УДК 517.968.2

СЛАБКОЗБУРЕНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ*

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

Н. О. Козлова

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна

В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

We obtain conditions for bifurcation of solutions of weakly perturbed linear integral equations.

Получены условия бифуркации решений слабовозмущенных линейных интегральных уравнений.

Теорії інтегро-диференціальних рівнянь, що інтенсивно розвивається останні півстоліття, присвячено чимало робіт. Одним із сучасних напрямків досліджень у цій області є встановлення умов існування і структури розв'язків нетерових крайових задач для таких рівнянь. Слід зауважити, що в більшості вищезазначених досліджень або розглядається випадок виродженого ядра інтегрального оператора [1 – 4], або робиться припущення про єдиність розв'язку розглядуваної задачі [5, 6]. У даній роботі, продовжуючи дослідження [7], висвітлюється один із можливих підходів до відшукання умов біфуркації розв'язків слабкозбуреного інтегрального рівняння, ядро якого є невиродженим.

1. Постановка задачі. Розглянемо у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ слабкозбурене лінійне інтегральне рівняння

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds. \tag{1}$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ — ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $\varepsilon << 1$ — малий параметр.

Ставиться питання знаходження умов біфуркації розв'язків та їх структури слабкозбуреного інтегрального рівняння (1) при умові, що породжуюче рівняння

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) \tag{2}$$

не має розв'язку.

* Виконано за часткової підтримки Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U004691).

2. Зв'язок інтегрального рівняння (1) із зліченновимірною системою алгебраїчних рівнянь зі збуреннями. Як і в роботі [7], рівняння (1) можна звести до зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо у розгляд величини

$$x_i = \int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \tag{3}$$

$$a_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds, \quad \tilde{a}_{ij} = \int_a^b \int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds \tag{4}$$

і отримаємо зліченновимірну систему алгебраїчних рівнянь зі збуреннями

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}x_j, \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty. \tag{6}$$

Запишемо систему (5) у векторному вигляді

$$\Lambda z = g + \varepsilon\Lambda_1 z, \tag{7}$$

де

$$z = \mathrm{col}\,\big(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_i, \ \ldots\big) \in \ell_2, \quad g = \mathrm{col}\,\big(f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_i, \ \ldots\big) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1-a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1i} & \ldots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \ldots & \tilde{a}_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Породжуюча для операторної системи (7) система має вигляд

$$\Lambda z = g. \tag{8}$$

Зазначимо, що оператор $\Lambda\colon \ell_2 \to \ell_2$ має вигляд $\Lambda = I - A$, де $I\colon \ell_2 \to \ell_2$ — одиничний, $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ — компактний оператори. Отже, Λ — фредгольмовий оператор (нетеровий оператор нульового індексу) [2, с. 22; 8, с. 188].

Таким чином, для системи (8) справедливим є наступне твердження [2, с. 69].

Теорема 1. *Однорідна система (8)* $(g = 0)$ *має r-параметричну сім'ю розв'язків* $z \in \ell_2$,

$$z = P_{\Lambda_r}c \quad \forall c \in R^r.$$

Неоднорідна система (8) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються r лінійно незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0,$$

та має r-параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$ вигляду

$$z = P_{\Lambda_r} c + \Lambda^+ g \quad \forall c \in R^r.$$

Тут P_{Λ_r} — матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_Λ, $P_{\Lambda_r^*}$ — матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{Λ^*}, Λ^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до Λ матриця. Вказані матриці обчислюються за формулами [9, с. 501; 2, с. 60]

$$\Lambda^+ = \lim_{\omega \to +0} (\Lambda^* \Lambda + \omega I)^{-1} \Lambda^*, \quad P_\Lambda = I - \Lambda^+ \Lambda, \quad P_{\Lambda^*} = I - \Lambda \Lambda^+. \tag{9}$$

Виникає питання: чи можна за допомогою лінійного збурення Λ_1 зробити систему (7), а отже, і рівняння (1) розв'язними?

Знайдемо умови біфуркації розв'язків та їх структуру слабкозбуреного неоднорідного рівняння (1) при умові, що породжуюче рівняння (2), а отже, і операторна система (8) не мають розв'язків.

