УДК 517.9

ГІПЕРБОЛІЧНІ ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ШВИДКО-ПОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ, У ЯКІЙ СПОСТЕРІГАЄТЬСЯ ДИНАМІЧНА БІФУРКАЦІЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ

І. О. Парасюк, Б. В. Репета

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01004, Україна
e-mail: pio@univ.kiev.ua
bogdan.repeta@gmail.com

This article provides additional information on the dynamics of a fast-slow system which exhibits the dynamical bifurcation of multifrequency oscillations. We show that apart from an asymptotically stable invariant torus the system also has hyperbolic invariant tori of lower dimensions located within a small neighbourhood of its invariant manifold of slow motions.

Приведены дополнительные сведения, касающиеся динамики быстро-медленной системы, в которой наблюдается динамическая бифуркация многочастотных колебаний. Показано, что кроме асимптотически устойчивого инвариантного тора система также имеет гиперболические инвариантные торы меньших размерностей, расположенные в малой окрестности инвариантного многообразия медленных движений.

1. Вступ. Цю роботу присвячено посиленню результатів статті [1], в якій вивчалася динамічна біфуркація багаточастотних коливань у швидко-повільній системі вигляду

$$\dot{x} = f(x, u, \varepsilon), \quad \dot{u} = \varepsilon g(x, u, \varepsilon), \tag{1}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$ — вектор швидких фазових змінних, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор повільно змінних параметрів, ε — малий статичний параметр, $f\colon \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathbb{R}^{2n}$ та $g\colon \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathbb{R}^m$ — гладкі обмежені функції. В [1] розглядався випадок, коли система (1) має інваріантний многовид повільних рухів (повільний многовид), заданий рівнянням $x = 0$, характеристичний поліном оператора $f'_x(0, u, 0)$ має суто уявні корені для всіх u, а у лінійної системи

$$\dot{x} = \left[f'_x(0, u, 0) + \varepsilon f''_{x,\varepsilon}(0, u, 0) \right] x \tag{2}$$

(першого наближення системи у варіаціях для фазових змінних відносно повільного многовиду) простір параметрів u можна розбити на три зони: зону асимптотичної стійкості $\mathcal{D}_s$, перехідну зону невизначеності $\mathcal{D}_*$ та зону цілковитої нестійкості $\mathcal{D}_u$. За певних додаткових умов було показано, що в деякому $O(\sqrt{\varepsilon})$-околі $\mathfrak{U}_\varepsilon$ початку координат простору $\mathbb{R}^{2n}$ існує множина $\mathfrak{V}_\varepsilon$, відносна міра Лебега якої прямує до 1 при $\varepsilon \to 0$, тобто $\lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{mes}(\mathfrak{U}_\varepsilon \setminus \mathfrak{V}_\varepsilon) = 0$, і розв'язки системи (1) з початковими значеннями $(x(0), u(0)) \in \mathfrak{V}_\varepsilon \times \mathcal{D}_s$ демонструють таку поведінку: поки повільно змінний вектор параметрів $u(t)$ протягом часу порядку $O(\varepsilon^{-1})$ рухається в зоні $\mathcal{D}_s$, вектор $x(t)$ фазових компонент розв'язку здійснює експоненціально згасаючі коливання; після того, як $u(t)$, пройшовши через

$\mathcal{D}_*$, опиняється в $\mathcal{D}_u$, амплітуда коливань починає зростати і врешті-решт при $t \to +\infty$ відповідна траєкторія системи (1) притягується до n-вимірного інваріантного тора $\mathcal{T}_\varepsilon^n$, асимптотично зближаючись з певною траєкторією на ньому.

Мета даної роботи полягає в тому, щоб показати, що за певних достатньо природних умов, окрім n-вимірного тора $\mathcal{T}_\varepsilon^n$, система (1) має в області $\mathfrak{U}_\varepsilon \times \mathcal{D}_u$ певну кількість гіперболічних інваріантних торів вимірів менших, ніж n, і ці тори притягують до себе всі ті додатні півтраєкторії, які починаються в $\mathfrak{U}_\varepsilon \times \mathcal{D}_s$, але не притягуються тором $\mathcal{T}_\varepsilon^n$. При цьому для кожного гіперболічного тора ковимірність його стійкого многовиду (множини початкових точок додатних півтраєкторій, які притягуються тором), як підмноговиду в $\mathbb{R}^{2n+m}$, не менша, ніж 2. Як наслідок, множина $\mathfrak{V}_\varepsilon \times \mathcal{D}_s$ складається з усіх точок області $\mathfrak{U}_\varepsilon \times \mathcal{D}_s$, за винятком підмноговидів ненульової ковимірності — стійких многовидів гіперболічних торів. Таким чином, явище динамічної біфуркації коливань у системі (1) демонструють усі рухи, які починаються в $\mathfrak{U}_\varepsilon \times \mathcal{D}_u$, за винятком точок повільного многовиду.

Аби уникнути перевантаження аналізу технічними деталями, далі розглядатимемо частинний випадок $n = 3$.

2. Основна теорема. Як і у статті [1], щодо системи (1) припускаємо, що справджуються такі гіпотези:

$\mathbf{H_1}$) праві частини системи задовольняють умови гладкості та обмеженості, а саме, $f(\cdot,\cdot,\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6\right)$, $g(\cdot,\cdot,\cdot) \in \hat{\mathrm{C}}^\infty\left(\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m\right)$, де через $\hat{\mathrm{C}}^\infty(\mathcal{X} \to \mathcal{Y})$ позначено простір гладких обмежених відображень з області $\mathcal{X}$ у множину $\mathcal{Y}$, які мають обмежені похідні всіх порядків[1] ;

$\mathbf{H_2}$) система має повільний інваріантний многовид, заданий рівнянням $x = 0$, тобто $f(0, u, \varepsilon) = 0$ для всіх $(u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$;

$\mathbf{H_3}$) існує таке додатне число R^*, що при всіх $u \in B_{R^*}^m := \{u \in \mathbb{R}^m\colon \|u\| < R^*\}$ оператор $f_x'(0, u, 0)$ має суто уявні власні числа $\pm i\omega_j(u)$, $j = 1, 2, 3$, до того ж

$$\inf\left\{|\omega_j(u) - \sigma\omega_k(u)| : u \in B_{R^*}^m\right\} > 0 \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad j \neq k, \quad \forall \sigma \in \{0, 1\},$$

і виконано умови відсутності резонансів між частотами

$$\inf\left\{\left|\sum_{i=1}^{3}(q_i - q_{i+3})\omega_i(u) - \sigma\omega_j(u)\right| : u \in B_{R^*}^m\right\} > 0$$

для всіх $j \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$ та всіх $q_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, таких, що

$$2 \leq \sum_{i=1}^{6} q_i \leq 3, \quad \sum_{i=1}^{3}|q_i - q_{i+3} - \sigma\delta_{ij}| \neq 0,$$

де δ_{ij} — символ Кронекера;

[1] Оскільки подальші дослідження стосуються поведінки розв'язків системи (1) в обмеженій області змінних x, u та при малих значеннях параметра ε, то виконання умови $\mathbf{H_1}$ для гладких, але необмежених відображень f та g завжди можна досягти, якщо праві частини системи домножити на гладку фінітну функцію, що дорівнює 1 в кулі, має достатньо великий радіус і центр якої розташовано в початку координат простору $\mathbb{R}^{2n+m+1}$.

$\mathbf{H_4}$) система на повільному многовиді $\dot{u} = c(u)$, де $c(u) := g(0, u, 0)$, конвергентна в деякій кулі, а саме, існують такі додатні числа R^* та $\varkappa > 0$, що $\langle c(u), u\rangle < -\varkappa \|u\|^2$ для всіх $u \in B^m_{R^*}$.

В [1] показано, що за виконання умов $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_3}$ при $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, де $\varepsilon_0 > 0$ є достатньо малим, в деякому околі повільного многовиду існує гладка заміна змінних $(x, u) \mapsto (y, v)$, внаслідок якої система (1) набирає вигляду

$$\dot{z}_j = \left[\varepsilon\hat{\alpha}_j(v,\varepsilon) + \mathrm{i}\hat{\omega}_j(v,\varepsilon) + \sum_{|\mathbf{p}|=1} \hat{h}_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon)(|z|)^{2\mathbf{p}}\right] z_j + O\left(\|z\|^4 + \varepsilon^3\|z\|\right),\ j \in \{1,2,3\},$$
$$\dot{v} = \varepsilon\left[\sum_{0\le|\mathbf{p}|\le 1} \hat{c}_{\mathbf{p}}(v,\varepsilon)(|z|)^{2\mathbf{p}} + O\left(\|z\|^4 + \varepsilon^2\right)\right]. \tag{3}$$

Тут $z_j = y_{2j-1} + \mathrm{i}y_{2j} \in \mathbb{C}$, $z := (z_1, z_2, z_3)$, $\mathbf{p} := (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3_+$, $(|z|)^{2\mathbf{p}} := \prod_{j=1}^3 |z_j|^{2p_j}$, $|\mathbf{p}| := \sum_{j=1}^3 p_j$, коефіцієнти у правих частинах такі, що

$$\hat{\alpha}_j(\cdot,\varepsilon), \hat{\omega}_j(\cdot,\varepsilon) \in \mathrm{C}^\infty\left(B^m_{R^*} \to \mathbb{R}\right),\quad \hat{h}_{j,\mathbf{p}}(\cdot,\varepsilon) \in \mathrm{C}^\infty\left(B^m_{R^*} \to \mathbb{C}\right),\quad \hat{c}_{\mathbf{p}}(\cdot,\varepsilon) \in \mathrm{C}^\infty\left(B^m_{R^*} \to \mathbb{R}^m\right)$$

при кожному фіксованому $\varepsilon \in \mathbb{R}$, причому при кожному $v \in B^m_{R^*}$, як функції ε, коефіцієнти $\hat{\alpha}_j(v,\varepsilon), \hat{\omega}_j(v,\varepsilon), \hat{h}_{j,\mathbf{p}}(v,\varepsilon)$ є поліномами степеня не вищого за 2, а $\hat{c}_{\mathbf{p}}(v,\varepsilon)$ — поліномами степеня не вищого за 1. Крім того, $\hat{\omega}_j(v, 0) = \omega_j(v)$, $\hat{c}_{\mathbf{0}}(v, 0) = g(0, v, 0) \equiv c(v)$, а відношення підпорядкування $O(\cdot)$ рівномірні щодо $v \in B^m_{R^*}$ і, як функції змінних $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, v, \varepsilon$, є гладкими та обмеженими в $B^6_\rho \times B^m_{R^*} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ при деякому $\rho > 0$.

