УДК 517.9

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Н. Л. Денисенко

Нац. техн. ун-т України „КПІ"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: natalia_den@bigmir.net

We find sufficient conditions for existence of periodic solutions for systems of nonlinear differential-functional equations with deviations in the argument and a small parameter ε. We also study properties of these solutions for $\varepsilon \to 0$.

Установлены достаточные условия существования периодических решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с отклонениями аргумента и малым параметром ε, а также исследованы их свойства при $\varepsilon \to 0$.

Розглянемо систему нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\left(t, x(t), x(\lambda_1 t + \psi_1(t, x(t))), \ldots, x(\lambda_k t + \psi_k(t, x(t))), \varepsilon\right), \tag{1}$$

де $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,k}$; ε — достатньо малий невід'ємний скалярний параметр ($\varepsilon \in I = [0, \varepsilon_0]$, ε_0 є достатньо малим); $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; A — дійсна стала $(n \times n)$-матриця; $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $\psi_i \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,k}$.

Різні частинні випадки таких рівнянь досліджувались багатьма математиками і на даний час існує велика кількість результатів, одержаних при вивченні цих питань (див. [1 – 7] і наведену там бібліографію). Так, в [1] достатньо повно досліджено існування й асимптотичні властивості розв'язків скалярного рівняння ($n = 1$), в [3] одержано достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, в [4] досліджено асимптотичні властивості неперервно диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків систем лінійних та нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу, в [5] вивчено питання існування періодичних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними перетвореннями аргументу та їхні властивості. У даній роботі результати роботи [5] узагальнюються для широкого класу систем диференціально-функціональних рівнянь із малим параметром.

Нехай виконано умови:

1*) всі компоненти вектор-функції $f(t, x_0, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ та функції $\psi_i(t, x)$, $i = \overline{1,k}$, є неперервними за всіма змінними і T-періодичними по t функціями, тобто

$$f\left(t + T, x(t), x(\lambda_1 t + \psi_1(t, x(t))), \ldots, x(\lambda_k t + \psi_k(t, x(t))), \varepsilon\right) \equiv$$

$$\equiv f\left(t, x(t), x(\lambda_1 t + \psi_1(t, x(t))), \ldots, x(\lambda_k t + \psi_k(t, x(t))), \varepsilon\right),$$

$$\psi_i(t + T, x(t)) \equiv \psi_i(t, x(t)), \quad i = \overline{1,k};$$

2*) $|f(\tilde{t},\tilde{x}_0,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_k,\varepsilon)-f(\tilde{\tilde{t}},\tilde{\tilde{x}}_0,\tilde{\tilde{x}}_1,\ldots,\tilde{\tilde{x}}_k,\varepsilon)| \leq l_1\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\sum_{i=0}^k|\tilde{x}_i-\tilde{\tilde{x}}_i|\right)$, $|\psi_i(\tilde{t},\tilde{x})-$ $-\psi_i(\tilde{\tilde{t}},\tilde{\tilde{x}})| \leq l_2\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}|\right)$, $i=\overline{1,k}$, де $\tilde{t},\tilde{\tilde{t}}\in\mathbb{R}$, $\tilde{x}_i,\tilde{\tilde{x}}_i\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{0,k}$, $\tilde{x},\tilde{\tilde{x}}\in\mathbb{R}^n$, l_1, l_2 — деякі додатні сталі.

Припустимо, що власні значення a_j, $j=\overline{1,n}$, матриці A задовольняють умову $\operatorname{Re}a_j(A)\neq$ $\neq 0$, $j=\overline{1,n}$. У цьому випадку, як відомо, існує неособлива матриця C, яка зводить матрицю A до вигляду

$$A = C^{-1}\operatorname{diag}(A_1,A_2)C,$$

де A_1, A_2 — деякі сталі матриці розмірності $p\times p$ і $(n-p)\times(n-p)$, власні значення яких задовольняють умови

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}a_j(A_1)<0, \quad j=1,\ldots,p,\\ \operatorname{Re}a_j(A_2)>0, \quad j=p+1,\ldots,n, \quad 0<p\leq n.\end{gathered} \tag{2}$$

1. Дослідимо спочатку питання про існування T-періодичних розв'язків системи рівнянь (1) при $\varepsilon=0$, тобто системи рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+f\left(t,x(t),x(\lambda_1 t+\psi_1(t,x(t))),\ldots,x(\lambda_k t+\psi_k(t,x(t))),0\right). \tag{3}$$

Для цього виконаємо перетворення

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+y(t), \tag{4}$$

де $y(t)\in C^0$, C^0 — простір неперервних T-періодичних вектор-функцій з нормою $\|y(t)\| =$ $=\max_t|y(t)|$. Тоді з (4) безпосередньо випливає, що $x(t)$ визначається єдиним чином за допомогою співвідношення

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)y(\tau)d\tau, \tag{5}$$

де

$$G(t) = \begin{cases} C^{-1}\operatorname{diag}(e^{A_1t},0)C & \text{при} \quad t>0,\\ -C^{-1}\operatorname{diag}(0,e^{A_2t})C & \text{при} \quad t<0.\end{cases} \tag{6}$$

При цьому для матричної функції $G(t)=(g_{ij}(t))$ виконуються такі умови:

а) $G(+0)-G(-0)=E$, де E — одинична матриця розмірності $n\times n$;

б) $|G(t)|\leq Ke^{-\alpha|t|}$ при всіх $t\neq 0$, де $K>0$, $\alpha>0$ і $|G|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|g_{ij}|$;

в) $\dot{G}=AG$, $t\neq 0$.

