,4 \cdot 10^{-3}$, $T_Z = 92,7939$, $g_4 = 10^{-4}$, $R_- = 3 \cdot 10^{-4}$, $g_5 = -3 \cdot 10^{-4}$, $A = 0,9121$, $\delta = 56,9308$, $X_{10} = 0,1386$, $X_{20} = 2,31 \cdot 10^{-2}$, $X_{30} = 0,3642$, $X_{40} = 0,6917$, $X_{50} = 0,1789$. Графики некоторых из компонент этого периодического решения изображены на рис. 4, 5 ($\mu_1 = 5160660$, $\mu_2 = 1502361$, $\mu_3 = 998337$, $\mu_4 = 35094296$, $\mu_5 = 3941384$, $\mu_t = 295$ — масштабные множители).

Заключительные замечания. Проведенные исследования показали, что в предложенной обобщенной модели может существовать предельный цикл. Это является необходимым условием адекватности любой формализации задач затронутой тематики. Вместе с этим необходимо заметить, что проблема точности контроля сходимости использованного итерационного процесса нахождения T-периодического решения влечет определенные трудности толкования необходимого и достаточного условия для существова-

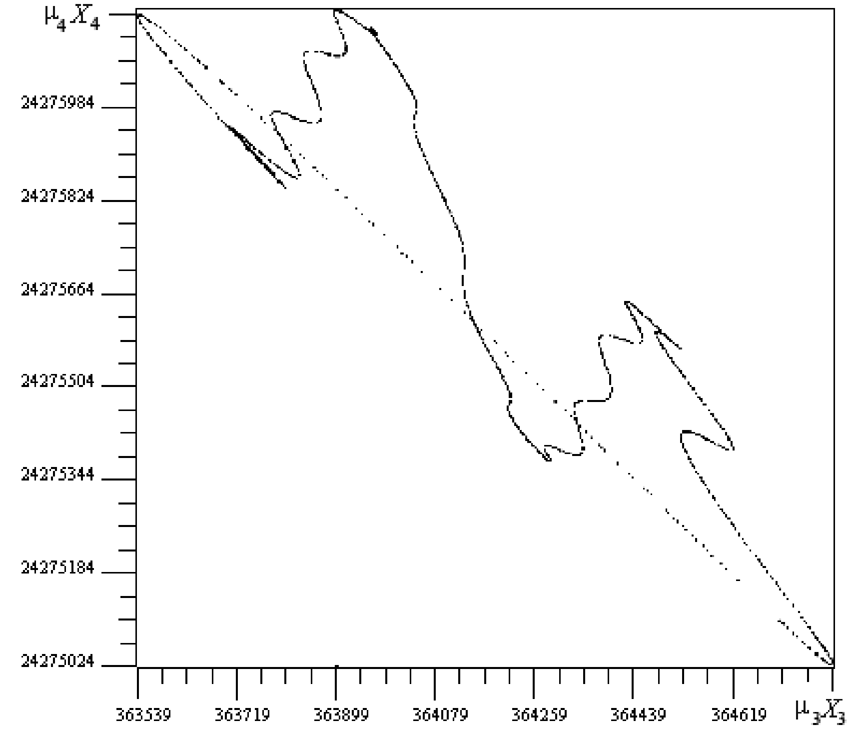
$\mu_4 X_4$
24275984
24275824
24275664
24275504
24275344
24275184
24275024
363539
363719
363899
364079
364259
364439
364619
$\mu_3 X_3$