Як відомо [10, с. 60], малі збурення зберігають фредгольмовість оператора, тобто оператор $(\Lambda - \varepsilon \Lambda_1)$ є фредгольмовим, що дозволяє використати при дослідженні системи (7) класичні методики.

3. Побудова розв'язків слабкозбуреного інтегрального рівняння. Застосуємо метод Вішика – Люстерника [11] для відшукання умови виникнення розв'язків системи (7) у вигляді частини ряду за степенями малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε. У розглядуваному випадку розв'язок системи (7) будемо шукати у вигляді ряду

$$z = z(\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k. \tag{10}$$

Підставимо ряд (10) у систему (7) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} для знаходження z_{-1} отримаємо однорідну систему

$$\Lambda z_{-1} = 0. \tag{11}$$

Згідно з теоремою 1, однорідна система (11) завжди має розв'язок

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} c_{-1} \quad \forall c_{-1} \in R^r, \tag{12}$$

де вектор-стовпчик c_{-1} буде визначено з умови розв'язності системи відносно z_0.

При ε^0 для визначення z_0 одержимо неоднорідну систему

$$\Lambda z_0 = g + \Lambda_1 z_{-1}. \tag{13}$$

За теоремою 1 умова розв'язності системи (13) має вигляд

$$P_{\Lambda_r^*}(g + \Lambda_1 z_{-1}) = 0. \tag{14}$$

Підставимо вираз для z_{-1} (12) у вказану умову розв'язності (14). Звідси отримаємо алгебраїчну систему відносно $c_{-1} \in R^r$

$$B_0 c_{-1} = -P_{\Lambda_r^*} g, \tag{15}$$

де матриця B_0 розмірності $r \times r$ має вигляд

$$B_0 := P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 P_{\Lambda_r}. \tag{16}$$

Для того щоб система (15) була розв'язною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$P_{B_0^*} P_{\Lambda_r^*} g = 0. \tag{17}$$

Якщо виконується умова

$$P_{B_0^*} P_{\Lambda_r^*} = 0, \tag{18}$$

то умова (17) буде виконуватись і система (15) буде розв'язною відносно c_{-1}:

$$c_{-1} = P_{B_0} \hat{c}_{-1} + \tilde{c}_{-1}, \quad \tilde{c}_{-1} := -{B_0}^+ P_{\Lambda_r^*} g. \tag{19}$$

Зазначимо, що за припущення

$$P_{B_0} = 0 \tag{20}$$

система (15) матиме єдиний розв'язок вигляду

$$c_{-1} = \tilde{c}_{-1} = -{B_0}^+ P_{\Lambda_r^*} g. \tag{21}$$

Звідси випливає, що коефіцієнт z_{-1} у розкладі ряду (10) визначається таким чином:

$$z_{-1} = -P_{\Lambda_r} {B_0}^+ P_{\Lambda_r^*} g. \tag{22}$$

Підставивши у (13) вираз (22), отримаємо

$$\Lambda z_0 = g - \Lambda_1 P_{\Lambda_r} {B_0}^+ P_{\Lambda_r^*} g. \tag{23}$$

У цьому випадку система (23), при виконанні умови (18), має розв'язок

$$z_0 = P_{\Lambda_r} c_0 + \tilde{z}_0, \tag{24}$$

де c_0 — вектор констант, який буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності системи для z_1, $\tilde{z}_0$ — частинний розв'язок неоднорідної системи (23):

$$\tilde{z}_0 = \Lambda^+(g - \Lambda_1 P_{\Lambda_r} B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} g). \tag{25}$$

При ε^1 для визначення z_1 одержимо лінійну неоднорідну систему

$$\Lambda z_1 = \Lambda_1 z_0. \tag{26}$$

Отже, згідно з теоремою 1, система (26) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова розв'язності

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 z_0 = 0. \tag{27}$$

Або ж, враховуючи вирази (27) та (24), отримаємо рівняння відносно елемента c_0:

$$B_0 c_0 = -P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_0. \tag{28}$$

Система (28) при умові (18) має розв'язок. Тоді один із цих розв'язків має вигляд

$$c_0 = -B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_0. \tag{29}$$

Підставивши (29) у (24), отримаємо розв'язок системи (23)

$$z_0 = \tilde{z}_0 - P_{\Lambda_r} B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_0. \tag{30}$$

Якщо умова (18) справджується, то система (26) має сім'ю розв'язків

$$z_1 = P_{\Lambda_r} c_1 + \tilde{z}_1, \tag{31}$$

де $\tilde{z}_1$ — частинний розв'язок неоднорідної системи (26) — має вигляд

$$\tilde{z}_1 = \Lambda^+ \Lambda_1 z_0, \tag{32}$$

а довільний елемент c_1 буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності системи для z_2.