Внаслідок перетворення (4) система рівнянь (3) набирає вигляду

$$y(t)=f\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)y(\tau)d\tau,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G\left(\lambda_1t+\psi_1\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)y(s)ds\right)-\tau\right)y(\tau)d\tau,\ldots\right.$$

$$\ldots, \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(\lambda_k t + \psi_k\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)y(s)ds\right) - \tau\right) y(\tau)d\tau, 0\right)$$

або

$$y(t) = f\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y(\tau)d\tau, \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau)) \times\right.$$

$$\times\, y\left(\lambda_1\tau + \psi_1\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)y(s)ds\right)\right) d\tau, \ldots$$

$$\left.\ldots, \lambda_k \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))y\left(\lambda_k\tau + \psi_k\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)y(s)ds\right)\right) d\tau, 0\right), \tag{7}$$

де $G(t)$ визначається за допомогою співвідношення (6). Для системи рівнянь (7) має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) числа λ_i, $i = \overline{1,k}$, *є цілими додатними;*

2) всі власні значення a_j, $j = \overline{1,n}$, *матриці* A *такі, що має місце (2), тобто існують* $K > 0$ *і* $\alpha > 0$ *такі, що* $|G(t)| \leq Ke^{-\alpha|t|}$ *при всіх* $t \neq 0$;

3) всі компоненти вектор-функції $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_k, 0)$ *є неперервними за всіма змінними* T*-періодичними по* t *функціями і* $\max_{t\in\mathbb{R}} |f(t, 0, \ldots, 0, 0)| \leq N < +\infty$;

4) функції $\psi_i(t, y)$, $i = \overline{1,k}$, *є неперервними за всіма змінними і* T*-періодичними по* t;

5) $|f(\tilde{t}, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k, 0) - f(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k, 0)| \leq l_1\left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + \sum_{i=0}^k |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|\right)$, $|\psi_i(\tilde{t}, \tilde{y}) - -\psi_i(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{y}})| \leq l_2\left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + |\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}|\right)$, $i = \overline{1,k}$, *де* $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,k}$, $\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^n$, $l_1 = \mathrm{const} > 0$, $l_2 = \mathrm{const} > 0$;

6) виконуються нерівності

$$\frac{2Kl_1}{\alpha}\left(1 + k\frac{2Kl\,l_2}{\alpha} + k\right) < 1,$$
$$\frac{l_1}{l}\left(1 + \frac{2Kl}{\alpha} + \frac{2Kl}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i + l_2 k + \frac{2Kl\,l_2 k}{\alpha}\right)\right) \leq 1. \tag{8}$$

Тоді існує єдиний неперервний T*-періодичний розв'язок* $\gamma = \gamma(t)$ *системи рівнянь (7), що задовольняє умову*

$$|\gamma(\tilde{t}) - \gamma(\tilde{\tilde{t}})| \leq l|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|, \tag{9}$$

де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $l = \mathrm{const} > 0$.

Доведення. Розв'язок системи рівнянь (7) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо формулами

$$y_0(t) = 0,$$

$$y_m(t) = f\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y_{m-1}(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau)) \times \right.$$
$$\times\, y_{m-1}\left(\lambda_1\tau + \psi_1\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)y_{m-1}(s)ds\right)\right)d\tau, \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))\times$$
$$\left.\times\, y_{m-1}\left(\lambda_k\tau + \psi_k\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)y_{m-1}(s)ds\right)\right)d\tau, 0\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \qquad (10)$$

Спочатку покажемо, що при всіх $m = 0, 1, \ldots$ виконуються нерівності

$$|y_m(\tilde{t}) - y_m(\tilde{\tilde{t}})| \le l|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|, \qquad (11)$$

де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $l = \mathrm{const} > 0$. На підставі умов теореми із (10) отримуємо

$$|y_0(\tilde{t}) - y_0(\tilde{\tilde{t}})| = 0,$$

$$|y_1(\tilde{t}) - y_1(\tilde{\tilde{t}})| \le \left| f\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-\tau)y_0(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{t}-\tau))\times \right.\right.$$
$$\times\, y_0\left(\lambda_1\tau + \psi_1\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s)y_0(s)ds\right)\right)d\tau, \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{t}-\tau))\times$$
$$\left.\times\, y_0\left(\lambda_k\tau + \psi_k\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s)y_0(s)ds\right)\right)d\tau, 0\right) -$$
$$- f\left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-\tau)y_0(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{\tilde{t}}-\tau))\times \right.$$
$$\times\, y_0\left(\lambda_1\tau + \psi_1\left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s)y_0(s)ds\right)\right)d\tau, \ldots$$
$$\left.\left. \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{\tilde{t}}-\tau))y_0\left(\lambda_k\tau + \psi_k\left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s)y_0(s)ds\right)\right)d\tau, 0\right)\right| \le$$

$$\leq |f(\tilde{t}, 0, \ldots, 0, 0) - f(\tilde{\tilde{t}}, 0, \ldots, 0, 0)| \leq l_1 |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| \leq l \frac{l_1}{l} |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| \leq l |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|,$$

тобто оцінка (11) виконується при $m = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що умову (11) доведено для деякого m, і покажемо, що вона зберігається при переході від m до $m+1$. Дійсно, з огляду на умови теореми із (10) одержуємо

$$|y_{m+1}(\tilde{t}) - y_{m+1}(\tilde{\tilde{t}})| \leq \Bigg| f\Bigg(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - \tau) y_m(\tau) d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{t} - \tau)) \times$$

$$\times\, y_m \left(\lambda_1 \tau + \psi_1 \left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - s) y_m(s) ds \right) \right) d\tau, \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{t} - \tau)) \times$$

$$\times y_m \left(\lambda_k \tau + \psi_k \left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - s) y_m(s) ds \right) \right) d\tau, 0 \Bigg) -$$

$$- f \Bigg(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - \tau) y_m(\tau) d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{\tilde{t}} - \tau)) \times$$

$$\times\, y_m \left(\lambda_1 \tau + \psi_1 \left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - s) y_m(s) ds \right) \right) d\tau, \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{\tilde{t}} - \tau)) \times$$

$$\times\, y_m \left(\lambda_k \tau + \psi_k \left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - s) y_m(s) ds \right) \right) d\tau, 0 \Bigg) \Bigg| \leq$$

$$\leq l_1 \Bigg(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - \tau) y_m(\tau) d\tau - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - \tau) y_m(\tau) d\tau \right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Bigg| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i(\tilde{t} - \tau)) y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - s) y_m(s) ds \right) \right) d\tau -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i(\tilde{\tilde{t}} - \tau)) y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - s) y_m(s) ds \right) \right) d\tau \Bigg| \Bigg).$$

