УДК 517.988.6

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We obtain conditions for existence of almost periodic solutions of linear and nonlinear almost periodic functional equations without using the $\mathcal{H}$-classes of these equations.

Получены условия существования почти периодических решений линейных и нелинейных почти периодических функциональных уравнений, в которых не используются $\mathcal{H}$-классы этих уравнений.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай G — топологічна абелева група, тобто група, для якої відображення $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ множини $G \times G$ на G є неперервним відображенням прямого добутку $G \times G$ (з топологією прямого добутку) на G, відображення $g \mapsto g^{-1}$ множини G на G також є неперервним і $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для всіх $g_1, g_2 \in G$ [1]. Нехай E — банаховий простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел або полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через C^0 банаховий простір неперервних і обмежених на G функцій $x = x(g)$ зі значеннями в E з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{g \in G} \|x(g)\|_E$.

У просторі C^0 визначимо оператор зсуву S_h, $h \in G$, за допомогою формули

$$(S_h x)(g) = x(gh), \quad g \in G.$$

Очевидно, що в цій формулі $x(gh)$ можна замінити на $x(hg)$.

Означення 1. *Елемент $y \in C^0$ називається майже періодичним (за Бохнером) [2, 3], якщо замикання множини $\{S_h y : h \in G\}$ у просторі C^0 є компактною підмножиною цього простору, тобто з кожної послідовності $(S_{h_n} y)_{n \geq 1}$ можна вибрати збіжну підпослідовність.*

Множина B^0 майже періодичних елементів простору C^0 є підпростором цього простору з нормою $\|\cdot\|_{C^0}$.

Нехай $B[a, r]$ — замкнена куля в C^0 із центром в точці $a \in C^0$ і радиусом r, тобто множина $\{x \in C^0 : \|x - a\|_{C^0} \leq r\}$.

Означення 2. *Оператор $H : C^0 \to C^0$ називається майже періодичним, якщо для кожних елемента $a \in C^0$, числа $r \in (0, +\infty)$ і послідовності $(h_k)_{k \geq 1}$ елементів групи G існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l \geq 1}$, що*

$$\lim_{l_1 \to \infty,\, l_2 \to \infty} \sup_{x \in B[a,r]} \left\| S_{h_{l_1}} H S_{h_{l_1}^{-1}} x - S_{h_{l_2}} H S_{h_{l_2}^{-1}} x \right\|_{C^0} = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора H рівносильне означенню, що використовувалося Е. Мухамадієвим при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі обмежених на осі функцій [4].

Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset E$ і $R(x)$ — множина значень функції $x = x(g)$, тобто множина $\{x(g) : g \in G\}$. Для компактної множини $K \in \mathcal{K}$ позначимо через $\mathfrak{D}_K$ множину всіх елементів $x \in C^0$, для кожного з яких $R(x) \subset K$.

У подальшому будемо використовувати наступне означення майже періодичного оператора.

Означення 3. *Оператор $H \colon C^0 \to C^0$ називається майже періодичним, якщо для кожних множини $K \in \mathcal{K}$ і послідовності $(h_{m_k})_{k \geq 1}$ елементів групи G існує така підпослідовність $\left(h_{m_{k_l}}\right)_{l \geq 1}$, що*

$$\lim_{l_1 \to \infty,\, l_2 \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{D}_K} \left\| S_{h_{m_{l_1}}} H S_{h^{-1}_{m_{l_1}}} x - S_{h_{m_{l_2}}} H S_{h^{-1}_{m_{l_2}}} x \right\|_{C^0} = 0.$$

Розглянемо обмежений майже періодичний у сенсі означення 3 оператор $F : C^0 \to C^0$ (нагадаємо, що обмежений оператор відображає обмежену множину в обмежену множину). Оператору F поставимо у відповідність функціональне рівняння

$$Fx = y, \tag{1}$$

де $y \in B^0$.

Метою статті є встановлення умов, при виконанні яких обмежені розв'язки рівняння (1) є майже періодичними. При дослідженні рівняння (1) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, множини значень яких є підмножинами компактних множин простору E.