Ввівши, як і в [1], координати r_j, $\varphi_j \,|\bmod 2\pi$ полярного типу співвідношеннями $z_j = \sqrt{\varepsilon r_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$, позначивши $\alpha_j(v) := \hat{\alpha}_j(v, 0)$, $a_{jk}(v) := -\operatorname{Re}\hat{h}_{j,\boldsymbol{\epsilon}_k}(v, 0)$, $b_{jk}(v) := \operatorname{Im}\hat{h}_{j,\boldsymbol{\epsilon}_k}(v, 0)$, $\tilde{c}(v) := \dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}\hat{c}_{\mathbf{0}}(v, 0)$, $c_k(v) := \hat{c}_{\boldsymbol{\epsilon}_k}(v, 0)$, де $\boldsymbol{\epsilon}_k$ — k-й координатний орт простору $\mathbb{R}^3$, $r := (r_1, r_2, r_3)$, $\sqrt{r} := (\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \sqrt{r_3})$, $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, отримаємо систему вигляду

$$\dot{r}_j = 2\varepsilon\left[\alpha_j(v) - \sum_{k=1}^3 a_{jk}(v)r_k + \varepsilon P_j(r,v,\varepsilon)\right] r_j + \varepsilon^{3/2}\sqrt{r_j}R_j(r,v,\varphi,\varepsilon),\quad j \in \{1,2,3\},$$
$$\dot{v} = \varepsilon\left[c(v) + \varepsilon\left(\tilde{c}(v) + \sum_{k=1}^3 c_k(v)r_k\right) + \varepsilon^2 Q(r,v,\varphi,\varepsilon)\right], \tag{4}$$
$$\dot{\varphi}_j = \hat{\omega}_j(v,\varepsilon) + \varepsilon\sum_{k=1}^3 b_{jk}(v)r_k + \varepsilon^{3/2}\frac{\Phi_j(r,v,\varphi,\varepsilon)}{\sqrt{r_j}} + \varepsilon^2\bar{\omega}_j(r,v,\varphi,\varepsilon),\quad j \in \{1,2,3\}.$$

Зазначимо, що всі функції, які фігурують у правих частинах, обмежені і неперервні в $[0,\varrho]^3 \times B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^3 \times [0,\varepsilon_0]$, де $\varrho = \rho^2/\varepsilon_0$. Крім того, рівномірно щодо $(v,\varphi,\varepsilon) \in B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^n \times [0,\varepsilon_0]$ справджуються відношення підпорядкування

$$\|R(r,v,\varphi,\varepsilon)\| = O(\|\sqrt{r}\|),\quad \|\Phi(r,v,\varphi,\varepsilon)\| = O(\|\sqrt{r}\|)\quad \text{при}\quad \|r\| \to 0.$$

При виконанні гіпотези $\mathbf{H_4}$ початок координат в $\mathbb{R}^m$ є атрактором для всіх додатних півтраєкторій системи $\dot{v} = c(v)$, які починаються в $B^m_{R^*}$. Через цю обставину поведінка розв'язків системи (4) значною мірою обумовлена характером траєкторій системи Вольтерра

$$\dot{r}_j = \left(\alpha_j - \sum_{k=1}^{3} a_{jk} r_k\right) r_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{5}$$

де позначено $\alpha_j := \alpha_j(0)$, $a_{jk} := a_{jk}(0)$. Зауважимо, що системи вигляду (5) виникають у математичній теорії динаміки популяцій [2–4].

Зробимо невеликий відступ і наведемо один важливий факт, що стосується стійкості положення рівноваги системи Вольтерра. Для довільного вектора $r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ покладемо $D[r] := \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_d)$ і, як узагальнення (5), розглянемо d-вимірну систему Вольтерра

$$\dot{r} = D[r](\alpha - Ar), \tag{6}$$

у якій $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in (0, +\infty)^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ — дійсна невироджена матриця. Припустимо, що положення рівноваги $r^* := A^{-1}\alpha$ цієї системи має додатні компоненти. Відомо [1, 4], що у випадку, коли знайдеться таке $q \in (0, \infty)^d$, що

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle D[q]A\xi, \xi\rangle > 0, \tag{7}$$

положення рівноваги r^* є атрактором системи (6) у $(0, +\infty)^d$. Цей факт є наслідком наявності у системи Вольтерра додатно визначеної відносно r^* функції Ляпунова

$$V_0(r) = \langle q, r - D[r^*] \ln r\rangle - \langle q, r^* - D[r^*] \ln r^*\rangle,$$

похідна якої внаслідок системи (6) є від'ємно визначеною. (Тут і нижче для довільної функції $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ і довільного $r \in (0, \infty)^d$ позначено $f(r) := (f(r_1), \ldots, f(r_d))$). Справді, оскільки $\alpha - Ar = A(r^* - r)$, то

$$\left[\dot{V}_0\right]_{(6)}(r) = \langle q, (E - D[r^*/r])\,\dot{r}\rangle = \langle q, D[r - r^*]\,D[1/r]D[r](\alpha - Ar)\rangle =$$

$$= \langle q, D[r - r^*]\,A(r^* - r)\rangle = -\langle D[q]A(r - r^*), r - r^*\rangle < 0 \quad \forall r \neq r^*. \tag{8}$$

Із рівності

$$D[r^* + y]\,(\alpha - A(r^* + y)) = -D[r^*]\,Ay + o(\|y\|)$$

випливає, що лінеаризація системи (6) у положенні рівноваги має вигляд $\dot{y} = -D[r^*]\,Ay$ і власні числа матриці $D[r^*]\,A$ мають додатні дійсні частини. Дійсно, додатно визначена квадратична форма $\langle D[q/r^*]y, y\rangle$ є функцією Ляпунова з від'ємно визначеною похідною $-2\langle D[q]Ay, y\rangle$ внаслідок лінеаризованої системи, яка таким чином є асимптотично стійкою. З цих міркувань, зокрема, випливає такий факт:

$$\operatorname{sign}\, \det(A) = \operatorname{sign}\, \det(D[r^*]\,A) > 0. \tag{9}$$

Зауваження 1. Якщо ввести новий скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle_q := \langle D[q]\cdot,\cdot\rangle$, то умова (7) набере вигляду $\min_{\|\xi\|=1}\langle A\xi,\xi\rangle_q > 0$. Далі нам доведеться вимагати, щоб зазначену умову задовольняла матриця $A := \{a_{ij}\}_{i,j=1}^3$ системи (5). Задля спрощення записів будемо припускати виконання умови (7) з одиничною матрицею $D[q] = E$.

Ввівши матрицю $A(v) := \{a_{ij}(v)\}_{i,j=1}^3$ та вектор $\alpha(v) = (\alpha_1(v), \alpha_2(v), \alpha_3(v))$ з урахуванням зауваження 1, приймемо ще дві гіпотези з [1]:

$\mathbf{H_5}$) існують числа $R_* \in (0, R^*)$ та $R_0 \in (0, R_*)$ такі, що

$$\alpha_0 := \min_{1\le j\le 3}\inf_{v\in B^m_{R_0}}\alpha_j(v) > 0, \quad \alpha_* := -\max_{1\le j\le 3}\sup_{v\in B^m_{R^*}\setminus B^m_{R_*}}\alpha_j(v) > 0,$$

$$\lambda_* := \inf_{v\in B^m_{R^*}}\min_{\|\xi\|=1}\langle A(v)\xi,\xi\rangle > 0.$$

Зрозуміло, що коли справджується гіпотеза $\mathbf{H_5}$, то система у варіаціях (2) для кожного $u \in B^m_{R^*}\setminus B^m_{R_*}$ є асимптотично стійкою, а для кожного $u \in B^m_{R_0}$ — цілком нестійкою. Отже, можемо вважати, що $\mathcal{D}_s = B^m_{R^*}\setminus B^m_{R_*}$, $\mathcal{D}_u = B^m_{R_0}$.

З гіпотези $\mathbf{H_5}$ випливає, що всі $\alpha_j > 0$, а матриця $A + A^\top$, де $A := A(0)$, є додатно визначеною. Важливим для подальших міркувань є не лише припущення з [1] про те, що система (5) має положення рівноваги $r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*)$ з додатними компонентами, але й вимога, щоб звуження системи (5) на кожну інваріантну площину $r_i = 0$ мало таку саму властивість, тобто приймаємо таку гіпотезу:

$\mathbf{H_6}$) система $\sum_{k=1}^3 a_{jk}r_k = \alpha_j$, $j \in \{1,2,3\}$, має такий розв'язок $r^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*)$, що $r_j^* > 0$, $j \in \{1,2,3\}$, і для кожного $k \in \{1,2,3\}$ система

$$\begin{aligned} a_{ii}r_i + a_{ij}r_j &= \alpha_i,\\ a_{ji}r_i + a_{jj}r_j &= \alpha_j, \end{aligned}\qquad i,j \in \{1,2,3\}\setminus\{k\},\quad i<j,$$

має розв'язок $r_i = r^*_{ij,i} > 0$, $r_j = r^*_{ij,j} > 0$.

Зауважимо, що внаслідок гіпотези $\mathbf{H_6}$ $a_{ii} > 0$ для всіх $i \in \{1,2,3\}$, а тому система (5) має ще й положення рівноваги з координатами $r_i = 0$, $r_j = 0$, $r_k = r^*_{k,k} := \alpha_k/a_{kk}$ для попарно різних $i,j,k \in \{1,2,3\}$. Крім того, внаслідок додатної визначеності матриці $A + A^\top$ кожна з лінійних систем у гіпотезі $\mathbf{H_6}$ має єдиний розв'язок.