Оскільки

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - \tau) y_m(\tau) d\tau - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - \tau) y_m(\tau) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) y_m(\tilde{t}-\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) y_m(\tilde{\tilde{t}}-\xi) d\xi \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\xi)|\, |y_m(\tilde{t}-\xi) - y_m(\tilde{\tilde{t}}-\xi)| d\xi \le$$

$$\le K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\xi|} l |\tilde{t}-\xi-(\tilde{\tilde{t}}-\xi)| d\xi \le Kl\,\frac{2}{\alpha}\,|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|$$

та

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i(\tilde{t}-\tau)) y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s) y_m(s) ds \right)\right) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i(\tilde{\tilde{t}}-\tau)) y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s) y_m(s) ds \right)\right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i \xi) y_m \left(\lambda_i(\tilde{t}-\xi) + \psi_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s) y_m(s) ds \right)\right) d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i \xi) y_m \left(\lambda_i(\tilde{\tilde{t}}-\xi) + \psi_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s) y_m(s) ds \right)\right) d\xi \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i \xi)| \left| y_m \left(\lambda_i(\tilde{t}-\xi) + \psi_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s) y_m(s) ds \right)\right) - \right.$$

$$\left. - y_m \left(\lambda_i(\tilde{\tilde{t}}-\xi) + \psi_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s) y_m(s) ds \right)\right) \right| d\xi \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\alpha\lambda_i|\xi|} l \left| \lambda_i(\tilde{t}-\xi) + \psi_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s) y_m(s) ds \right) - \right.$$

$$\left. - \lambda_i(\tilde{\tilde{t}}-\xi) - \psi_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s) y_m(s) ds \right) \right| d\xi \le Kl \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda_i|\xi|} d\xi \times$$

$$\times \left(\lambda_i |\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}| + \left| \psi_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s) y_m(s) ds \right) - \psi_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s) y_m(s) ds \right) \right| \right) \le$$

$$\leq Kl\frac{2}{\alpha\lambda_i}\left(\lambda_i|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+l_2\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{t}-s)y_m(s)ds-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{\tilde{t}}-s)y_m(s)ds\right|\right)\right)\leq$$

$$\leq\frac{2Kl}{\alpha\lambda_i}\left(\lambda_i|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+l_2\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+Kl\,\frac{2}{\alpha}\,|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\right)\right)\leq\frac{2Kl}{\alpha\lambda_i}\left(\lambda_i+l_2+l_2\,\frac{2Kl}{\alpha}\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|,$$

то маємо

$$|y_{m+1}(\tilde{t})-y_{m+1}(\tilde{\tilde{t}})|\leq l_1\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+Kl\,\frac{2}{\alpha}\,|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\frac{2Kl}{\alpha\lambda_i}\left(\lambda_i+l_2+l_2\frac{2Kl}{\alpha}\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\right)\leq$$

$$\leq l_1\left(1+\frac{2Kl}{\alpha}+\frac{2Kl}{\alpha}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i+l_2+\frac{2Kl\,l_2}{\alpha}\right)\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\leq$$

$$\leq l_1\left(1+\frac{2Kl}{\alpha}+\frac{2Kl}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+l_2k+\frac{2Kl\,l_2k}{\alpha}\right)\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\leq$$

$$\leq l\frac{l_1}{l}\left(1+\frac{2Kl}{\alpha}\left(1+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+l_2k+\frac{2Kl\,l_2k}{\alpha}\right)\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\leq l|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|.$$

Отже, цим доведено, що нерівність (11) має місце при $\tilde{t},\tilde{\tilde{t}}\in\mathbb{R}$ і $m=0,1,\ldots$.

Тепер, розмірковуючи за індукцією, покажемо, що при всіх $m=1,2,\ldots,$ $t\in\mathbb{R}$ виконуються співвідношення

$$|y_m(t)-y_{m-1}(t)|\leq N\Theta^{m-1},\tag{12}$$

де

$$\Theta:=\frac{2Kl_1}{\alpha}\left(1+k\,\frac{2Kl\,l_2}{\alpha}+k\right).$$

Справді, зважаючи на умови теореми, маємо

$$|y_1(t)-y_0(t)|\leq\left|f\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)y_0(\tau)d\tau,\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_1(t-\tau))\times\right.\right.$$

$$\times\,y_0\left(\lambda_1\tau+\psi_1\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)y_0(s)ds\right)\right)d\tau,\ldots,\lambda_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_k(t-\tau))\times$$

$$\left.\left.\times\,y_0\left(\lambda_k\tau+\psi_k\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)y_0(s)ds\right)\right)d\tau,0\right)\right|\leq|f(t,0,\ldots,0,0)|\leq N,$$

тобто при $m = 1$ оцінка (12) має місце. Припустимо, що оцінку (12) встановлено для деякого $m \geq 1$, і покажемо її справедливість для $m+1$. Дійсно, з (10) одержуємо

$$
\begin{aligned}
|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq l_1 \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|\, |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau + \\
+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))| \left| y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_m(s) ds \right) \right) - \right. \\
\left. - y_{m-1} \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_{m-1}(s) ds \right) \right) \right| d\tau \Bigg) \leq \\
\leq l_1 \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\alpha|t-\tau|} N \Theta^{m-1} d\tau + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\alpha \lambda_i |t-\tau|} \times \\
\times \Bigg(\left| y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_m(s) ds \right) \right) - \right. \\
\left. - y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_{m-1}(s) ds \right) \right) \right| + \\
+ \left| y_m \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_{m-1}(s) ds \right) \right) - \right. \\
\left. - \ y_{m-1} \left(\lambda_i \tau + \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_{m-1}(s) ds \right) \right) \right| \Bigg) d\tau \Bigg) \leq \\
\leq K l_1 \Bigg(N \Theta^{m-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t-\tau|} d\tau + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \lambda_i |t-\tau|} \times \\
\times \Bigg(l \left| \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_m(s) ds \right) - \right. \\
\left. - \ \psi_i \left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) y_{m-1}(s) ds \right) \right| + N \Theta^{m-1} \Bigg) d\tau \Bigg) \leq
\end{aligned}
$$