Рис. 2

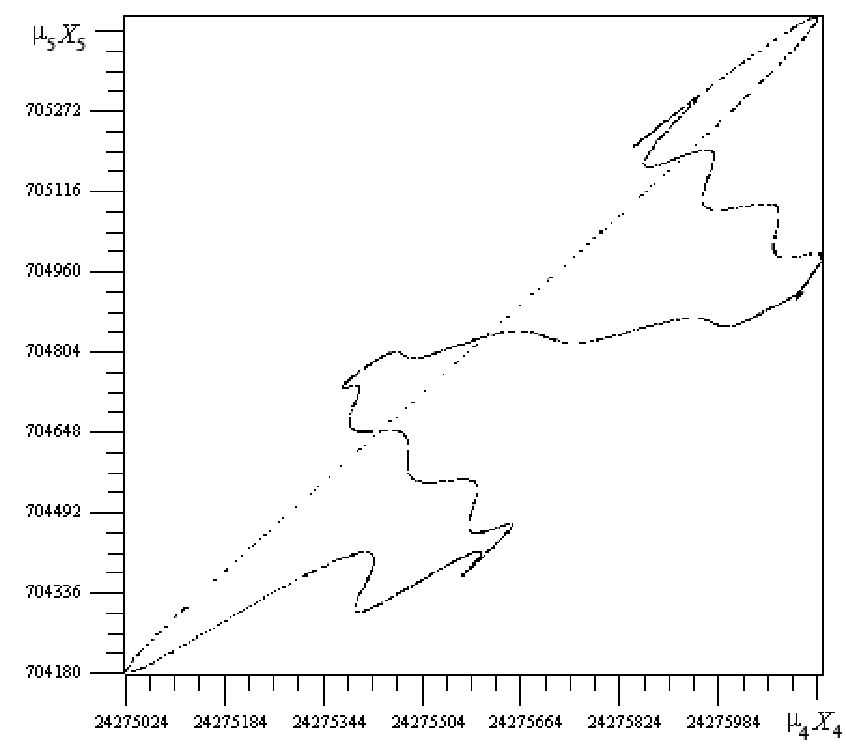
$\mu_5 X_5$
705272
705116
704960
704804
704648
704492
704336
704180
24275024
24275184
24275344
24275504
24275664
24275824
24275984
$\mu_4 X_4$