2. Зв'язок між означеннями 2 і 3. Очевидно, що кожний майже періодичний за означенням 2 оператор H є майже періодичним і за означенням 3. Проте обернене твердження є хибним, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Нехай банаховий простір E і група G є такими, що існують елемент $\omega = \omega(g)$ простору C^0, послідовність $(g_n)_{n \geq 1}$ елементів групи G і число $\mu > 0$, для яких:

1) $\omega(g) = \omega(g_1)$, якщо $g \in G \setminus \{g_2, g_3, g_4, \ldots\}$;

2) $\|\omega(g_{n_1}) - \omega(g_{n_2})\|_E \geq \mu$, якщо $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ і $n_1 \neq n_2$.

Такими простором і групою є кожний нескінченновимірний банаховий простір [5] і група, що містить нескінченне число елементів.

Розглянемо множину $\mathfrak{S}$ усіх елементів $x \in C^0$, замикання множин значень яких є компактними підмножинами простору E.

Зафіксуємо довільний елемент a простору E і розглянемо елемент $b = b(g)$ простору C^0, для якого $b(g) = a$ для всіх $g \in G$.

Визначимо оператор $H : C^0 \to C^0$ за допомогою рівності

$$Hx = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad x \in \mathfrak{S}, \\ \omega, & \text{якщо} \quad x \in C^0 \setminus \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Очевидно, що для кожної компактної множини $K \subset E$

$$\{S_h H S_{h^{-1}} x : h \in G, x \in \mathfrak{D}_K\} = \{S_h H S_{h^{-1}} x : h \in G, x \in \mathfrak{S}\} = \{b\}.$$

Тому оператор $H : C^0 \to C^0$ є майже періодичним у сенсі означення 3. Проте цей оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, зафіксуємо довільний елемент $z \in C^0 \setminus \mathfrak{S}$. Очевидно, що

$$S_h H S_{h^{-1}} z = S_h \omega \tag{2}$$

для кожного $h \in G$. Тому

$$\left\| S_{h_{m_1}} \omega - S_{h_{m_2}} \omega \right\|_{C^0} = \sup_{g \in G} \| \omega(g h_{m_1}) - \omega(g h_{m_2}) \|_E \geq \| \omega(h_{m_1}) - \omega(h_{m_2}) \|_E \geq \mu,$$

якщо $m_1 \neq m_2$.

Отже, якщо $m_1 \neq m_2$ і $\{S_h z : h \in G\} \subset B[b, r]$ (r — деяке додатне число), то

$$\sup_{x \in B[b,r]} \left\| S_{h_{m_1}} H S_{h_{m_1}^{-1}} x - S_{h_{m_2}} H S_{h_{m_2}^{-1}} x \right\|_{C^0} \geq \mu > 0.$$

Звідси, із співвідношення (2) та означення 2 випливає, що оператор H не є майже періодичним у сенсі означення 2.

3. Функціонал δ. Нехай Λ — обмежена підмножина простору E і $\operatorname{diam} \Lambda$ — діаметр цієї множини, тобто число $\sup\{\|x_1 - x_2\|_E : x_1, x_2 \in \Lambda\}$.

Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$. Позначимо через $N(F, K)$ множину всіх розв'язків рівняння (1) зі значеннями в K. Вважатимемо, що $N(F, K) \neq \varnothing$.

Розглянемо елемент $x^* \in N(F, K)$, для якого $\operatorname{diam} \overline{R(x^*)} \neq 0$. Також розглянемо додатне число $r(x^*, K) = \sup \left\{ \|x_1 - x_2\|_E : x_1 \in \overline{R(x^*)}, x_2 \in K \right\}$.

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(x^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $z \in C^0$, для кожного з яких $R(z) \subset K$ і $\|z - x^*\|_{C^0} \geq \varepsilon$.

Розглянемо функціонал

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(x^*, K, \varepsilon)} \|Fz - Fx^*\|_{C^0}. \tag{3}$$

Очевидно, що тут Fx^* можна замінити на y.