Тепер сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай справджуються гіпотези* $\mathbf{H_1}-\mathbf{H_6}$. *Тоді існує таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що для довільного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *можна виокремити деякий* $O(\sqrt{\varepsilon})$-*окіл* $\mathfrak{O}_\varepsilon$ *початку координат в* $\mathbb{C}^3$ *такий, що система (3) у множині* $\mathfrak{O}_\varepsilon \times B^m_{R^*}$ *має орбітально асимптотично стійкий 3-вимірний інваріантний тор* $\mathcal{T}^3_\varepsilon$, *три двовимірні гіперболічні інваріантні тори* $\mathcal{T}^2_{\varepsilon,12}$, $\mathcal{T}^2_{\varepsilon,13}$, $\mathcal{T}^2_{\varepsilon,23}$ *та три гіперболічні інваріантні цикли* $\mathcal{C}_{\varepsilon,1}$, $\mathcal{C}_{\varepsilon,2}$, $\mathcal{C}_{\varepsilon,3}$. *При цьому тор* $\mathcal{T}^3_\varepsilon$ *міститься в деякому* $O(\varepsilon)$-*околі тора* $\mathfrak{T}^3_\varepsilon$, *заданого рівняннями* $|z_j|^2 = \varepsilon r_j^*$, $j = 1,2,3$, $v = 0$; *кожен тор* $\mathcal{T}^2_{\varepsilon,ij}$ *міститься в деякому* $O(\varepsilon)$-*околі тора* $\mathfrak{T}^2_{\varepsilon,ij}$, *заданого рівняннями* $|z_i|^2 = \varepsilon r^*_{ij,i}$, $|z_j|^2 = \varepsilon r^*_{ij,j}$, $z_k = 0$, $k \in \{1,2,3\}\setminus\{i,j\}$, $v = 0$, *і має* $(4+m)$-*вимірний стійкий многовид, утворений додатними півтраєкторіями, що притягуються до* $\mathcal{T}^2_{\varepsilon,ij}$; *кожен цикл* $\mathcal{C}_{\varepsilon,k}$ *міститься в деякому* $O(\varepsilon)$-*околі циклу* $\mathfrak{C}_{\varepsilon,k}$, *заданого рівняннями* $|z_i|^2 = 0$, $|z_j|^2 = 0$, $|z_k|^2 = \varepsilon r^*_{k,k}$, $i,j \in \{1,2,3\}\setminus\{k\}$, $v = 0$, *і має* $(2+m)$-*вимірний стійкий многовид, утворений додатними півтраєкторіями, що притягуються до* $\mathcal{C}_{\varepsilon,k}$. *Кожна до-*

датна півтраєкторія з початком у $\mathfrak{O}_\varepsilon \times B^m_{R^*}$ *притягується до одного із зазначених інваріантних торів або циклів.*

3. Допоміжний результат про існування гіперболічного інваріантного тора. Перед тим як довести сформульовану вище теорему, наведемо лему, яку можна розглядати як певну модифікацію відомих результатів (див., наприклад, [5, 6]). Важливо зауважити, що ця лема не лише встановлює достатні умови існування інваріантного тора, але й містить вичерпну інформацію про поведінку траєкторій в його околі. Також зазначимо, що ідентифікатори, які використовуються далі, як, наприклад, A, z, Z, μ, не пов'язані з однойменними ідентифікаторами з інших пунктів.

Лема 1. *Нехай праві частини системи*

$$\dot{y} = By + Y(y,\theta), \quad \dot{\theta} = \Theta(y,\theta) \tag{10}$$

задовольняють такі умови:

1) лінійний оператор $B\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *є дихотомічним, а саме, існує пара таких проекторів* $P_\pm\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, *що* $P_+ + P_- = \mathrm{Id}$, *і знайдуться такі додатні сталі* K, κ, *що оператор*

$$G(t) := \begin{cases} e^{Bt}P_- & \text{при} \quad t > 0, \\ -e^{Bt}P_+ & \text{при} \quad t \le 0 \end{cases}$$

задовольняє нерівність

$$\|G(t)\| \le Ke^{-\kappa|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}; \tag{11}$$

2) для відображень $Y(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^d\right)$, $\Theta(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^k\right)$ *знайдуться такі додатні сталі* $M_Y, L_Y, l_Y, L_\Theta, l_\Theta, \lambda$, *що для довільних* $(y,\theta), (y',\theta') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k$ *справджуються нерівності*

$$\|Y(y,\theta)\| \le M_Y, \quad \left\|Y(y,\theta) - Y(y',\theta')\right\| \le L_Y\left\|y-y'\right\| + l_Y\left\|\theta-\theta'\right\|, \tag{12}$$

$$\left\|\Theta(y,\theta) - \Theta(y',\theta')\right\| \le L_\Theta\left\|y-y'\right\| + l_\Theta\left\|\theta-\theta'\right\| \tag{13}$$

і

$$\frac{2K\left(L_Y\lambda + l_Y\right)}{\kappa - L_\Theta\lambda - l_\Theta} \le \lambda, \quad \frac{KL_Y}{\kappa} + \frac{KL_\Theta\left(L_Y\lambda + l_Y\right)}{\left(L_\Theta\lambda + l_\Theta\right)\left(\kappa - L_\Theta\lambda - l_\Theta\right)} < \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Тоді існує таке відображення $Z(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^d\right)$, *що*

$$\sup_{(z,\theta)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k} \|Z(z,\theta)\| \le \frac{2KM_Y}{\kappa}, \quad \left\|Z(z,\theta) - Z(z,\theta')\right\| \le \lambda\left\|\theta-\theta'\right\| \quad \forall \theta,\theta' \in \mathbb{T}^k,$$

і відображення

$$h(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \colon (z,\theta) \mapsto (y,\theta) = h(z,\theta) := (z + Z(z,\theta), \theta) \tag{15}$$

визначає гомеоморфізм спряження потоків систем

$$\dot{z} = Bz, \quad \dot{\theta} = \Theta(z + Z(z,\theta),\theta) \tag{16}$$

та (10).

Доведення. Обмежені відображення $Z(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^d)$, які для деякого $\lambda > 0$ задовольняють нерівність

$$\left\|Z(z,\theta) - Z(z,\theta')\right\| \leq \lambda \left\|\theta - \theta'\right\|,$$

утворюють повний метричний простір з метрикою, породженою нормою

$$|Z|_\infty = \sup_{(z,\theta)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k} \|Z(z,\theta)\|.$$

Позначимо цей простір через $\mathfrak{M}_\lambda$. Для кожного $Z(\cdot,\cdot) \in \mathfrak{M}_\lambda$ система (16) породжує топологічний потік. Справді, покладаючи $\zeta_t(z) := e^{Bt}z$, бачимо, що права частина неавтономної системи

$$\dot{\theta} = \Theta\left(e^{Bt}z + Z(e^{Bt}z,\theta),\theta\right) \tag{17}$$

глобально ліпшицева щодо θ і неперервно залежить від z, як від параметра. Тому розв'язок $\vartheta_t[Z](z,\theta)$ цієї системи, який набуває значення $\theta \in \mathbb{T}^k$ при $t = 0$, має властивість єдиності і є неперервною функцією змінних $(t,z,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k$. Отже, зазначеним потоком є сім'я гомеоморфізмів

$$\left\{\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \ni (z,\theta) \mapsto (\zeta_t(z), \vartheta_t[Z](z,\theta))\right\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

Будемо тепер шукати таке відображення $Z(\cdot,\cdot) \in \mathfrak{M}_\lambda$, щоб залежна від параметрів (z,θ) функція змінної t, визначена рівністю $y(t;z,\theta) := e^{Bt}z + Z\left(e^{Bt}z, \vartheta_t[Z](z,\theta)\right)$, була розв'язком системи

$$\dot{y} = By + Y(y, \vartheta_t[Z](z,\theta)),$$

або, що те саме, функція $\hat{Z}(t;z,\theta) := Z(e^{Bt}z, \vartheta_t[Z](z,\theta))$ була обмеженим на всій осі розв'язком лінійної системи

$$\frac{d}{dt}\hat{Z} = B\hat{Z} + Y\left(e^{Bt}z + Z\left(e^{Bt}z, \vartheta_t[Z](z,\theta)\right), \vartheta_t[Z](z,\theta)\right). \tag{18}$$

Як відомо, такий обмежений розв'язок визначається формулою

$$\hat{Z}(t;z,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)Y\left(e^{Bs}z + Z\left(e^{Bs}z, \vartheta_s[Z](z,\theta)\right), \vartheta_s[Z](z,\theta)\right) ds \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(-\tau)Y\left(e^{B(t+\tau)}z + Z\left(e^{B(t+\tau)}z, \vartheta_{t+\tau}[Z](z,\theta)\right), \vartheta_{t+\tau}[Z](z,\theta)\right) d\tau.$$

Підставимо тут $(\zeta_{-t}(z), \vartheta_{-t}(z,\theta))$ замість (z,θ), позначимо змінну інтегрування через t і покладемо

$$\mathcal{G}[Z](\theta, z) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(-t) Y\left(e^{Bt}z + Z\left(e^{Bt}z, \vartheta_t[Z](z,\theta)\right), \vartheta_t[Z](z,\theta)\right)\, dt.$$

Неважко пересвідчитися в тому, що нерухома точка оператора $\mathcal{G}[\cdot]$, визначеного на $\mathfrak{M}_\lambda$ цією рівністю, і є відображенням, яке породжує обмежений розв'язок $\hat{Z}(\cdot; z, \theta)$ системи (18). Якщо така нерухома точка існує, то за побудовою відображення (15) перетворює розв'язок $t \mapsto (\zeta_t(z), \vartheta_t[Z](z,\theta))$ системи (16) у розв'язок системи (10). З цього факту відразу випливає взаємна однозначність відображення (15). Справді, припустивши протилежне, можна було б знайти пару різних точок $(z_1, \theta_0), (z_2, \theta_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k$ таких, що $z_1 + Z(z_1, \theta_0) = z_2 + Z(z_2, \theta_0)$. Оскільки всі розв'язки системи (10) мають властивість єдиності, то для всіх t повинна була б виконуватися рівність

$$y(t; z_1, \theta_0) = y(t; z_2, \theta_0) \iff e^{Bt}(z_1 - z_2) \equiv Z\left(e^{Bt}z_1, \vartheta_t[Z](z_1,\theta_0)\right) - Z\left(e^{Bt}z_2, \vartheta_t[Z](z_2,\theta_0)\right).$$

Остання тотожність, однак, неможлива, оскільки норма її правої частини обмежена щодо $t \in \mathbb{R}$, а норма лівої — ні.