Рис. 3

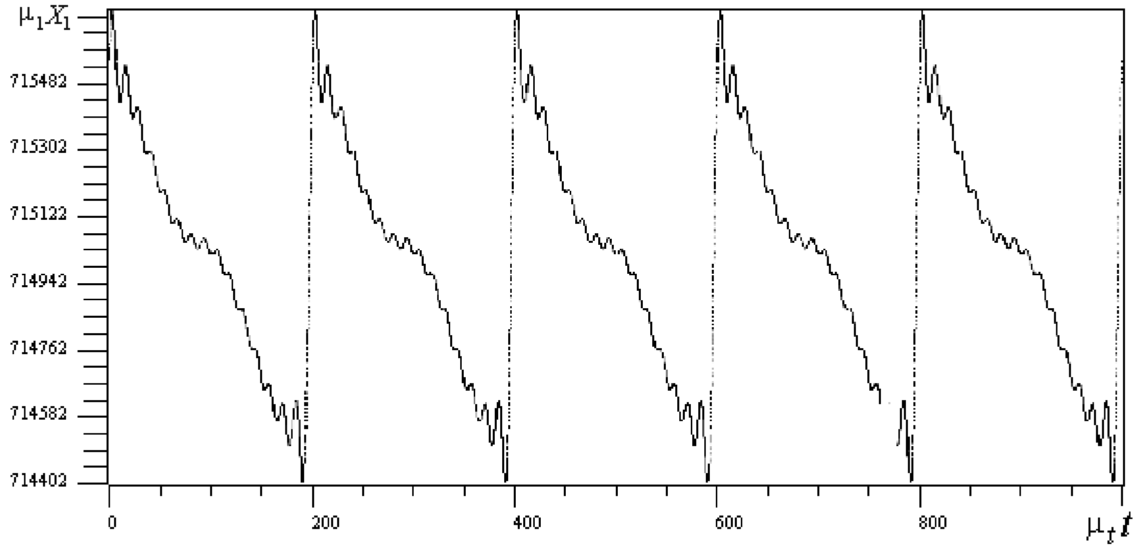

Рис. 4

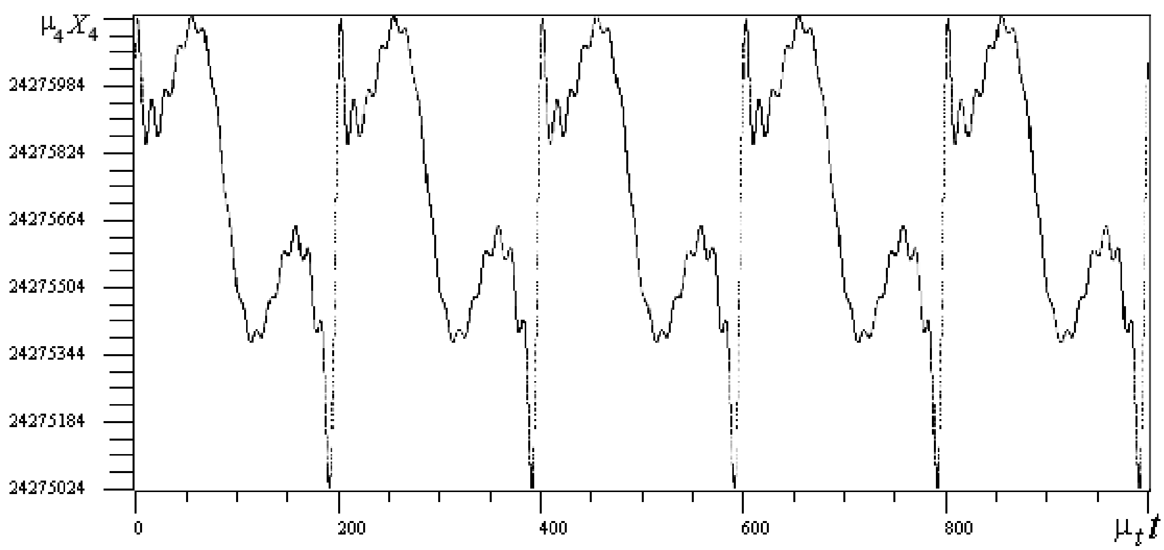

Рис. 5

ния периодических решений периода T, проходящих через выбранную начальную точку. Как следствие, предложенная численная реализация весьма чувствительна к подбору числа m (см. (3)), начальных условий и условий, выделяющих T-систему [7], а также значений параметров исследуемой модели (чтобы убедиться, можно сравнить, к примеру, результаты работ [8] и [9]).

Некоторые другие математические модели мировой динамики [10] имеются в работе фон Ферстера (см. [11] и приведенную там библиографию).

Литература

1. *Forrester J. W.* World dynamics. — Cambridge: Whright-Allen Press, 1971. — 144 p.
2. *Meadows D. L., Meadows D. H.* Toward global equilibrium. — Cambridge: Whrigh-Allen Press, 1972. — 274 p.
3. *Медоуз Д. Х., Медоуз Д. Л., Рандерс Й., Беренс Ш.* Пределы роста. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1992. — 206 с.
4. *Медоуз Д. Л., Медоуз Д. Х., Рандерс Й.* За пределами роста. — М.: Прогресс, 1994. — 304 с.
5. *Медоуз Д. Х., Медоуз Д. Л., Рандерс Й.* Пределы роста. 30 лет спустя. — М.: Академкнига, 2007. — 342 с.
6. *Мартынюк А. А.* Об одной математической модели мировой динамики и устойчивости развития // Доп. НАН України. — 2010. — № 7. — С. 16 – 21.
7. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 184 с.
8. *Torres P. J.* Stabilization of optically coupled lasers with periodic pumping // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, № 3. — P. 414 – 422.
9. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* On stability of some solutions for equations of locked lasing of optically coupled lasers with periodic pumping // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 4. — P. 464 – 473.
10. *Махов С. А.* Пятисекторная долгосрочная макромодель мировой динамики на основе эмпирических данных. — М., 2011. — 24 с. — (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, № 72).
11. *Коротаев А. В., Комарова Н. Л., Халтурина Д. А.* Законы истории. Вековые циклы и тысячелетние тренды. Демография, экономика, войны. — М.: УРСС, 2007.

Получено 03.03.15