4. Основний результат. За допомогою функціонала δ отримаємо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $x^* \in N(F, K)$ функціонального рівняння (1) $\operatorname{diam} R(x^*) \neq 0$ і*

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{4}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауваження 1. Розв'язок $x^* \in N(F, K)$ рівняння (1), для якого $\operatorname{diam}\ R(x^*) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $x^* \in N(F, K)$ рівняння (1) не є елементом простору B^0. Тоді існує послідовність $\left(S_{h_p} x^*\right)_{p \geq 1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p} x^*\right)_{p \geq 1}$

буде розбіжною. Отже, для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, \operatorname{diam} R(x^*))$

$$\left\| S_{k_{p_r}} x^* - S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} \geq \gamma, \quad r \geq 1,$$

тому

$$S_{k_{p_r}^{-1}} S_{k_{q_r}} x^* \in \Omega(x^*, K, \gamma), \quad r \geq 1.$$

Не обмежуючи загальності доведення можна вважати, що на підставі включення $y \in B^0$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_{k_{p_r}^{-1}} y - S_{k_{q_r}^{-1}} y \right\|_{C^0} = 0. \tag{5}$$

Зазначимо, що $\operatorname{diam} R(x^*)) \leq r(x^*, K))$. Не зменшуючи загальності можна вважати, що послідовність $(S_{k_p} F S_{k_p^{-1}} x)_{p\geq 1}$ збігається рівномірно на $\mathfrak{D}_K$. Тому

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \left\| S_{k_p} F S_{k_p^{-1}} x - S_{k_q} F S_{k_q^{-1}} x \right\|_{C^0} = 0. \tag{6}$$

Покажемо, що

$$\delta(x^*, K, \gamma) = 0. \tag{7}$$

Очевидно, що завдяки (3) і (6)

$$\delta(x^*, K, \gamma) = \inf_{z\in\Omega(x^*,K,\gamma)} \|Fz - Fx^*\|_{C^0} \leq \left\| F S_{k_{p_r}^{-1}} S_{k_{q_r}} x^* - F x^* \right\|_{C^0}, \quad r \geq 1. \tag{8}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
\left\| F S_{k_{p_r}^{-1}} S_{k_{q_r}} x^* - F x^* \right\|_{C^0} &= \left\| S_{k_{p_r}^{-1}} \left(S_{k_{p_r}} F S_{k_{p_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{k_{q_r}^{-1}} \left(S_{k_{q_r}} F S_{k_{q_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} \leq \\
&\leq \left\| S_{k_{p_r}^{-1}} \left(S_{k_{p_r}} F S_{k_{p_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{k_{p_r}^{-1}} \left(S_{k_{q_r}} F S_{k_{q_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} + \\
&\quad + \left\| S_{k_{p_r}^{-1}} \left(S_{k_{q_r}} F S_{k_{q_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - S_{k_{q_r}^{-1}} \left(S_{k_{q_r}} F S_{k_{q_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} = \\
&= \left\| \left(S_{k_{p_r}} F S_{k_{p_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* - \left(S_{k_{q_r}} F S_{k_{q_r}^{-1}} \right) S_{k_{q_r}} x^* \right\|_{C^0} + \\
&\quad + \left\| S_{k_{p_r}^{-1}} S_{k_{q_r}} y - S_{k_{q_r}^{-1}} S_{k_{q_r}} y \right\|_{C^0} \leq \\
&\leq \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \left\| S_{k_{p_r}} F S_{k_{p_r}^{-1}} x - S_{k_{q_r}} F S_{k_{q_r}^{-1}} x \right\|_{C^0} + \\
&\quad + \left\| S_{k_{p_r}^{-1}} y - S_{k_{q_r}^{-1}} y \right\|_{C^0}, \quad r \geq 1,
\end{aligned}$$

то на підставі (5), (6) і (8) справджується рівність (7), що суперечить (4). Отже, припущення, що розв'язок $x^* \in N(F, K)$ рівняння (1) не є елементом простору B^0, хибне.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 2. Теорема 1 застосовна до дослідження широкого класу нелінійних різницевих, дискретних та функціональних рівнянь, оскільки в якості топологічної групи G, що використовується у статті, можна взяти, наприклад, довільну з наступних груп:

1) адитивну групу $\mathbb{R}$ дійсних чисел зі „звичайною” топологією (тобто топологією, що визначається метрикою $d(x, y) = |x - y|$);

2) мультиплікативну групу додатних дійсних чисел зі „звичайною” топологією;

3) адитивну групу $\mathbb{Q}$ раціональних чисел зі „звичайною” топологією;

4) групу $\mathbb{Z}$ цілих чисел з дискретною топологією (тобто кожна множина є відкритою);

5) довільну абелеву групу з дискретною топологією;

6) довільну абелеву групу з грубою топологією (тобто відкритими множинами є лише $\varnothing$ і весь простір).