Покажемо, що існування нерухомої точки оператора $\mathcal{G}[\cdot]$ випливає з принципу Банаха. Для кожного $Z(\cdot,\cdot) \in \mathfrak{M}_\lambda$ маємо

$$|\mathcal{G}[Z]|_\infty \le \frac{2K}{\kappa}\, |Y|_\infty \le \frac{2KM_Y}{\kappa}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що $\mathcal{G}[Z](\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^d\right)$. Покладаючи задля спрощення позначень $\zeta_t := e^{Bt}z$, $\vartheta_t' := \vartheta_t[Z](z,\theta')$, $\vartheta_t'' := \vartheta_t[Z](z,\theta'')$, з урахуванням (17) маємо

$$\left\|\vartheta_t' - \vartheta_t''\right\| \le \left\|\theta' - \theta''\right\| + \left|\int\limits_0^t \left(L_\Theta \left\|Z\left(\zeta_t, \vartheta_s'\right) - Z\left(\zeta_t, \vartheta_s''\right)\right\| + l_\Theta \left\|\vartheta_s' - \vartheta_s''\right\|\right) ds\right| \le$$

$$\le \left\|\theta' - \theta''\right\| + \left|\int\limits_0^t \left(L_\Theta \lambda + l_\Theta\right) \left\|\vartheta_s' - \vartheta_s''\right\| ds\right|,$$

звідки, застосовуючи нерівність Гронуолла, дістаємо оцінку

$$\left\|\vartheta_t' - \vartheta_t''\right\| \le \left\|\theta' - \theta''\right\| \exp\left(\left[L_\Theta \lambda + l_\Theta\right] |t|\right).$$

Тоді з огляду на умову 2 отримуємо

$$\left\|\mathcal{G}[Z](z,\theta') - \mathcal{G}[Z](z,\theta'')\right\| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} K e^{-\kappa|t|} \left[L_Y \left\|Z\left(\zeta_t, \vartheta_t'\right) - Z\left(\zeta_t, \vartheta_t''\right)\right\| + l_Y \left\|\vartheta_t' - \vartheta_t''\right\|\right] dt \le$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K\left(L_Y\lambda + l_Y\right)\left\|\theta' - \theta''\right\|\exp\left(\left[L_\Theta\lambda + l_\Theta - \kappa\right]|t|\right)\,dt \leq$$

$$\leq \frac{2K\left(L_Y\lambda + l_Y\right)}{\kappa - L_\Theta\lambda - l_\Theta}\left\|\theta' - \theta''\right\| \leq \lambda\left\|\theta' - \theta''\right\|.$$

Отже, $\mathcal{G}[\cdot]\colon \mathfrak{M}_\lambda \to \mathfrak{M}_\lambda$.

Покажемо, що відображення $\mathcal{G}[\cdot]$ є стискаючим. Для довільних $Z_i(\cdot,\cdot) \in \mathfrak{M}_\lambda$, $i = 1, 2$, позначимо $\vartheta_t^i := \vartheta_t[Z_i](z,\theta)$. Тоді з урахуванням (17) одержимо

$$\left|\frac{d}{dt}\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\|^2\right| = 2\left|\left\langle \Theta\left(\zeta_t + Z_1(\zeta_t,\vartheta_t^1),\vartheta_t^1\right) - \Theta\left(\zeta_t + Z_2(\zeta_t,\vartheta_t^2),\vartheta_t^2\right), \vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\rangle\right| \leq$$

$$\leq 2\left(L_\Theta\left\|Z_1\left(\zeta_t,\vartheta_t^1\right) - Z_2\left(\zeta_t,\vartheta_t^2\right)\right\|\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\| + l_\Theta\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\|^2\right) \leq$$

$$\leq 2\left(L_\Theta\left|Z_1 - Z_2\right|_\infty\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\| + \left(L_\Theta\lambda + l_\Theta\right)\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\|^2\right).$$

Якщо $\vartheta_t^1 \not\equiv \vartheta_t^2$, то відкриту множину $\left\{t \in \mathbb{R}\colon \vartheta_t^1 \neq \vartheta_t^2\right\}$ можна подати у вигляді об'єднання не менш ніж двох інтервалів, і на кожному такому інтервалі справджується диференціальна нерівність

$$\left|\frac{d}{dt}\,\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\|\right| \leq \left(L_\Theta\lambda + l_\Theta\right)\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\| + L_\Theta\left|Z_1 - Z_2\right|_\infty.$$

Тому функція $\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\|$ обмежена зверху розв'язками задач Коші

$$\dot{s} = \operatorname{sign} t\left[\left(L_\Theta\lambda + l_\Theta\right)\,s + L_\Theta|Z_1 - Z_2|_\infty\right],\quad s(0) = 0 \quad \text{при} \quad t\operatorname{sign} t \geq 0.$$

Таким чином,

$$\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\| \leq \frac{L_\Theta}{L_\Theta\lambda + l_\Theta}|Z_1 - Z_2|_\infty\exp\left(\left[L_\Theta\lambda + l_\Theta\right]|t|\right).$$

З використанням цієї оцінки та з огляду на умову 2 маємо

$$\|\mathcal{G}[Z_1](z,\theta) - \mathcal{G}[Z_2](z,\theta)\| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\kappa|t|}\left(L_Y\left\|Z_1\left(\zeta_t,\vartheta_t^1\right) - Z_2\left(\zeta_t,\vartheta_t^2\right)\right\| + l_Y\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\|\right)\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\kappa|t|}\left(L_Y\left\|Z_1\left(\zeta_t,\vartheta_t^1\right) - Z_2\left(\zeta_t,\vartheta_t^1\right)\right\| + \left(L_Y\lambda + l_Y\right)\left\|\vartheta_t^1 - \vartheta_t^2\right\|\right)dt \leq$$

$$\leq \left[\frac{2KL_Y}{\kappa} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{KL_\Theta\left(L_Y\lambda + l_Y\right)}{L_\Theta\lambda + l_\Theta}\exp\left(\left[L_\Theta\lambda + l_\Theta - \kappa\right]|t|\right)dt\right]|Z_1 - Z_2|_\infty \leq$$

$$\leq 2\left[\frac{KL_Y}{\kappa} + \frac{KL_\Theta\left(L_Y\lambda + l_Y\right)}{\left(L_\Theta\lambda + l_\Theta\right)\left(\kappa - L_\Theta\lambda - l_\Theta\right)}\right]|Z_1 - Z_2|_\infty < |Z_1 - Z_2|_\infty.$$

Тепер існування відображення $Z(\cdot,\cdot)$ випливає з принципу Банаха.

Оскільки $Z(\cdot,\cdot)$ є обмеженим, то для кожного $\theta\in\mathbb{T}^k$ відображення $\mathbb{R}^d\ni z\mapsto z+ +Z(z,\theta)\in\mathbb{R}^d$ коерцитивне, а тому його образом є $\mathbb{R}^d$ (див., наприклад, [7, с. 168]). Звідси випливає, що $h(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k)=\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k$. Вище було встановлено, що відображення $h(\cdot,\cdot)$ є взаємно однозначним. Міркуванням від супротивного неважко довести, що відображення $h^{-1}(\cdot,\cdot)$ неперервне. Отже, $h(\cdot,\cdot)$ — гомеоморфізм простору $\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k$ на себе.

Лему 1 доведено.

Зауваження 2. Припустимо, що умови теореми виконуються не в $\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k$, а в $\overline{B^d_{2\delta}}\times\mathbb{T}^k$ з деяким $\delta>0$, і при цьому $2KM_Y/\kappa<\delta$. Тоді, позначивши через $\pi_{2\delta}(\cdot)$ ортогональну ретракцію простору $\mathbb{R}^d$ на кулю $\overline{B^d_{2\delta}}$, лему 1 можна застосувати до системи

$$\dot y=By+Y(\pi_{2\delta}(y),\theta),\quad \dot\theta=\Theta(\pi_{2\delta}(y),\theta),\tag{19}$$

побудувавши для неї гомеоморфізм (15). Зауважимо, що на множині $B^d_{2\delta}\times\mathbb{T}^k$ ця система збігається з системою (10). Нехай

$$\left\{\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k\ni(z,\theta)\mapsto g^t(z,\theta)=\left(e^{Bt}z,\vartheta_t(z,\theta)\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$$

— потік системи

$$\dot z=Bz,\quad \dot\theta=\Theta\left(\pi_{2\delta}(z+Z(z,\theta)),\theta\right).\tag{20}$$

Тоді $\left\{h\circ g^t\circ h^{-1}\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ — потік системи (19). Визначимо множину $\mathcal{M}:= := h^{-1}\left(B^d_{2\delta}\times\mathbb{T}^k\right)$. Оскільки $z+Z(z,\theta)\in B^d_{2\delta}$ при $z\in B^d_\delta$, то $\mathcal{M}$ містить множину $B^d_\delta\times\mathbb{T}^k$ і, зокрема, спільний інваріантний тор $\{0\}\times\mathbb{T}^k$ систем (20) та (10). Якщо тепер для довільної точки $(z,\theta)\in\mathcal{M}$ визначити інтервал $I(z,\theta)=(T_-(z,\theta),T_+(z,\theta))$ з межами

$$T_-(z,\theta):=\inf\left\{\tau<0\colon g^t(z,\theta)\in\mathcal{M}\quad\forall t\in(\tau,0]\right\}\ge-\infty,$$

$$T_+(z,\theta):=\sup\left\{\tau>0\colon g^t(z,\theta)\in\mathcal{M}\quad\forall t\in[0,\tau)\right\}\le\infty,$$

то $I(z,\theta)\ni t\mapsto(\zeta_t(z),\vartheta_t(z,\theta))$ буде розв'язком системи (16), а

$$I\circ h^{-1}(y,\theta)\ni t\mapsto h\circ g^t\circ h^{-1}(y,\theta)$$

— розв'язком системи (10) для довільної точки $(y,\theta)\in B^d_{2\delta}\times\mathbb{T}^k$. Зокрема, рівняння $y= =Z(0,\theta)$, $\theta\in\mathbb{T}^k$, визначає спільний інваріантний тор $\mathcal{T}$ систем (19) та (10). Легко бачити, що необхідною умовою того, що $T_+(z,\theta)=+\infty$, є $z\in P_-\mathbb{R}^d$. Рівняння $y=z+Z(z,\theta)$, $(z,\theta)\in P_-\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^k$, визначає стійкий інваріантний (відносно системи (19)) многовид $\mathcal{U}^s$ інваріантного тора $\mathcal{T}$, а підобласть многовиду $\mathcal{U}^s$, яка відповідає значенням $z\in P_-\mathbb{R}^d\cap B^d_\delta$, є додатно напівінваріантною відносно системи (10), причому кожна точка цієї підобласті під дією потоку $\{h\circ g^t\circ h^{-1}\}$ прямує до тора $\mathcal{T}$. Якщо ж $(y,\theta)\in\left(B^d_{2\delta}\times\mathbb{T}^k\right)\setminus\mathcal{U}^s$, то існує такий момент $t_*=t_*(y,\theta)>0$, що $h\circ g^{t_*}\circ h^{-1}(y,\theta)\in\partial\left(B^d_{2\delta}\times\mathbb{T}^k\right)$, оскільки функція $\mathbb{R}_+\ni t\mapsto\left\|e^{Bt}z\right\|$ необмежена для кожного $z\in P_+\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$.