$$\leq K l_1 \left(N\Theta^{m-1}\frac{2}{\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|} d\tau \times \right.$$

$$\left. \times \left(l\, l_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)|\, |y_m(s) - y_{m-1}(s)|\, ds + N\Theta^{m-1} \right) \right) \leq$$

$$\leq K l_1 \left(N\Theta^{m-1}\frac{2}{\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{2}{\alpha\lambda_i} \left(l\, l_2 \int_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\alpha|t-s|} N\Theta^{m-1} ds + N\Theta^{m-1} \right) \right) \leq$$

$$\leq N\Theta^{m-1}\frac{2Kl_1}{\alpha}\left(1 + \sum_{i=1}^{k}\left(l\, l_2 K \frac{2}{\alpha} + 1\right)\right) \leq$$

$$\leq N\Theta^{m-1}\frac{2Kl_1}{\alpha}\left(1 + k\left(l\, l_2 K \frac{2}{\alpha} + 1\right)\right) = N\Theta^m.$$

Цим доведено, що оцінка (12) має місце для довільного $m \geq 1$.

По індукції покажемо, що наближення $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, є T-періодичними вектор-функціями по t, тобто

$$y_m(t+T) = y_m(t), \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{13}$$

З огляду на умови теореми маємо

$$y_0(t+T) = 0 = y_0(t),$$

тобто співвідношення (13) виконується при $m = 0$. Припустимо, що співвідношення (13) встановлено для деякого $m \geq 0$, і покажемо, що воно буде справедливим для $m+1$. Справді, із (10) маємо

$$y_{m+1}(t+T) = f\left(t+T, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+T-\tau) y_m(\tau) d\tau, \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t+T-\tau)) \times \right.$$

$$\times\, y_m\left(\lambda_1\tau + \psi_1\left(t+T, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+T-s) y_m(s) ds \right)\right) d\tau, \ldots$$

$$\ldots, \lambda_k \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t+T-\tau)) \times$$

$$\left. \times\, y_m\left(\lambda_k\tau + \psi_k\left(t+T, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+T-s) y_m(s) ds \right)\right) d\tau, 0 \right) =$$

$$= f\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t+T-\tau)y_m(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t+T-\tau))\times\right.$$

$$\times\, y_m\left(\lambda_1\tau + \psi_1\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t+T-s)y_m(s)ds\right)\right) d\tau, \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t+T-\tau))\times$$

$$\left.\times y_m\left(\lambda_k\tau + \psi_k\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t+T-s)y_m(s)ds\right)\right) d\tau, 0\right) =$$

$$= f\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-u)y_m(u)du, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-u))\times\right.$$

$$\times\, y_m\left(\lambda_1 u + \psi_1\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tilde{s})y_m(\tilde{s})d\tilde{s}\right)\right) du, \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-u))\times$$

$$\left.\times\, y_m\left(\lambda_k u + \psi_k\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tilde{s})y_m(\tilde{s})d\tilde{s}\right)\right) du, 0\right) = y_{m+1}(t), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Отже, співвідношення (13) виконуються при всіх $m \geq 0$.

Таким чином, всі наближення $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, є неперервними T-періодичними вектор-функціями і для них справджуються оцінки (11) і (12). Враховуючи (8) і (12), приходимо до висновку, що ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (y_m(t) - y_{m-1}(t))$$

рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $\gamma(t) = \lim_{m\to+\infty} y_m(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (7) і задовольняє умову Ліпшиця

$$|\gamma(\tilde{t}) - \gamma(\tilde{\tilde{t}})| \leq l|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|,$$

де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $l = \mathrm{const} > 0$ (в цьому легко переконатись, якщо в (10), (11) перейти до границі при $m \to +\infty$). Зауважимо, що при цьому

$$|\gamma(t)| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} |y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} N\Theta^{m-1} = \frac{N}{1-\Theta}.$$

Насамкінець покажемо, що система (7) не має інших неперервних T-періодичних розв'язків. Дійсно, нехай існує ще один неперервний T-періодичний розв'язок $\eta(t)$ системи рівнянь (7) такий, що $\gamma(t) \neq \eta(t)$. Тоді одержуємо

$$|\gamma(t)-\eta(t)| \leq l_1 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|\,|\gamma(\tau)-\eta(\tau)| d\tau + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))| \times \right.$$

$$\times \left| \gamma\left(\lambda_i\tau + \psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\gamma(s)ds\right)\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \ \eta\left(\lambda_i\tau + \psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\eta(s)ds\right)\right)\right| d\tau \right) \ \leq$$

$$\leq l_1 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\alpha|t-\tau|} |\gamma(\tau)-\eta(\tau)| d\tau + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|} \times \right.$$

$$\times \left[\left| \gamma\left(\lambda_i\tau + \psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\gamma(s)ds\right)\right) - \right.\right.$$

$$\left. -\gamma\left(\lambda_i\tau + \psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\eta(s)ds\right)\right)\right| +$$

$$+ \left| \gamma\left(\lambda_i\tau + \psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\eta(s)ds\right)\right) - \right.$$

$$\left.\left.\left. -\eta\left(\lambda_i\tau + \psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\eta(s)ds\right)\right)\right| \right] d\tau \right) \ \leq$$

$$\leq l_1 K \left(\max_t |\gamma(t)-\eta(t)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t-\tau|} d\tau + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|} \times \right.$$

$$\times \left[l \left| \psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\gamma(s)ds\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -\psi_i\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\eta(s)ds\right)\right| + \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| \right] d\tau \right) \ \leq$$

$$\leq l_1 K \left(\frac{2}{\alpha} \ \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|} d\tau \times \right.$$

$$\times \left[l\, l_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)|\, |\gamma(s)-\eta(s)| ds + \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| \right] \Bigg) \le$$

$$\le l_1 K \left(\frac{2}{\alpha} \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \frac{2}{\alpha\lambda_i} \times \right.$$

$$\left. \times \left[l\, l_2 \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\alpha|t-s|} ds + \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| \right] \right) \le$$

$$\le l_1 K \left(\frac{2}{\alpha} + k\, \frac{2}{\alpha} \left[l\, l_2 K \, \frac{2}{\alpha} + 1 \right] \right) \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| \le$$

$$\le \frac{2Kl_1}{\alpha} \left(1 + k \frac{2Kl\, l_2}{\alpha} + k \right) \max_t |\gamma(t)-\eta(t)| \le \Theta \|\gamma(t)-\eta(t)\|,$$

де $\|\gamma(t)-\eta(t)\| = \max_t |\gamma(t)-\eta(t)|$.