5. Випадок лінійного рівняння (1). Розглянемо майже періодичний у сенсі означення 3 лінійний неперервний оператор $A : C^0 \to C^0$ і відповідне лінійне рівняння

$$Ax = v, \tag{9}$$

де $v \in B^0$.

Рівняння (9) є окремим випадком рівняння (1), тому до нього застосовна теорема 1.

Завдяки (3) та теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо для розв'язку x^* рівняння (9)* $\operatorname{diam} R(x^*) \neq 0$, $R(x^*) \subset$ $\subset K$ *і*

$$\inf_{z \in \Omega(x^*, K, \varepsilon)} \|Az - v\|_{C^0} > 0 \tag{10}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауваження 3. У теоремі 2 оператор A може не мати неперервного оберненого, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 2. Нехай $G = \mathbb{R}$ і $E = l_\infty$, де l_∞ — банаховий простір обмежених числових послідовностей $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ з нормою $\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Оператор $A : C^0 \to C^0$ в рівнянні (9) визначимо за допомогою співвідношення

$$(Ax)(t) = \left\langle x_1(t), \frac{x_2(t)}{2}, \ldots, \frac{x_n(t)}{n}, \ldots \right\rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що цей оператор є майже періодичним у сенсі означення 3 і не має неперервного оберненого.

Зафіксуємо довільне натуральне число n_0 і компактну множину K, елементами якої є всі послідовності $z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_{n_0}, 0, 0, 0, \ldots \rangle$, для кожної з яких $\|z\|_{l_\infty} \leq 1$.

Очевидно, що для кожної майже періодичної функції $v \in C^0$ зі значеннями в $n_0^{-1} K$ рівняння (9) має розв'язок $x^* \in C^0$ зі значеннями в K і для нього виконується співвідношення (10).

6. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Функціонали, аналогічні δ, вперше застосовані автором у [6 – 12] для дослідження нелінійних майже періодичних різницевих, диференціальних та диференціально-різницевих рівнянь.

Наведені в пп. 4 і 5 умови існування майже періодичних розв'язків рівнянь (1) і (9) є новими. На відміну від теорем Амеріо [13, 14] і Фавара [14, 15] в теоремах 1 і 2 не використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь (1) і (9). Також у теоремі 1 не використовується умова відокремлення розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу рівняння (1).

Дослідженню майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [15], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [13]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [13] використовується також вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара були покращені Е. Мухамадієвим [4]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [16–18]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [3], Амеріо [19] та В. В. Жикову [20].

Література

1. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. — Изд. второе. — М.: Гостехиздат, 1954. — 516 с.
2. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. — 1927. — **96**. — I Teil. — P. 119–147. II Teil. — P. 383–409.
3. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
4. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269–274.
5. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — Київ: Вища шк., 1974. — 456 с.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 1. — С. 118–124 (англ. пер.: *Slyusarchuk V. Yu.* Conditions of almost periodicity for bounded solutions of nonlinear difference equations with continous argument // J. Math. Sci. — 2014. — **197**, № 1. — P. 122–128).
7. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 2. — С. 307–312.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 416–425 (англ. пер.: *Slyusarchuk V. Yu.* Conditions for the existence of almost periodicity solutions of nonlinear difference equations with discrete argument // J. Math. Sci. — 2014. — **201**, № 3. — P. 391–399).
9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 3. — С. 384–393.
10. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. — 2014. — **15**, № 1. — P. 211–215.
11. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. — 2014. — **205**, № 6. — С. 139–160.
12. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — **78**, № 6. — С. 179–192.
13. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. — 1955. — **39**. — P. 97–119.
14. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
15. *Favard J.* Sur les équations différentielles á coefficients presquepériodiques // Acta math. — 1927. — **51**. — P. 31–81.

16. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116(158)**, № 4(12). — С. 483 – 501.

17. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130(172)**, № 1(5). — С. 86 – 104.

18. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.

19. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. — 1960. — **30**. — P. 288 – 301.

20. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 1. — С. 121 – 126.

Одержано 05.12.14