Зауваження 3. Нехай $\kappa=\varepsilon\kappa_1$, $L_Y=\varepsilon\mu$, $l_\Theta=\varepsilon\mu$, $l_Y=\varepsilon\mu$, $L_\Theta=\varepsilon L$. Тоді для будь-яких додатних κ_1, L можна вказати таке достатньо мале $\mu>0$, що при всіх $\varepsilon>0$ нерівності

(14) будуть виконуватись, якщо покласти $\lambda = \kappa_1/(2L)$. Зазначимо, що в [5] існування інваріантного тора встановлювалось у випадку, коли $L_\Theta = \varepsilon\mu$.

Зауваження 4. Нехай маємо систему

$$\dot{y} = By + \hat{Y}(y,\psi), \quad \dot{\psi} = \Xi y + \hat{\Theta}(y,\psi),$$

де $\hat{Y}(y,\psi)$, $\hat{\Theta}(y,\psi)$ мають ті самі властивості, що й $Y(y,\theta)$, $\Theta(y,\theta)$ у лемі 1, до того ж $\left\|B^{-1}\right\| = \varepsilon^{-1}\beta$, $\|\Xi\| = \varepsilon\xi$, $\kappa = \varepsilon\kappa_1, L_{\hat{Y}} = \varepsilon\hat{\mu}$, $l_{\hat{\Theta}} = \varepsilon\hat{\mu}$, $l_{\hat{Y}} = \varepsilon\hat{\mu}$, $L_{\hat{\Theta}} = \varepsilon\hat{\mu}$ і $\hat{\mu} \ll 1$. Виконаємо заміну змінних $\psi = \theta + \Xi B^{-1}y$. Тоді дістанемо систему

$$\dot{y} = By + \hat{Y}\left(y,\theta + \Xi B^{-1}y\right), \quad \dot{\theta} = \hat{\Theta}\left(y,\theta + \Xi B^{-1}y\right) - \Xi B^{-1}\hat{Y}\left(y,\theta + \Xi B^{-1}y\right).$$

Поклавши

$$Y(y,\theta) = \hat{Y}\left(y,\theta + \Xi B^{-1}y\right), \quad \Theta(y,\theta) = \hat{\Theta}\left(y,\theta + \Xi B^{-1}y\right) - \Xi B^{-1}\hat{Y}\left(y,\theta + \Xi B^{-1}y\right),$$

матимемо

$$L_Y = L_{\hat{Y}} + l_{\hat{Y}}\beta\xi, \quad l_Y = l_{\hat{Y}}, \quad L_\Theta = L_{\hat{\Theta}} + l_{\hat{\Theta}}\beta\xi + \beta\xi\left(L_{\hat{Y}} + l_{\hat{Y}}\beta\xi\right), \quad l_\Theta = l_{\hat{\Theta}} + \beta\xi l_{\hat{Y}}.$$

Таким чином, тепер замість $L_\Theta = \varepsilon L$ маємо $L_\Theta = \varepsilon\hat{\mu}\left(1+\beta\xi\right)^2 =: \varepsilon\mu$. Скориставшись цим фактом, можна показати, що при достатньо малих μ та ε стійкий многовид інваріантного тора системи (10) є ліпшицевим підмноговидом фазового простору ненульової ковимірності, а тому має нульову $(d+k)$-вимірну лебегову міру.

4. Доведення основної теореми. Без обмеження загальності міркувань далі вважатимемо, що $r^* = (1,1,1)$, оскільки цього завжди можна досягти, виконавши попередньо розтяги $r_i \mapsto r_i^* r_i$, $i \in \{1,2,3\}$. Відтак

$$V_0(r) := \sum_{i=1}^{3}\left[r_i - 1 - \ln r_i\right] = \sum_{i=1}^{3} r_i - \ln\prod_{i=1}^{3} r_i - 3,$$

$$[\dot{V}_0]_{(5)}(r) = -\left\langle A(r-r^*),(r-r^*)\right\rangle \le -\lambda_*\left\|r-r^*\right\|^2.$$

Нехай $\nu \in (0,1)$ і $\Gamma_+ := \{(r(t),v(t),\varphi(t))\}_{t\ge 0}$ — додатна півтраєкторія системи (4) з початком у точці $(r(0),v(0),\varphi(0)) \in \mathcal{S}_\varrho \times B^m_{R^*} \times \mathbb{T}^3$, де

$$\mathcal{S}_\varrho := \left\{r \in \mathbb{R}^n_+ \colon |r| \le \varrho\right\} \subset [0,\varrho]^n.$$

У статті [1] показано, що якщо $V_0(r(0)) \le |\ln\varepsilon^\nu|$ і ε_0 є достатньо малим, то Γ_+ притягується інваріантним тором $\mathcal{T}^3_\varepsilon$ системи (4), розташованим поблизу тора, заданого рівняннями $r = r^*$, $v = 0$. Тепер наше завдання полягатиме в тому, щоб охарактеризувати ті додатні півтраєкторії, які не притягуються тором $\mathcal{T}^3_\varepsilon$.

На підставі результатів [1] можна дійти такого попереднього висновку: існують такі числа $0 < c_0 < C_0 < \varrho$ і $C_* > 0$, що для кожної додатної півтраєкторії Γ_+, яка не притягується тором $\mathcal{T}^3_\varepsilon$, знайдеться такий момент $t_\varepsilon > 0$, що

$$r(t) \in \mathcal{G}_\varepsilon := \left\{r \in \mathbb{R}^3_+ \colon c_0 \le \sum_{i=1}^{3} r_i \le C_0, V_0(r) \ge |\ln\varepsilon^\nu|\right\}, \quad \|v(t)\| \le C_*\varepsilon \quad \forall t \ge t_\varepsilon.$$

Оскільки система (4) автономна, то без обмеження загальності вважаємо, що $t_\varepsilon = 0$.

Твердження 1. *Знайдуться такі додатні сталі* C^*, $\sigma \in (0,1)$ *і* ε_0, *що при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *для кожної додатної півтраєкторії* Γ_+ *системи (5), у якої* $r(t) \in \mathcal{G}_\varepsilon$ *і* $\|v(t)\| \le C_* \varepsilon$ *для всіх* $t \ge 0$, *існують положення рівноваги* $\mathfrak{r}^* = (\mathfrak{r}_1^*, \mathfrak{r}_2^*, \mathfrak{r}_3^*) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, r^*\}$ *системи (5) і момент* $\tau_\varepsilon > 0$ *такі, що* $\|r(t) - \mathfrak{r}^*\| \le C^* \varepsilon^\sigma$ *і* $\|v(t) - v^*(\varepsilon)\| \le C^* \varepsilon^{1+\sigma}$ *для всіх* $t \ge \tau_\varepsilon$, *де* $v^*(\cdot)\colon (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^m$ *— гладке відображення, визначене як неявна функція рівнянням*

$$c(v) + \varepsilon \left(\tilde{c}(v) + \sum_{k=1}^{3} c_k(v) \mathfrak{r}_k^* \right) = 0. \tag{21}$$

Доведення. Для кожної пари $i, j \in \{1,2,3\}$, $i < j$, визначимо функцію

$$V_{ij}(r) := \sum_{k \in \{i,j\}} \left(r_k - r_{ij,k}^* - r_{ij,k}^* \ln \frac{r_k}{r_{ij,k}^*} \right).$$

Її звуження на координатну площину $r_k = 0$, де $k \in \{1,2,3\} \setminus \{i,j\}$, є додатно визначеною функцією відносно точки $(r_{ij,i}^*, r_{ij,j}^*)$, а похідна цієї функції внаслідок системи

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= (\alpha_i - a_{ii} r_i - a_{ij} r_j) r_i, \\ \dot{r}_j &= (\alpha_j - a_{ji} r_i - a_{jj} r_j) r_j \end{aligned} \tag{22}$$

(звуження системи (5) на цю площину) — від'ємно визначеною. Справді, з урахуванням (8) (зараз $d = 2$) маємо

$$\left[\dot{V}_{ij} \right]_{(22)} (r) \le -\lambda_* \left[\left(r_{ij,i}^* - r_i \right)^2 + \left(r_{ij,j}^* - r_j \right)^2 \right]. \tag{23}$$

Зафіксуємо число μ, яке задовольняє умову

$$0 < 2\mu < \nu \min \left\{ r_{ij,k}^* \colon i,j \in \{1,2,3\},\ i < j,\ k \in \{i,j\} \right\},$$

і з функцією $V_{ij}(\cdot)$ пов'яжемо множини

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,ij}^+ := \{ r \in \mathcal{G}_\varepsilon \colon V_{ij}(r) \le |\ln \varepsilon^\mu| \}, \quad \mathcal{G}_{\varepsilon,ij}^- := \{ r \in \mathcal{G}_\varepsilon \colon V_{ij}(r) > |\ln \varepsilon^\mu| \}.$$

Існують такі додатні сталі c_1, C_1, що для кожної точки $r \in \mathcal{G}_{\varepsilon,12}^+$ виконано нерівності

$$c_0 \le \sum_{i=1}^{3} r_i \le C_0, \quad r_1 r_2 r_3 < C_1 \varepsilon^\nu, \quad r_1^{r_{12,1}^*} r_2^{r_{12,2}^*} > c_1 \varepsilon^\mu. \tag{24}$$

Припустимо для визначеності, що $r_{12,2}^* \ge r_{12,1}^*$. Тоді мінімальне значення функції $r_1 r_2$ на множині рівня $r_1^{r_{12,1}^*} r_2^{r_{12,2}^*} = c > 0$ при $0 < r_2 \le C_0$ дорівнює $C_0^{1 - r_{12,2}^*/r_{12,1}^*} c^{1/r_{12,1}^*}$. Тому, як наслідок (24), маємо

$$C_0^{1 - r_{12,2}^*/r_{12,1}^*} c_1^{1/r_{12,1}^*} \varepsilon^{\mu / r_{12,1}^*} r_3 < C_1 \varepsilon^\nu.$$

Оскільки $\nu - \mu/\min_{k\in\{i,j\}}\{r^*_{ij,k}\} \ge \nu/2$, то знайдеться така стала $C_{12,3} > 0$, що $r_3 < C_{12,3}\varepsilon^{\nu/2}$, а тоді при всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$, як наслідок першої нерівності (24), матимемо $c_0/2 \le r_1 + r_2 \le 2C_0$. З цієї нерівності та третьої з нерівностей (24) отримуємо

$$r_1 > c_1^{1/r^*_{12,1}}(2C_0)^{-r^*_{12,2}/r^*_{12,1}}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,1}} =: C_{12,1}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,1}},$$

$$r_2 > c_1^{1/r^*_{12,2}}(2C_0)^{-r^*_{12,1}/r^*_{12,2}}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,2}} =: C_{12,2}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,2}}.$$

Отже, доведено, що

$$\mathcal{G}^+_{\varepsilon,12} \subset \left\{r \in \mathbb{R}^3_+ : r_1 > C_{12,1}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,1}}, r_2 > C_{12,2}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,2}}, r_3 < C_{12,3}\varepsilon^{\nu/2}\right\}.$$

Аналогічні включення одержуємо для інших множин $\mathcal{G}^+_{\varepsilon,ij}$, і, оскільки $\nu/2 > \mu/\min r^*_{ij,k}$, ці множини при всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ попарно не перетинаються.