Отже, отримуємо співвідношення

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\| \le \Theta \|\gamma(t)-\eta(t)\|,$$

яке може мати місце лише у випадку, коли $\Theta \ge 1$, що суперечить припущенню (8). Цим доведено, що вектор-функція $\gamma(t)$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (7), що задовольняє умову (9).

Теорему 1 доведено.

З огляду на теорему 1 і співвідношення (5) приходимо до висновку, що вектор-функція

$$\bar{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\gamma(\tau) d\tau \tag{14}$$

є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи (3). При цьому внаслідок (9) із (14) отримуємо

$$|\bar{x}(\tilde{t}) - \bar{x}(\tilde{\tilde{t}})| \le \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-\tau)\gamma(\tau) d\tau - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-\tau)\gamma(\tau) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\gamma(\tilde{t}-\xi) d\xi - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\gamma(\tilde{\tilde{t}}-\xi) d\xi \right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\xi)|\, |\gamma(\tilde{t}-\xi) - \gamma(\tilde{\tilde{t}}-\xi)| d\xi \le K \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\xi|}\, l\, |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| d\xi \le \frac{2Kl}{\alpha}\, |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|.$$

Отже, вектор-функція $\bar{x}(t)$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи (3) (тобто системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$), що задовольняє умову

$$|\bar{x}(\tilde{t}) - \bar{x}(\tilde{\tilde{t}})| \leq \frac{2Kl}{\alpha}|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|,$$

де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, K, l, α — деякі додатні сталі, $\bar{x}(t)$ визначається за допомогою співвідношення (14).

2. Перейдемо до дослідження T-періодичних розв'язків системи рівнянь (1) при $\varepsilon \neq 0$. Виконаємо в системі рівнянь (1) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \bar{x}(t), \tag{15}$$

де $\bar{x}(t)$ — T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$. В результаті отримаємо систему рівнянь вигляду

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \varphi\left(t, y(t), y\left(\lambda_1 t + v_1(t, y(t))\right), \ldots, y\left(\lambda_k t + v_k(t, y(t))\right), \varepsilon\right), \tag{16}$$

де

$$v_i(t, y(t)) = \psi_i(t, y(t) + \bar{x}(t)), \quad i = \overline{1, k},$$

$$\begin{aligned}\varphi(t, y(t), &y(\lambda_1 t + v_1(t, y(t))), \ldots, y(\lambda_k t + v_k(t, y(t))), \varepsilon) = \\ &= f\left(t, y(t) + \bar{x}(t), y\left(\lambda_1 t + \psi_1(t, y(t) + \bar{x}(t))\right) + \bar{x}\left(\lambda_1 t + \psi_1(t, y(t) + \bar{x}(t))\right), \ldots\right. \\ &\quad \left. \ldots, y\left(\lambda_k t + \psi_k(t, y(t) + \bar{x}(t))\right) + \bar{x}\left(\lambda_k t + \psi_k(t, y(t) + \bar{x}(t))\right), \varepsilon\right) - \\ &\quad - f\left(t, \bar{x}(t), \bar{x}\left(\lambda_1 t + \psi_1(t, \bar{x}(t))\right), \ldots, \bar{x}\left(\lambda_k t + \psi_k(t, \bar{x}(t))\right), 0\right).\end{aligned}$$

Легко переконатися, що вектор-функція

$$\varphi\left(t, y(t), y\left(\lambda_1 t + v_1(t, y(t))\right), \ldots, y\left(\lambda_k t + v_k(t, y(t))\right), \varepsilon\right)$$

і функції $v_i(t, y(t))$, $i = \overline{1, k}$, задовольняють умови 1^*, 2^* і $\varphi(t, 0, \ldots, 0, 0) \equiv 0$.

Виконаємо перетворення

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + z(t), \tag{17}$$

де $z(t) \in C^0$, C^0 — простір неперервних на $\mathbb{R}$ T-періодичних вектор-функцій з нормою $\|z(t)\| = \max_t |z(t)|$. Тоді внаслідок умов (2) із (17) безпосередньо випливає, що $y(t)$ визначається єдиним чином за допомогою рівності

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) z(\tau) d\tau, \tag{18}$$

де $G(t)$ визначається співвідношенням (6). В результаті перетворення (17) система рівнянь (16) набирає вигляду

$$z(t) = \varphi\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z(\tau)d\tau, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\lambda_1 t + v_1(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)z(s)ds) - \tau\right) z(\tau)d\tau, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\lambda_k t + v_k\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)z(s)ds\right) - \tau\right) z(\tau)d\tau, \varepsilon\right)$$

або

$$z(t) = \varphi\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))z\left(\lambda_1\tau + v_1(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)z(s)ds)\right) d\tau, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))z\left(\lambda_k\tau + v_k\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)z(s)ds\right)\right) d\tau, \varepsilon\right). \tag{19}$$

Для системи рівнянь (19) має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови:*

1) числа λ_i, $i = \overline{1,k}$, є цілими додатними;

2) всі власні значення a_j, $j = \overline{1,n}$, матриці A такі, що має місце (2), тобто існують $K > 0$ і $\alpha > 0$ такі, що $|G(t)| \le K\, e^{-\alpha|t|}$ при всіх $t \ne 0$;

3) всі компоненти вектор-функції $\varphi(t, y_0, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)$ є неперервними за всіма змінними T-періодичними по t функціями і $\varphi(t, 0, \ldots, 0, 0) \equiv 0$, $\sup_t |\varphi(t, 0, \ldots, 0, \varepsilon)| \le M < +\infty$;