Використовуючи метод математичної індукції, для знаходження коефіцієнтів z_k ряду (10) на кожному наступному кроці отримуємо систему

$$\Lambda z_k = \Lambda_1 z_{k-1}. \tag{33}$$

При тій же умові (18) система (33) має розв'язок

$$z_k = P_{\Lambda_r} c_k + \tilde{z}_k \quad \forall k \geq 1, \tag{34}$$

де частинний розв'язок $\tilde{z}_k$ неоднорідної системи (33) має вигляд

$$\tilde{z}_k = \Lambda^+ \Lambda_1 z_{k-1}. \tag{35}$$

Елемент c_k знаходиться за формулою

$$c_k = -B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_k. \tag{36}$$

Підставивши вираз для z_k у ряд (10), отримаємо

$$z = \frac{P_{\Lambda_r} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} c_k + \tilde{z}_k), \tag{37}$$

де

$$c_k = \begin{cases} -B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} g, & \text{якщо} \quad k = -1, \\ -B_0{}^+ P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 \tilde{z}_k, & \text{якщо} \quad k = \overline{0, \infty}. \end{cases} \tag{38}$$

Аналогічно [2] ряд (37) буде збіжним при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай породжуюча для системи (7) система (8) є нерозв'язною. Тоді якщо виконується умова (18), то система (7) буде мати розв'язок у вигляді збіжного при достатньо малих фіксованих* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *ряду (37). За умови (20) цей розв'язок є єдиним.*

Використовуючи отримані результати для збуреної системи алгебраїчних рівнянь (7), можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідного збуреного інтегрального рівняння (1). Якщо система (7) має хоча б один розв'язок

$$z = \operatorname{col}\left(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_i, \quad \ldots\right),$$

то, згідно з теоремою Ріса – Фішера, існує елемент $x \in L_2[a, b]$ такий, що x_i є його коефіцієнтами Фур'є. Має місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z, \tag{39}$$

де

$$\Phi(t) = \left(\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad \varphi_i(t) \quad \ldots\right),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a, b]$.

Як і в роботі [12, с. 266], можна зробити висновок про те, що множина елементів $x(t)$, які визначаються співвідношенням (39), і є шуканою сім'єю розв'язків рівняння (1).

Отже, тепер ми можемо застосувати теорему 2 до інтегрального рівняння (1).

Теорема 3. *Припустимо, що породжуюче рівняння (2) є нерозв'язним. Тоді якщо виконується умова (18), то інтегральне рівняння (1) буде мати розв'язок* $x \in L_2[a, b]$ *у вигляді ряду*

$$x(t) = \Phi(t) \left(\frac{P_{\Lambda_r} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_{r_1}} c_k + \tilde{z}_k) \right),$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$*. За умови (20) цей розв'язок є єдиним.*

Зауваження 1. Умова (18) є достатньою умовою існування розв'язку системи (7). Якщо умова (18) не виконується, то розв'язок системи (7) у вигляді ряду (10) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду типу (10) за степенями малого параметра ε починаючи із $k = -2, -3, \ldots$ [2, с. 213]. Зокрема, розв'язок рівняння (7) при виконанні додаткової умови можна шукати у вигляді ряду

$$z = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k z_k.$$

4. Приклад. Проілюструємо наведені вище теоретичні викладки на конкретному прикладі. Розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon\int\limits_0^{\pi} K_1(t,s)x(s)ds \tag{40}$$

та породжуюче для нього рівняння

$$x(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)ds = f(t). \tag{41}$$

Введемо у розгляд ортонормовані функції $\varphi_1(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos t$ і $\varphi_2(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin t$, що є власними функціями оператора

$$(Kw)(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(t+s)w(s)ds,$$

які відповідають характеристичним числам $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ відповідно.