Тепер оцінимо похідну функції $V_{12}(\cdot)$ внаслідок системи (4) за умови, що $r \in \mathcal{G}^+_{\varepsilon,12}$ і $\|v\| \le C_*\varepsilon$. З урахуванням (23) маємо

$$\left[\dot V_{12}\right]_{(4)} \le -2\varepsilon\lambda_* \sum_{i=1}^{2}(r_i - r^*_{12,i})^2 + 2\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\left|r_i - r^*_{12,i}\right|\left[|a_{i3}|r_3 + O(\varepsilon)\right] +$$

$$+\,\varepsilon^{3/2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left|r_i - r^*_{12,i}\right|}{\sqrt{r_i}}\,\left|R_i(r,v,\varphi,\varepsilon)\right|.$$

Якщо

$$\sum_{i=1}^{2}\left(r_i - r^*_{12,i}\right)^2 \ge \frac{1}{4}\min_{i\in\{1,2\}}\left\{\left(r^*_{12,i}\right)^2\right\},$$

то з урахуванням нерівностей $r_i \ge C_{12,i}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,i}}$, $i \in \{1,2\}$, при всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ маємо

$$\left[\dot V_{12}\right]_{(4)} \le -2\varepsilon\left[\lambda_*\sum_{i=1}^{2}(r_i - r^*_{12,i})^2 + \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(r_i - r^*_{12,i}\right)^2}\,O\left(\varepsilon^{\nu/2}\right)\right] +$$

$$+\,\varepsilon^{3/2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left|r_i - r^*_{12,i}\right|}{\sqrt{r_i}}\,\left|R_i(r,v,\varphi,\varepsilon)\right| \le$$

$$\le -\varepsilon\min_{i\in\{1,2\}}\left\{r^*_{12,i}\right\}\left[\frac{\lambda_*}{2}\min_{i=1,2}\left\{r^*_{12,i}\right\} + O(\varepsilon^{\nu/2}) + O\left(\varepsilon^{\left(1-\mu/\min_{i\in\{1,2\}}\left\{r^*_{12,i}\right\}\right)/2}\right)\right] \le$$

$$\le -\varepsilon\min_{i\in\{1,2\}}\left\{r^*_{12,i}\right\}\left[\frac{A_*}{2}\min_{i\in\{1,2\}}\left\{r^*_{12,i}\right\} + O(\varepsilon^{\nu/4})\right] < 0.$$

Якщо ж $\sum_{i=1}^{2}\left(r_i - r^*_{12,i}\right)^2 < \dfrac{1}{4}\min\limits_{i\in\{1,2\}}\left\{\left(r^*_{12,i}\right)^2\right\}$, то $\left|r_i - r^*_{12,i}\right| < \dfrac{1}{2}\,r^*_{12,i}$, звідки $r_i > \dfrac{1}{2}\,r^*_{12,i}$. Тоді з другої з нерівностей (24) дістаємо $r_3 < \dfrac{4}{r^*_{12,1}r^*_{12,2}}\,C_1\varepsilon^{\nu}$, а тому

$$\left[\dot V_{12}\right]_{(4)} \le -2\varepsilon\left[\lambda_*\sum_{i=1}^{2}(r_i - r^*_{12,i})^2 + O(\varepsilon^{\nu/2})\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(r_i - r^*_{12,i})^2}\right].$$

На підставі одержаних нерівностей неважко дійти таких висновків. Для додатної півтраєкторії Γ_+ такої, що $r(0)\in\mathcal{G}^{+}_{\varepsilon,12}$, $\|v(0)\|\le C_*\varepsilon$, виконується нерівність $V_{12}(r(t)) < V_{12}(r(0)) \le |\ln\varepsilon^{\mu}|$, поки $r(t)\in\mathcal{G}^{+}_{\varepsilon,12}$ і $t>0$. Неважко зрозуміти, що тоді $r(t)\in\mathcal{G}^{+}_{\varepsilon,12}$ для всіх $t\ge 0$. Більше того, похідна функції $V_{12}(r(t))$ залишається відокремленою від 0 деяким від'ємним числом поки $r(t)$ перебуває за межами деякого $O(\varepsilon^{\nu/2})$-околу точки $(r^*_{12,1}, r^*_{12,2}, 0)$. Поблизу цієї точки $V_{12}(r)\sim\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(r_i - r^*_{12,i})^2/r^*_{12,i}$. Тому знайдеться таке $C_1^*>0$, що починаючи з певного моменту $r(t)$ належатиме $C_1^*\varepsilon^{\nu/2}$-околу точки $\mathfrak{r}^* = (r^*_{12,1}, r^*_{12,2}, 0)$. При цьому вибір C_1^* не залежить від конкретної півтраєкторії. Такий самий аналіз проводимо в інших випадках, коли $r(0)\in\mathcal{G}^{+}_{\varepsilon,ij}$.

Розглянемо тепер додатну півтраєкторію Γ_+, для якої $r(t)\in\mathcal{G}^{-}_{\varepsilon,12}\cap\mathcal{G}^{-}_{\varepsilon,13}\cap\mathcal{G}^{-}_{\varepsilon,23}$ при $t\ge 0$. Для визначеності припустимо, що $r_1(0)\ge r_2(0)$ і $r_1(0)\ge r_3(0)$. Тоді знайдуться додатні сталі C_1, C_{12}, C_{13} такі, що $r(0)$ належить множині, координати точок якої задовольняють нерівності

$$r_1\ge r_2,\quad r_1\ge r_3, \tag{25}$$

$$r_1^{r^*_{12,1}}r_2^{r^*_{12,2}} < C_{12}\varepsilon^{\mu},\quad r_1^{r^*_{13,1}}r_3^{r^*_{13,3}} < C_{13}\varepsilon^{\mu},\quad r_2^{r^*_{23,2}}r_3^{r^*_{23,3}} < C_{13}\varepsilon^{\mu}, \tag{26}$$

$$c_0 < r_1+r_2+r_3 < C_0,\quad r_1r_2r_3 < C_1\varepsilon^{\nu}. \tag{27}$$

Зрозуміло, що звідси для всіх достатньо малих $\varepsilon>0$ дістаємо

$$r_2^{r^*_{12,1}+r^*_{12,2}} < C_{12}\varepsilon^{\mu},\quad r_3^{r^*_{13,1}+r^*_{13,3}} < C_{13}\varepsilon^{\mu},\quad c_0/2 < r_1 < 2C_0, \tag{28}$$

а отже,

$$r_2 < r_1,\quad r_3 < r_1.$$

Далі, оскільки вздовж Γ_+ виконуються нерівності (26) та (27), а початкова точка задовольняє нерівності (25), то нерівності (25) у точках Γ_+ порушуватися не можуть. Тому вздовж Γ_+ справджуються нерівності (28). Але тоді з (26) і третьої з нерівностей (28) випливають нерівності

$$r_2 < (2/c_0)^{r^*_{12,1}/r^*_{12,2}}C_{12}^{1/r^*_{12,2}}\varepsilon^{\mu/r^*_{12,2}},\quad r_3 < (2/c_0)^{r^*_{13,1}/r^*_{13,3}}C_{13}^{1/r^*_{13,3}}\varepsilon^{\mu/r^*_{13,3}}.$$

Покажемо, що точка, рухаючись уздовж Γ_+, потрапляє і в подальшому залишається в $O(\varepsilon^{\sigma})$-околі точки $(r^*_{1,1}, 0, 0)$, де

$$\sigma = \min\left\{1, \frac{\nu}{2}, \mu\min\left\{\frac{1}{r^*_{ij,k}} : i,j\in\{1,2,3\},\ i<j,\ k\in\{i,j\}\right\}\right\}.$$

З цією метою оцінимо похідну функції $V_1(r) := r_1 - r^*_{1,1}\ln(r_1/r^*_{1,1}) - r^*_{1,1}$ внаслідок системи (4):

$$\left[\dot V_1\right]_{(4)} = 2\varepsilon\left(r_1 - r^*_{1,1}\right)\left[\alpha_1 - a_{11}r_1 - a_{12}r_2 - a_{13}r_3 + O(\varepsilon)\right] +$$

$$+\varepsilon^{3/2}\frac{r_1 - r^*_{1,1}}{\sqrt{r_1}}R_1(r,v,\varphi,\varepsilon) \le -2\varepsilon\left[a_{11}(r_1 - r^*_{1,1})^2 + O(\varepsilon^\sigma)\left|r_1 - r^*_{1,1}\right|\right].$$

Оскільки $V_1(r) \sim \dfrac{1}{2r^*_{1,1}}(r_1 - r^*_{1,1})^2$ при $r_1 \to r^*_{1,1}$, то, збільшивши в разі потреби сталу C^*_1, на підставі тих самих аргументів, які вище стосувалися функції $V_{12}(r)$, можемо стверджувати, що починаючи з певного моменту $r(t)$ належатиме $C^*_1\varepsilon^\sigma$-околу точки $\mathfrak{r}^* = (r^*_{1,1}, 0, 0)$. Аналогічні оцінки отримуємо для положень рівноваги $r^*_{2,2}$ та $r^*_{3,3}$.

Розглянемо підсистему

$$\dot v = \varepsilon\left[c(v) + \varepsilon\left(\tilde c(v) + \sum_{k=1}^{3}c_k(v)r_k\right) + \varepsilon^2 q(r,v,\varphi,\varepsilon)\right] \tag{29}$$

для значень r з $C^*\varepsilon^\sigma$-околу однієї з точок $\mathfrak{r}^* = (\mathfrak{r}^*_1, \mathfrak{r}^*_2, \mathfrak{r}^*_3)$.