4) функції $v_i(t, y)$, $i = \overline{1,k}$, є неперервними за всіма змінними і T-періодичними по t;

5) $|\varphi(\tilde{t}, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k, \varepsilon) - \varphi(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k, \varepsilon)| \le l_1\left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + \sum_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|\right)$, $|v_i(\tilde{t}, \tilde{y}) - -v_i(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{y}})| \le l_2\left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + |\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}|\right)$, $i = \overline{1,k}$, де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,k}$, $\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^n$, l_1, l_2 — деякі додатні сталі;

6) виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\frac{2Kl_1}{\alpha}\left(1 + k\frac{2KLl_2}{\alpha} + k\right) < 1,\\ \frac{l_1}{L}\left(1 + \frac{2KL}{\alpha} + \frac{2KL}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + l_2 k + \frac{2KLl_2 k}{\alpha}\right)\right) \le 1.\end{gathered} \tag{20}$$

Тоді існує єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}(t, \varepsilon)$ системи рівнянь (19), що задовольняє умову

$$|\overline{\gamma}(\tilde{t},\varepsilon) - \overline{\gamma}(\tilde{\tilde{t}},\varepsilon)| \le L|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\gamma}(t,\varepsilon) = 0, \tag{21}$$

де $t, \tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $L = L(\varepsilon)$ *— додатна стала, що залежить від* ε.

Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1. При цьому послідовні наближення визначаються формулами

$$z_0(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$z_m(t,\varepsilon) = \varphi\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z_{m-1}(\tau,\varepsilon)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))\times\right.$$
$$\times z_{m-1}\left(\lambda_1\tau + v_1\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)z_{m-1}(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))\times$$
$$\left.\times z_{m-1}\left(\lambda_k\tau + v_k\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)z_{m-1}(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \varepsilon\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Розмірковуючи за індукцією, можна показати (аналогічно доведенню теореми 1), що при всіх $t \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення

$$|z_m(\tilde{t},\varepsilon) - z_m(\tilde{\tilde{t}},\varepsilon)| \le L|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{23}$$

$$|z_m(t,\varepsilon) - z_{m-1}(t,\varepsilon)| \le \overline{M}\theta^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

$$z_m(t+T,\varepsilon) = z_m(t,\varepsilon), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\theta := \frac{2Kl_1}{\alpha}\left(1 + k\frac{2KLl_2}{\alpha} + k\right),$$

$t, \tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $L = L(\varepsilon)$ та $\overline{M} = \overline{M}(\varepsilon) > M$ — деякі додатні сталі, що залежать від ε.

Доведемо, наприклад, що виконуються співвідношення (23). На підставі умов теореми із (22) отримуємо

$$|z_1(\tilde{t},\varepsilon) - z_1(\tilde{\tilde{t}},\varepsilon)| \le \left|\varphi\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-\tau)z_0(\tau,\varepsilon)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{t}-\tau))\times\right.\right.$$

$$\times\, z_0\left(\lambda_1\tau + v_1\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s)z_0(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \ldots$$

$$\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{t}-\tau))\times$$

$$\times z_0\left(\lambda_k\tau + v_k\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s)z_0(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \varepsilon\right) -$$

$$-\,\varphi\left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-\tau)z_0(\tau,\varepsilon)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{\tilde{t}}-\tau))\times\right.$$

$$\times\, z_0\left(\lambda_1\tau + v_1\left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s)z_0(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \ldots$$

$$\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{\tilde{t}}-\tau))\times$$

$$\left.\times z_0\left(\lambda_k\tau + v_k\left(\tilde{\tilde{t}}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-s)z_0(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \varepsilon\right)\Bigg| \leq$$

$$\leq |\varphi(\tilde{t}, 0, \ldots, 0, \varepsilon) - \varphi(\tilde{\tilde{t}}, 0, \ldots, 0, \varepsilon)| \leq l_1|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}| \leq L\,\frac{l_1}{L}\,|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}| \leq L\,|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|,$$

тобто оцінка (23) виконується при $m = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що умову (23) доведено для деякого m, і покажемо, що вона зберігається при переході від m до $m+1$. Дійсно, з огляду на умови теореми із (22) одержуємо

$$|z_{m+1}(\tilde{t},\varepsilon) - z_{m+1}(\tilde{\tilde{t}},\varepsilon)| \leq \Bigg|\varphi\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-\tau)z_m(\tau,\varepsilon)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{t}-\tau))\times\right.$$

$$\times\, z_m\left(\lambda_1\tau + v_1\left(\tilde{t}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-s)z_m(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \ldots$$

$$\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{t}-\tau))\times$$

$$\times z_m \left(\lambda_k \tau + v_k \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\tau, \varepsilon \right) -$$

$$- \varphi \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - \tau) z_m(\tau, \varepsilon) d\tau, \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(\tilde{\tilde{t}} - \tau)) \times \right.$$

$$\times z_m \left(\lambda_1 \tau + v_1 \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\tau, \ldots, \lambda_k \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(\tilde{\tilde{t}} - \tau)) \times$$

$$\left. \times z_m \left(\lambda_k \tau + v_k \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\tau, \varepsilon \right) \Bigg| \le$$

$$\le l_1 \left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - \tau) z_m(\tau, \varepsilon) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - \tau) z_m(\tau, \varepsilon) d\tau \right| + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i(\tilde{t} - \tau)) z_m \left(\lambda_i \tau + v_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\tau - \right.$$

$$\left. \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i(\tilde{\tilde{t}} - \tau)) z_m \left(\lambda_i \tau + v_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\tau \right| \right) \le$$

$$\le l_1 \left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) z_m(\tilde{t} - \xi, \varepsilon) d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) z_m(\tilde{\tilde{t}} - \xi, \varepsilon) d\xi \right| + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i \xi) z_m \left(\lambda_i(\tilde{t} - \xi) + v_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\xi - \right.$$