Зведемо рівняння (40) та (41) до рівнянь (7) та (8). Використавши позначення (3), (4), отримаємо

$$\Lambda z = g + \varepsilon\Lambda_1 z, \tag{42}$$

$$\Lambda z = g, \tag{43}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} x(t)\cos t dt, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} x(t)\sin t dt, \tag{45}$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} f(t)\cos t dt, \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\pi} f(t)\sin t dt, \tag{46}$$

$$\tilde{a}_{11} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \cos t \cos s dtds, \quad \tilde{a}_{12} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \cos t \sin s dtds, \tag{47}$$

$$\tilde{a}_{21} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \sin t \cos s dtds, \quad \tilde{a}_{22} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi K_1(t,s) \sin t \sin s dtds. \tag{48}$$

Використовуючи формули (9), знаходимо

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Тепер теорема 1 набере такого вигляду.

Теорема 4. *Однорідна система (43)* $(g = 0)$ *має розв'язок*

$$z = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall c \in R.$$

Неоднорідна система (43) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\int\limits_0^\pi f(t) \cos t dt = 0, \tag{50}$$

та має розв'язок

$$z = \begin{pmatrix} c \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\pi f(t) \sin t dt \end{pmatrix} \quad \forall c \in R.$$

При $f(t) = \sin t$ умова розв'язності (50) виконується, і розв'язок системи (43) матиме вигляд $z = \mathrm{col}\left(c, \sqrt{\frac{\pi}{8}}\right)$. Однак умова (50) виконується не для всіх функцій $f(t)$. При $f(t) = \cos t$ умова (50) не виконується, тобто неоднорідне рівняння (43) не має розв'язку.

Дослідимо питання: якщо система (43) не має розв'язку, то чи можна підібрати ядро $K_1(t,s)$ таким чином, щоб система (42) мала розв'язок у вигляді ряду (10)? Для цього скористаємося теоремою 2, тобто перевіримо виконання умови (18). Згідно з (44), (49) маємо

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}_{11}.$$

Якщо

$$\tilde{a}_{11} \neq 0, \tag{51}$$

то, використовуючи формули (9), отримуємо

$$P_{B_0} = P_{B_0^*} = 0.$$

Отже, за припущення (51) виконуються умови (18) і (20), і ми можемо побудувати єдиний розв'язок системи (42) у вигляді ряду (10). Умова (51) виконується, наприклад, якщо $K_1(t,s) = \cos(t-s)$. Справді, використовуючи формули (9), (16), (47) – (49), маємо

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \frac{\pi}{2}, \quad P_{B_0} = P_{B_0^*} = 0.$$

Проілюструємо алгоритм (11) – (38) побудови ряду (10). Згідно з (12), (19), маємо

$$c_{-1} = -B_0{}^{+} P_{\Lambda_r^*} g = -\frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} c_{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес за формулами (34) – (36), переконуємося, що

$$z_k = 0 \quad \forall k \geq 0$$

і ряд (10) обривається на першому доданку, тобто розв'язок системи (42) має вигляд

$$z = z(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\pi}},$$

а розв'язок рівняння (40), згідно з теоремою 3, є таким:

$$x(t) = -\frac{2}{\pi\varepsilon} \cos t.$$

Зауваження 2. Якщо у рівнянні (40) замість ядра $K(t,s) = \dfrac{2}{\pi}\cos(t+s)$ розглядати довільне симетричне ядро, у якого одиниця є власним значенням кратності r, то умова (51) набере вигляду

$$\det B_0 \neq 0, \quad B_0 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{r1} & \tilde{a}_{r2} & \dots & \tilde{a}_{rr} \end{pmatrix}.$$

Література

1. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1576 – 1579.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 p.
3. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для интегральных уравнений с вырожденным ядром // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 1. — С. 36 – 54.
4. *Бойчук О. А., Бондар І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 314 – 321.
5. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Проекційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями та керуванням // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 208 – 216.
6. *Лучка А. Ю., Мельничук В. Ф.* Побудова розв'язків слабконелінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 215 – 222.
7. *Козлова Н. О., Ферук В. А.* Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 1. — С. 58 – 66.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.
9. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
10. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 3 – 80.
12. *Гильберт Д.* Избранные труды. — М.: Факториал, 1998. — Т. 2. — 608 с.

Одержано 02.11.15