Наслідком гіпотези $\mathbf{H_4}$ є рівність $c(0) = 0$ і невиродженість $c'(0)$. Тоді за теоремою про неявну функцію рівняння (21) має гладкий в околі $\varepsilon = 0$ розв'язок $v^*(\varepsilon) = -\varepsilon\left[c'(0)\right]^{-1} \times$ $\times\left(\tilde c(0) + \sum_{k=1}^3 c_k(0)\mathfrak{r}^*_k\right) + O(\varepsilon^2)$. Оскільки $c(v) = \left[c'(0) + o(1)\right]v$ при $\|v\| \to 0$ і $\|c'(v^*(\varepsilon)) -$ $- c'(0)\| = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, то при достатньо малих ε виконується нерівність $\langle c'(v^*(\varepsilon))v, v\rangle \le$ $\le -\dfrac{1}{2}\varkappa\|v\|^2$ для всіх $v \in \mathbb{R}^m$. Взявши до уваги рівності

$$c(v) + \varepsilon\left(\tilde c(v) + \sum_{k=1}^{3}c_k(v)\mathfrak{r}^*_k\right) = c(v) - c(v^*(\varepsilon)) +$$

$$+\varepsilon\left(\tilde c(v) - \tilde c(v^*(\varepsilon)) + \sum_{k=1}^{3}\left[c_k(v) - c_k(v^*(\varepsilon))\right]\mathfrak{r}^*_k\right) =$$

$$= \left[c'(v^*(\varepsilon)) + o(1)\right](v - v^*(\varepsilon)),$$

при всіх достатньо малих ε і $\|v\| \le C_*\varepsilon$ дістанемо

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{(29)}\|v - v^*(\varepsilon)\|^2 \le -\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\|v - v^*(\varepsilon)\|^2 + \|v - v^*(\varepsilon)\| \times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{3}|c_k(v)|\,|r_k - \mathfrak{r}^*_k| + \varepsilon^2\|q(r,v,\varphi,\varepsilon)\|\right].$$

Якщо при цьому $\|r - \mathfrak{r}^*\| \le C^*_1\varepsilon^\sigma$, то знайдеться така стала $C^*_2 > 0$, що при всіх достатньо малих ε похідна функції $\|v - v^*(\varepsilon)\|^2$ внаслідок системи (29) буде відокремлена від нуля деяким від'ємним числом, поки $\|v - v^*(\varepsilon)\| > C_2^* \varepsilon^{1+\sigma}$. Звідси й випливає існування шуканого моменту τ_ε, якщо покласти $C^* = \max\{C_1^*, C_2^*\}$.

Твердження 1 доведено.

Твердження 2. *Кожне положення рівноваги системи (5) з координатами* $r_k = 0$, $r_i = r_{ij,i}^* > 0$, $r_j = r_{ij,j}^* > 0$, *де* $i, j \in \{1,2,3\} \setminus \{k\}$, $i < j$, *а також з координатами* $r_j = r_k = 0$, $r_i = r_{i,i}^* > 0$, *де* $i, j, k \in \{1,2,3\}$ *попарно різні, є гіперболічним.*

Доведення. З'ясуємо характер положення рівноваги $(r_{12,1}^*, r_{12,2}^*, 0)$ системи (5). Матриця лінеаризованої системи має вигляд

$$A_{12} := \begin{pmatrix} -a_{11}r_{12,1}^* & -a_{12}r_{12,1}^* & -a_{13}r_{12,1}^* \\ -a_{21}r_{12,2}^* & -a_{22}r_{12,2}^* & -a_{23}r_{12,2}^* \\ 0 & 0 & \alpha_3 - a_{31}r_{12,1}^* - a_{32}r_{12,2}^* \end{pmatrix}. \tag{30}$$

З викладених вище фактів щодо системи Вольтерра при $d = 2$ випливає, що власні числа матриці

$$\begin{pmatrix} -a_{11}r_{12,1}^* & -a_{12}r_{12,1}^* \\ -a_{21}r_{12,2}^* & -a_{22}r_{12,2}^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r_{12,1}^* & 0 \\ 0 & r_{12,2}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

мають від'ємні дійсні частини, а тоді, оскільки $r_{12,i}^* > 0$ при $i = 1, 2$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Покажемо, що $\alpha_3 - a_{31}r_{12,1}^* - a_{32}r_{12,2}^* > 0$. Справді, оскільки $\det A > 0$ (див. (9)), то за правилом Крамера дістаємо рівність

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_3 \end{vmatrix} = r_3^* \det A > 0.$$

Розкладаючи визначник у лівій частині цієї формули за останнім рядком, маємо

$$a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & \alpha_1 \\ a_{22} & \alpha_2 \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_1 \\ a_{21} & \alpha_2 \end{vmatrix} + \alpha_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(\alpha_3 - a_{31}r_{12,1}^* - a_{32}r_{12,2}^*\right)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Отже, матриця лінеаризованої системи в положенні рівноваги $(r_{12,1}^*, r_{12,2}^*, 0)$ має пару власних чисел з від'ємними дійсними частинами і одне додатне власне число. Зрозуміло, що такий самий висновок можна зробити щодо інших положень рівноваги з парою додатних і однією нульовою компонентами.

Нарешті, з'ясуємо характер положення рівноваги $(r_{1,1}^*, 0, 0)$ системи (5). Матриця лінеаризованої системи має вигляд

$$A_1 := \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2a_{11}r_{1,1}^* & -a_{12}r_{1,1}^* & -a_{13}r_{1,1}^* \\ 0 & \alpha_2 - a_{21}r_{1,1}^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - a_{31}r_{1,1}^* \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0,$$

як при $j = 2$, так і при $j = 3$, і за правилом Крамера

$$r^*_{1j,j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_1 \\ a_{j1} & \alpha_j \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix},$$

то елементи головної діагоналі — власні числа — мають такі знаки:

$$\alpha_1 - 2a_{11}r^*_{1,1} = -\alpha_1 < 0, \quad \alpha_j - a_{j1}r^*_{1,1} = \frac{r^*_{1j,j}}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad j = 2, 3.$$

Зрозуміло, що й для інших положень рівноваги з парою нульових і однією додатною компонентами матриці відповідних лінеаризованих систем мають одне від'ємне і пару додатних власних чисел.

Твердження 2 доведено.

Повернемось до системи (3). Для дослідження поведінки траєкторій в околі двовимірного тора

$$\mathfrak{T}^2_{\varepsilon,12}\colon \quad |z_1|^2 = \varepsilon r^*_{12,1}, \quad |z_2|^2 = \varepsilon r^*_{12,2}, \quad z_3 = 0, \quad v = 0$$

введемо спочатку в цій системі полярні змінні $r_1, r_2 \in (0, \infty)$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{S}^1$ та нову комплексну змінну ζ за формулами $z_j = \sqrt{\varepsilon r_j} e^{\mathrm{i}\psi_j}$, $j = 1, 2$, $z_3 = \sqrt{\varepsilon}\zeta$. Тоді система набере вигляду

$$\dot{r}_j = 2\varepsilon \left[\alpha_j(v) - \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(v) r_k - a_{j3}(v)|\zeta|^2 + O(\varepsilon)\right] r_j + O(\varepsilon^{3/2}), \quad j \in \{1, 2\},$$

$$\dot{\zeta} = i\hat{\omega}_3(v,\varepsilon)\zeta + \varepsilon \left[\alpha_3(v) + \sum_{k=1}^{2} h_{3k}(v) r_k - h_{33}(v)|\zeta|^2 + O(\varepsilon)\right] \zeta + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\dot{v} = \varepsilon \left[c(v) + \varepsilon \left(\tilde{c}(v) + \sum_{k=1}^{2} c_k(v) r_k + c_3(v)|\zeta|^2\right) + O\left(\varepsilon^2\right)\right],$$

$$\dot{\psi}_j = \hat{\omega}_j(v,\varepsilon) + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{2} b_{jk}(v) r_k + b_{j3}(v)|\zeta|^2\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad j \in \{1, 2\}.$$

Тепер виконаємо тут ще одну заміну змінних $r_j = r^*_{12,j} + \xi_j$, $j \in \{1, 2\}$, $v = v^*(\varepsilon) + \varepsilon w$, де $v^*(\varepsilon)$ взято з твердження 1 для $\mathfrak{r}^* = \left(r^*_{12,1}, r^*_{12,2}, 0\right)$. Тоді, ввівши вектор

$$\Omega(w,\varepsilon) := \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial v}\,\hat{\omega}_3(v,\varepsilon)\right]_{v=v^*(\varepsilon)+s\varepsilon w} ds,$$

дістанемо систему

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_j &= -2\varepsilon \sum_{k=1}^{2} a_{jk} r^*_{12,j} \xi_k - 2\varepsilon \left[\sum_{k=1}^{2} a_{jk}\xi_k\xi_j + a_{j3}|\zeta|^2 \left(r^*_{12,j} + \xi_j\right)\right] + \\
&\quad + \varepsilon^{3/2} \Xi_j \left(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon\right), \quad j \in \{1,2\}, \\
\dot{\zeta} &= \left[i\hat{\omega}_3(v^*(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon \left(\alpha_3 + \sum_{k=1}^{2} h_{3k} r^*_{12,k} \right)\right]\zeta + \\
&\quad + \varepsilon \left(i \left\langle \Omega(w,\varepsilon), w \right\rangle + \sum_{k=1}^{2} h_{3k}\xi_k + h_{33}\zeta^2 \right)\zeta + \varepsilon^{3/2} Z\left(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon\right), \\
\dot{w} &= \varepsilon \left[c'(0) w + \sum_{k=1}^{2} c_k \xi_k + c_3 |\zeta|^2 \right] + \varepsilon^2 W(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon), \\
\dot{\psi}_j &= \hat{\omega}_j(v^*(\varepsilon) + \varepsilon w, \varepsilon) + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{2} \left(r^*_{12,k} + \xi_k\right) b_{jk} + b_{j3}|\zeta|^2 \right) + \\
&\quad + \varepsilon^{3/2} \Psi_j \left(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon\right), \quad j \in \{1,2\},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

де $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, $h_{jk} := h_{j,\epsilon_k}(0)$, $b_{jk} = \operatorname{Im} h_{jk} = b_{jk}(0)$, $c_k = c_k(0)$, а функції Ξ_j, Z, W, Ψ_j, $j \in \{1,2\}$, для достатньо малого $\delta > 0$ на множині, яка визначається співвідношеннями

$$
\|\xi\|^2 + |\zeta|^2 + \|w\|^2 \le \delta^2, \ (\psi_1, \psi_2) \in \mathbb{T}^2, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],
$$

задовольняють умову Ліпшиця за змінними $\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi$ зі сталою Ліпшиця, яка не залежить від ε.

