УДК 539.3 + 532.5

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. А. Троценко, Ю. В. Троценко

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина
e-mail: trots@imath.kiev.ua

We propose an algorithm for calculating frequencies and forms of eigen oscillation of rotation shells partially filled with liquid. Solution of the problem is carried out with an assumption that the free surface of the liquid remains flat and perpendicular to the axis of the shell. The solution is based on a use of the method of decomposing the integration region of the shell theory equations, together with the variation method and an approximate construction of the inverse operator to the hydrodynamic portion of the problem. We construct a generalized functional with respect to displacements of the shell such that the solution coupling conditions make natural boundary-value conditions. We compare the obtained numerical results with existing exact solutions of the problem under consideration accounting for wave motions of the fluid for a shell in the form of a circular cylinder.

Запропоновано алгоритм розрахунку частот та форм власних коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною. Задача розв'язується у припущенні, що при збуреному русі рідини її вільна поверхня залишається плоскою і перпендикулярною до осі оболонки. Розв'язання вихідної задачі базується на застосуванні методу декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок у поєднанні з варіаційним методом і наближеній побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі. Побудовано узагальнений функціонал відносно переміщень оболонки, для якого умови спряження розв'язків у підобластях відносяться до числа природних граничних умов. Наведено порівняння отриманих числових результатів з існуючими точними розв'язками розглядуваної задачі з урахуванням хвильових рухів рідини для оболонки у формі кругового циліндра.

Введение. Сложные механические системы, которые включают в себя тонкостенные оболочки с жидкостью, широко используются в авиастроении, ракетостроении и других отраслях промышленности. Большинство дефектов и разрушений в такого рода объектах возникают вследствие действия на них переменных во времени внешних нагрузок, особенно когда имеет место сближение частот возмущающих сил и собственных колебаний системы. Поэтому определение частот и форм свободных колебаний, как основных характеристик гидроупругих систем, является первым этапом их динамического расчета.

Имеется большое число публикаций, посвященных решению задач о взаимодействии тонкостенных оболочек с жидкостью. Обширная библиография по этому вопросу приведена в книгах [1, 2]. Краевые задачи гидроупругости относятся к числу достаточно сложных задач математической физики, поскольку необходимо совместно интегрировать уравнения в частных производных для потенциала смещений жидкости и системы дифференциальных уравнений для перемещений оболочки. Однако среди публикаций имеются и работы, в которых построены точные решения рассматриваемых задач. Точные решения можно получить только в тех случаях, когда поверхность оболочки совпадает с какой-либо координатной поверхностью одной из систем координат и уравнения теории оболочек допускают построение их явного общего решения. Точные решения некоторых частных задач приведены в работах [1, 3 – 5]. Эти решения имеют очень важное значение, поскольку они могут быть использованы для оценки точности различных приближенных методов, которые позволяют получить необходимые результаты более простым способом при непосредственном интегрировании исходных уравнений. Применительно к оболочкам вращения разработан ряд приближенных аналитических методов решения краевых задач гидроупругости. Построение этих решений основано на применении методов Ритца [1, 6, 7] и Бубнова — Галеркина [8, 9].

При их использовании к расчету колебаний произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, основную трудность представляет выбор координатных функций для перемещений оболочки и жидкости. Заметим, что при реализации метода Бубнова – Галеркина эти трудности могут быть преодолены в рамках его модификации, предложенной в работе [10].

В последнее время, в связи с бурным развитием вычислительной техники, интенсивно развиваются численные методы расчета динамических характеристик упругих оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Так, в работе [11] предложен алгоритм расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек с жидкостью. Исходная задача сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений за счет введения в рассмотрение вспомогательной спектральной задачи с параметром в граничном условии. Сформулированная краевая задача для этой системы уравнений сводится к соответствующим задачам Коши, решения которых находятся методом Кутта – Мерсона с ортогонализацией решений по Граму – Шмидту.

Имеется обширная литература по применению различных вариантов метода конечных элементов в задачах гидроупругости (см., например, [12, 13]). Рассмотренные численные методы универсальны по охвату решаемых задач, однако они требуют тщательной проверки точности полученных результатов.

В настоящей работе развивается применение вариационного метода для построения приближенного решения задач о свободных колебаниях произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкостенную упругую оболочку вращения, которая на глубину H заполнена идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_0. Введем цилиндрическую систему координат $Ozr\beta$, ось Oz которой направлена в сторону свободной поверхности жидкости Σ и совмещена с осью симметрии оболочки. Вектор ускорения $\vec{g}$ поля массовых сил направлен в противоположную сторону от положительного направления оси Oz.