$$\left. \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i \xi) z_m \left(\lambda_i(\tilde{\tilde{t}} - \xi) + v_i \left(\tilde{\tilde{t}}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\xi \right| \right) \le$$

$$\le l_1 \left(|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}| + \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\xi)| \, |z_m(\tilde{t} - \xi, \varepsilon) - z_m(\tilde{\tilde{t}} - \xi, \varepsilon)| \, d\xi + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i \xi)| \left| z_m \left(\lambda_i(\tilde{t} - \xi) + v_i \left(\tilde{t}, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t} - s) z_m(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) - \right.$$

$$-z_m\left(\lambda_i(\tilde{\tilde{t}}-\xi)+v_i\left(\tilde{\tilde{t}},\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{\tilde{t}}-s)z_m(s,\varepsilon)ds\right),\varepsilon\right)\Bigg|d\xi\Bigg)\leq$$

$$\leq l_1\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+K\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|\xi|}L|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|d\xi+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ke^{-\alpha\lambda_i|\xi|}\times\right.$$

$$\times L\left|\lambda_i(\tilde{t}-\xi)+v_i\left(\tilde{t},\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{t}-s)z_m(s,\varepsilon)ds\right)-\lambda_i(\tilde{\tilde{t}}-\xi)+\right.$$

$$+v_i\left(\tilde{\tilde{t}},\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{\tilde{t}}-s)z_m(s,\varepsilon)ds\right)\Bigg|d\xi\Bigg)\leq l_1\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+KL\frac{2}{\alpha}|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\lambda_iKL\left(\lambda_i|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\left|v_i\left(\tilde{t},\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{t}-s)z_m(s,\varepsilon)ds\right)-\right.\right.$$

$$-v_i\left(\tilde{\tilde{t}},\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{\tilde{t}}-s)z_m(s,\varepsilon)ds\right)\Bigg|\Bigg)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\lambda_i|\xi|}d\xi\Bigg)\leq$$

$$\leq l_1\Bigg(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\frac{2KL}{\alpha}|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i KL\Bigg(\lambda_i|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+l_2\Bigg(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+$$

$$+\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{t}-s)z_m(s,\varepsilon)ds-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\tilde{\tilde{t}}-s)z_m(s,\varepsilon)ds\right|\Bigg)\Bigg)\frac{2}{\alpha\lambda_i}\Bigg)\leq$$

$$\leq l_1\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\frac{2KL}{\alpha}|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+\frac{2KL}{\alpha}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+l_2\left(|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|+KL\frac{2}{\alpha}|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\right)\right)\right)\leq$$

$$\leq l_1\left(1+\frac{2KL}{\alpha}+\frac{2KL}{\alpha}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i+l_2+\frac{2KLl_2}{\alpha}\right)\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\leq$$

$$\leq l_1\left(1+\frac{2KL}{\alpha}+\frac{2KL}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+l_2k+\frac{2KLl_2k}{\alpha}\right)\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\leq$$

$$\leq L\frac{l_1}{L}\left(1+\frac{2KL}{\alpha}\left(1+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+l_2k+\frac{2KLl_2k}{\alpha}\right)\right)|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|\leq L|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|.$$

Отже, цим доведено, що нерівність (23) має місце при $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$ і $m = 0, 1, \ldots$.

Таким чином, послідовність неперервних T-періодичних вектор-функцій $z_m(t, \varepsilon)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, для яких справджуються оцінки (24), рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}(t, \varepsilon)$, яка є розв'язком системи рівнянь (19) і задовольняє умову Ліпшиця

$$|\overline{\gamma}(\tilde{t}) - \overline{\gamma}(\tilde{\tilde{t}})| \leq L|\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|,$$

де $\tilde{t}$, $\tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, L — деяка додатна стала (в цьому легко переконатися, якщо в (22), (23) перейти до границі при $m \to +\infty$). При цьому зауважимо, що має місце нерівність

$$|\overline{\gamma}(t, \varepsilon)| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} |z_m(t, \varepsilon) - z_{m-1}(t, \varepsilon)| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \overline{M} \theta^{m-1} = \frac{\overline{M}}{1 - \theta}.$$

Покажемо тепер, що розв'язок $\overline{\gamma}(t, \varepsilon)$ системи рівнянь (19) задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\gamma}(t, \varepsilon) = 0.$$

Для цього доведемо, що при всіх $t \in \mathbb{R}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ виконуються співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_m(t, \varepsilon) = 0. \tag{25}$$

Розглядаючи послідовно (22), де $m = 0, 1, 2, \ldots$, отримуємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_0(t, \varepsilon) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_1(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi \left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) z_0(\tau, \varepsilon) d\tau, \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t - \tau)) \times \right.$$

$$\times z_0 \left(\lambda_1 \tau + v_1 \left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - s) z_0(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\tau, \ldots$$

$$\ldots, \lambda_k \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t - \tau)) \times$$

$$\left. \times z_0 \left(\lambda_k \tau + v_k \left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - s) z_0(s, \varepsilon) ds \right), \varepsilon \right) d\tau, \varepsilon \right) =$$

$$= \varphi(t, 0, \ldots, 0, 0) \equiv 0,$$

. . . .

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z_m(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) z_{m-1}(\tau,\varepsilon)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))\times\right.$$

$$\times\, z_{m-1}\left(\lambda_1\tau + v_1\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) z_{m-1}(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \ldots$$

$$\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))\times$$

$$\left.\times z_{m-1}\left(\lambda_k\tau + v_k\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) z_{m-1}(s,\varepsilon)ds\right), \varepsilon\right)d\tau, \varepsilon\right) =$$

$$= \varphi\left(t, 0, \ldots, 0, 0\right) = 0, \quad t\in\mathbb{R}, \quad m\geq 2,$$

. . . .

що і необхідно було довести.

Таким чином, розв’язок $\overline{\gamma}(t,\varepsilon) = \lim_{m\to+\infty} z_m(t,\varepsilon)$ системи рівнянь (19) задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\gamma}(t,\varepsilon) = 0$$

(в цьому легко переконатись, якщо в (25) перейти до границі при $m\to+\infty$).