Неважко зрозуміти, що яким би малим не було δ, число ε_0 можна вибрати так, щоб півтраєкторії Γ_+, про яку йдеться у твердженні 1, відповідав розв'язок системи (32), який задовольняє нерівність $\|\xi(t)\|^2 + |\zeta(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \le 4\delta^2$ для всіх $t \ge \tau_\varepsilon$. Покажемо, що всі такі додатні півтраєкторії утворюють $(4+m)$-вимірний підмноговид $(6+m)$-вимірного фазового простору і при $t \to +\infty$ притягуються до 2-вимірного гіперболічного інваріантного тора $\mathcal{T}^2_{\varepsilon,12}$, розташованого поблизу тора $\mathfrak{T}^2_{\varepsilon,12}$.

Зведемо систему (32) до еквівалентної $(4+m+2)$-вимірної дійсної системи того самого вигляду, що й система (10), увівши нормальні $y := (\xi_1, \xi_2, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w)$ та кутові $\theta := (\psi_1, \psi_2)$ координати. Для такої системи матриця B має блоково-трикутний вигляд з трьома блоками на головній діагоналі, а саме,

$$-2\varepsilon\begin{pmatrix} a_{11}r^*_{12,1} & a_{12}r^*_{12,1} \\ a_{21}r^*_{12,2} & a_{22}r^*_{12,2}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\left(\alpha_3-\sum\limits_{k=1}^{2}a_{3k}r^*_{12,k}\right) & -\hat{\omega}_3(v^*(\varepsilon),\varepsilon)-\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{2}b_{3k}r^*_{12,k} \\ \hat{\omega}_3(v^*(\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{2}b_{3k}r^*_{12,k} & \varepsilon\left(\alpha_3-\sum\limits_{k=1}^{2}a_{3k}r^*_{12,k}\right)\end{pmatrix}$$

та $\varepsilon c'(0)$. З урахуванням характеру власних чисел матриці A_{12} у (30) та структури матриці B легко дійти висновку, що остання має $2+m$ власних чисел з від'ємними і 2 власних числа з додатними дійсними частинами, а оцінка (11) справджується зі сталою K, що не залежить від ε, та сталою $\kappa = \varepsilon\kappa_1$, де $\kappa_1 > 0$ також не залежить від ε. Аналізуючи характер правих частин системи (32), бачимо, що в розглядуваному випадку функції в правих частинах еквівалентної $(4+m+2)$-вимірної дійсної системи допускають природне зображення вигляду

$$Y(y,\theta;\varepsilon) = \varepsilon Y_1(y;\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}Y_2(y,\theta;\varepsilon),$$

$$\Theta(y,\theta;\varepsilon) = \omega\left(v^*(\varepsilon)\right)+\varepsilon\Theta_1(y;\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}\Theta_2(y,\theta;\varepsilon).$$

Як наслідок, незалежно від $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ і δ можна вибрати додатні сталі M, L, l так, щоб на множині $\overline{B^{4+m}_{2\delta}}\times\mathbb{T}^2$ функції $Y(\cdot,\cdot;\varepsilon)$ та $\Theta(\cdot,\cdot;\varepsilon)$ задовольняли нерівності (12), (13) зі сталими

$$M_Y := \varepsilon\left(\delta^2+\varepsilon^{1/2}\right)M,\quad L_Y := \varepsilon\left(\delta+\varepsilon^{1/2}\right)L,\quad l_Y := \varepsilon^{3/2}l,$$

$$L_\Theta = \varepsilon L,\quad l_\Theta := \varepsilon^{3/2}l.$$

Тепер твердження теореми, яке стосується тора $\mathcal{T}^2_{\varepsilon,12}$, випливає з леми 1 та зауважень 2, 3.

Дослідимо поведінку траєкторій в околі циклу

$$\mathfrak{C}_{\varepsilon,1}\colon |z_1|^2 = \varepsilon r^*_{1,1} := \frac{\alpha_1}{a_{11}},\quad z_2 = 0,\quad z_3 = 0,\quad v = 0.$$

Спочатку введемо нові змінні $r_1 \in (0,\infty)$, $\zeta_2,\zeta_3 \in \mathbb{C}$, $\psi \in \mathbb{S}^1$ за формулами $z_1 = \sqrt{\varepsilon r_1}e^{\mathrm{i}\psi}$, $z_2 = \sqrt{\varepsilon}\zeta_2$, $z_3 = \sqrt{\varepsilon}\zeta_3$. Тоді система (3) набере вигляду

$$\dot{r}_1 = 2\varepsilon\left[\alpha_1(v)-a_{11}(v)r_1-\sum_{k=2}^{3}a_{1k}(v)|\zeta_k|^2+O(\varepsilon)\right]r_1+O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\dot{\zeta}_j = i\hat{\omega}_j(v,\varepsilon)\zeta_j+\varepsilon\left[\alpha_j(v)+h_{j1}(v)r_1+\sum_{k=2}^{3}h_{jk}(v)|\zeta_k|^2+O(\varepsilon)\right]\zeta_j+O(\varepsilon^{3/2}),\quad j \in \{2,3\},$$

$$\dot{v} = \varepsilon\left[c(v) + \varepsilon\left(\tilde{c}(v) + c_1(v)r_1 + \sum_{k=2}^{3} c_k(v)|\zeta_k|^2\right) + O(\varepsilon^2)\right],$$

$$\dot{\psi} = \hat{\omega}_1(v,\varepsilon) + \varepsilon\left(b_{11}(v)r_1 + \sum_{k=1}^{3} b_{1k}(v)|\zeta_k|^2\right) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Тепер виконаємо тут ще одну заміну змінних $r_j = r^*_{1,1} + \xi$, $v = v^*(\varepsilon) + \varepsilon w$, де $v^*(\varepsilon)$ взято з твердження 1 для $\mathfrak{r}^* = (r^*_{1,1}, 0, 0)$. Тоді, ввівши вектори

$$\Omega_j(w,\varepsilon) := \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial v}\,\hat{\omega}_j(v,\varepsilon)\right]_{v=v^*(\varepsilon)+s\varepsilon w} ds, \quad j \in \{2,3\},$$

одержимо систему

$$\dot{\xi} = -2\varepsilon\alpha_1\xi - 2\varepsilon\left[a_{11}\xi^2 + \sum_{k=2}^{3} a_{1k}|\zeta_k|^2\left(r^*_{1,1} + \xi\right)\right] + \varepsilon^{3/2}\Xi\left(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon\right),$$

$$\dot{\zeta}_j = \left[i\hat{\omega}_j(v^*(\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\left(\alpha_j - a_{j1}r^*_{1,1}\right)\right]\zeta_j + \varepsilon\left(i\left\langle\Omega_j(w,\varepsilon), w\right\rangle + h_{j1}\xi + \sum_{k=2}^{3} h_{jk}|\zeta_k|^2\right)\zeta_j +$$

$$+ \varepsilon^{3/2} Z_j\left(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon\right), \quad j \in \{2,3\},$$

$$\dot{w} = \varepsilon\left[c'(0)w + c_1\xi + \sum_{k=2}^{3} c_k|\zeta_k|^2\right] + \varepsilon^2\hat{W}(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon),$$

$$\dot{\psi} = \hat{\omega}_1\left(v^*(\varepsilon) + \varepsilon w, \varepsilon\right) + \varepsilon\left(\left(r^*_{1,1} + \xi\right)b_{11} + \sum_{k=2}^{3} b_{1k}|\zeta_k|^2\right) + \varepsilon^{3/2}\Psi\left(\xi, \operatorname{Re}\zeta, \operatorname{Im}\zeta, w, \psi, \varepsilon\right),$$

де $\zeta = (\zeta_2, \zeta_3)$, а функції Ξ, Z_j, $\hat{W}$, Ψ для достатньо малого $\delta > 0$ на множині, яка визначається співвідношеннями

$$|\xi|^2 + \|\zeta\|^2 + \|w\|^2 \le 4\delta^2, \quad \psi \in \mathbb{S}^1, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

задовольняють умову Ліпшиця за змінними ξ, $\operatorname{Re}\zeta$, $\operatorname{Im}\zeta$, w, ψ зі сталою Ліпшиця, яка не залежить від ε.

Як і в попередньому випадку, взявши до уваги знаки власних чисел матриці A_1 у (31) та застосувавши лему 1, з урахуванням зауважень 2, 3 можна показати, що всі додатні півтраєкторії, про які йдеться у твердженні 1, утворюють $(2+m)$-вимірний інваріантний підмноговид $(6+m)$-вимірного фазового простору і при $t \to +\infty$ притягуються до гіперболічного циклу $\mathcal{C}_{\varepsilon,1}$, розташованого поблизу циклу $\mathfrak{C}_{\varepsilon,1}$.

5. Висновки. У цій роботі результати статті [1] доповнено новими фактами щодо поведінки траєкторій швидко-повільної системи, яка демонструє динамічну біфуркацію багаточастотних коливань, тобто перехід від затухаючих коливань до коливань, що є асимптотично близькими до рухів на деякому інваріантному торі. Показано, що досліджувана система в $O(\varepsilon)$-околі $\mathfrak{U}_\varepsilon$ її повільного інваріантного многовиду разом з асимптотично стійким інваріантним тором $\mathcal{T}_\varepsilon$, про який йшлося в [1], має певну кількість гіперболічних інваріантних торів. Стійкі многовиди цих торів мають ковимірності не нижчі за 2 і містять всі ті траєкторії, які починаються в $\mathcal{T}_\varepsilon$ і не притягуються тором $\mathcal{T}_\varepsilon$. Цей факт дає змогу розкласифікувати траєкторії системи в околі повільного многовиду в залежності від того, якому із зазначених торів належать їхні ω-граничні множини. Можна довести, що стійкі многовиди гіперболічних інваріантних торів є ліпшицевими, а отже, асимптотично стійкий тор $\mathcal{T}_\varepsilon$ притягує до себе майже всі (в сенсі міри Лебега) додатні півтраєкторії системи, які починаються в $\mathfrak{U}_\varepsilon$.

Література

1. *Самойленко А. М., Парасюк І. О., Репета Б. В.* Динамічна біфуркація багаточастотних коливань у швидко-повільній системі // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 7. — С. 890–915.
2. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 288 с.
3. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
4. *Harrison G. W.* Persistent sets via Lyapunov functions // Nonlinear Anal. — 1979. — **3**, № 1. — P. 73–80.
5. *Hale J. K.* Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. Math. (2). — 1961. — **73**, № 3. — P. 496–531.
6. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. — 313 p.
7. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975. — 560 с.

Одержано 08.05.15