Насамкінець зауважимо, що доведення єдиності неперервного T-періодичного розв’язку $\overline{\gamma}(t,\varepsilon)$ системи рівнянь (19) проводиться так само, як і при доведенні теореми 1.

Таким чином, вектор-функція $\overline{\gamma}(t,\varepsilon)$ є єдиним неперервним T-періодичним розв’язком системи рівнянь (19).

Теорему 2 доведено.

Враховуючи теорему 2 і співвідношення (18), переконуємося, що вектор-функція

$$\bar{y}(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\overline{\gamma}(\tau,\varepsilon)d\tau \tag{26}$$

є єдиним неперервним на $\mathbb{R}$ T-періодичним розв’язком системи рівнянь (1) при $\varepsilon\neq 0$, для якого виконується умова $\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{y}(t,\varepsilon) = 0$. При цьому внаслідок (21) із (26) отримуємо

$$|\bar{y}(\tilde{t},\varepsilon) - \bar{y}(\tilde{\tilde{t}},\varepsilon)| \le \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{t}-\tau)\overline{\gamma}(\tau,\varepsilon)d\tau - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\tilde{\tilde{t}}-\tau)\overline{\gamma}(\tau,\varepsilon)d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\overline{\gamma}(\tilde{t}-\xi,\varepsilon)d\xi - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\overline{\gamma}(\tilde{\tilde{t}}-\xi,\varepsilon)d\xi \right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\xi)||\overline{\gamma}(\tilde{t}-\xi,\varepsilon) - \overline{\gamma}(\tilde{\tilde{t}}-\xi,\varepsilon)|d\xi \le$$

$$\le K \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\xi|} L|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|d\xi \le \frac{2KL}{\alpha}|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|.$$

Отже, вектор-функція $\bar{y}(t,\varepsilon)$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи (1) при $\varepsilon \ne 0$, що задовольняє умови

$$|\bar{y}(\tilde{t},\varepsilon) - \bar{y}(\tilde{\tilde{t}},\varepsilon)| \le \frac{2KL}{\alpha}|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{y}(t,\varepsilon) = 0,$$

де $\tilde{t},\tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, α, K, L — деякі додатні сталі.

Висновок. Таким чином, з огляду на (15) і теореми 1, 2 приходимо до висновку, що система рівнянь (1) має єдиний неперервний на $\mathbb{R}$ T-періодичний розв'язок

$$\widehat{x}(t,\varepsilon) = \bar{y}(t,\varepsilon) + \bar{x}(t)$$

такий, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{x}(t,\varepsilon) = \bar{x}(t),$$

$$|\widehat{x}(\tilde{t},\varepsilon) - \widehat{x}(\tilde{\tilde{t}},\varepsilon)| \le \frac{2K(L+l)}{\alpha}|\tilde{t}-\tilde{\tilde{t}}|,$$

де $\tilde{t},\tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}, K, \alpha, l, L = L(\varepsilon)$ — деякі додатні сталі, $\bar{x}(t)$ — T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$, $\bar{y}(t,\varepsilon)$ — T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon \ne 0$.

Зауваження. Якщо числа $\lambda_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i = \overline{1,k}$, то за допомогою аналогічних міркувань можна дослідити питання існування та єдиності неперервних на всій дійсній осі розв'язків системи рівнянь (1). При цьому для систем рівнянь (7) і (19) мають місце наступні теореми.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 2, 5, 6 теореми 1 і*

1′) $\lambda_i \ne 0$, $i = \overline{1,k}$, — дійсні числа;

3′) всі компоненти вектор-функції $f(t,y_0,y_1,\ldots,y_k,0)$ є неперервними за всіма змінними при $t \in \mathbb{R}$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,k}$, і $\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t,0,\ldots,0,0)| \le N < +\infty$;

4′) функції $\psi_i(t, y)$, $i = \overline{1, k}$, є неперервними за всіма змінними при $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Тоді існує єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\gamma = \gamma(t)$ системи рівнянь (7), що задовольняє умову (9).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 2, 5, 6 теореми 2 і*

1″) $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, k}$, — дійсні числа;

3″) всі компоненти вектор-функції $\varphi(t, y_0, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)$ є неперервними за всіма змінними при $t \in \mathbb{R}$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, k}$, і $\varphi(t, 0, \ldots, 0, 0) \equiv 0$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t, 0, \ldots, 0, \varepsilon)| \leq M < +\infty$;

4″) функції $v_i(t, y)$, $i = \overline{1, k}$, є неперервними за всіма змінними при $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Тоді існує єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}(t, \varepsilon)$ системи рівнянь (19), що задовольняє умову (21), і $\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\gamma}(t, \varepsilon) = 0$.

Отже, на підставі (15) і теорем 3, 4 отримуємо, що система рівнянь (1) має єдиний неперервний при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\widehat{x}(t, \varepsilon) = \bar{y}(t, \varepsilon) + \bar{x}(t)$ такий, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{x}(t, \varepsilon) = \bar{x}(t), \quad |\widehat{x}(\tilde{t}, \varepsilon) - \widehat{x}(\tilde{\tilde{t}}, \varepsilon)| \leq \frac{2K(L + l)}{\alpha} |\tilde{t} - \tilde{\tilde{t}}|,$$

де $\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}} \in \mathbb{R}$, $K, \alpha, l, L = L(\varepsilon)$ — деякі додатні сталі, $\bar{x}(t)$ — неперервний при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$, який визначається за допомогою співвідношення (14), $\bar{y}(t, \varepsilon)$ — неперервний при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon \neq 0$, який визначається за допомогою співвідношення (26).

Література

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891 – 937.
2. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-differential equation // Ann. pol. math. — 1975. — **31**, № 1. — P. 23 – 41.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737 – 747.
4. *Денисенко Н. Л.* Асимптотичні властивості неперервних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу // Наук. вісті НТУУ „КПІ". — 2008. — № 3. — С. 135 – 141.
5. *Денисенко Н. Л.* Про властивості неперервних періодичних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь із малим параметром // Нелінійні коливання. — 2014. — **17**, № 3. — С. 332 – 340.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.

Одержано 21.04.15