При описании колебаний оболочки с жидкостью будем исходить из линейных уравнений технической теории оболочек и уравнений теории малых гравитационных волн. При этом будем пренебрегать начальными усилиями в срединной поверхности оболочки, возникающими за счет гидростатического давления жидкости. Принятые выше допущения характерны для большинства работ, в которых изучаются взаимосвязанные колебания оболочки с жидкостью [1 – 4].

У оболочки вращения линиями главных кривизн являются ее меридианы и параллели. В качестве ортогональных координат для произвольной точки срединной поверхности оболочки примем длину дуги меридиана s, отсчитываемую от некоторой начальной параллели ($s_1 \leq s \leq s_2$) или от полюса оболочки $s_1 = 0$, и угол β, определяющий положение точки на соответствующей параллели. Проекции перемещения точек срединной поверхности оболочки на направления ее образующей, параллели и внешней нормали обозначим соответственно через u, v и w. Обозначим через ν, E и h коэффициент Пуассона, модуль упругости материала оболочки и ее толщину. После подстановки в уравнения равновесия [14] элемента оболочки под воздействием поверхностной нагрузки $\vec{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ сил и моментов, выраженных через перемещения, и умножения полученных уравнений на коэффициент $(1-\nu^2)/(Eh)$ получим исходную систему уравнений в частных производных относительно перемещений u, v и w:

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= \frac{1-\nu^2}{Eh} Q_1, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= \frac{1-\nu^2}{Eh} Q_2, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= \frac{1-\nu^2}{Eh} Q_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где L_{ij}, $i,j = \overline{1,3}$, — известные дифференциальные операторы линейной теории оболочек [14]. Компоненты произвольной нагрузки Q_1, Q_2 и Q_3 в направлении положительного отсчета координат s, β и внешней нормали к поверхности оболочки в соответствии с принципом Д'Аламбера можно представить в виде

$$Q_1 = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Q_2 = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Q_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta P, \tag{2}$$

где ΔP — динамическое давление со стороны жидкости на оболочку, ρ — плотность материала оболочки. К уравнениям (1) необходимо добавить граничные условия крепления торцов оболочки при $s = s_1$ и $s = s_2$.

Для описания кинематической картины движения жидкости в оболочке введем потенциал смещений $\Phi(z, r, \beta, t)$. Обозначим срединную поверхность оболочки через S, ее смачиваемую поверхность через S_1, оставшуюся часть поверхности оболочки через S_2 ($S = S_1 \cup S_2$), свободную поверхность жидкости через Σ, область, занятую жидкостью и заключенную внутри замкнутой поверхности $S_1 \cup \Sigma$, через D. Из сформулированных выше допущений следует возможность отнесения граничных условий для потенциала смещений Φ к неподвижной срединной поверхности оболочки S_1, а условия на возмущенной свободной поверхности жидкости — к невозмущенной поверхности Σ.

Потенциал смещений частиц жидкости при заданном движении оболочки в ее нормальном направлении $w(p,t) = w(s,\beta,t)$ определяется из решения следующей краевой задачи [2]:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (z, r, \beta) \in D, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{S_1} = w(p,t), \quad \left.\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right|_{\Sigma} = 0, \tag{3}$$

где Δ — оператор Лапласа, g — модуль вектора $\vec{g}$ и n — внешняя нормаль к поверхности S_1. Динамическое условие на поверхности Σ является условием постоянства давления жидкости на ее свободной поверхности. На основании линеаризованного интеграла

Лагранжа – Коши дополнительное динамическое давление со стороны жидкости на оболочку определяется выражением

$$\Delta P = -\rho_0 \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{S_1}. \tag{4}$$

Таким образом, уравнения (1) и (3) вместе с соотношениями (2), (4) и соответствующими начальными условиями однозначно определяют взаимосвязанные колебания упругой оболочки и находящейся в ней идеальной жидкости.

Во многих работах для потенциала смещений Φ вместо точного граничного условия на свободной поверхности используют различные варианты приближенных условий, которые упрощают построение приближенных решений рассматриваемых задач гидроупругости. Например, можно предположить, что в процессе колебаний свободная поверхность жидкости все время остается плоской и перпендикулярной оси Oz [2, 15]. При неосесимметричных колебаниях это означает, что

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\Sigma} = 0. \tag{5}$$

Такое предположение оказывается оправданным, если частоты колебаний оболочки, обусловленные деформацией ее срединной поверхности, значительно выше низших собственных частот гравитационных волн в жесткой оболочке. В дальнейшем основное внимание будет уделено определению частот и форм собственных колебаний оболочек вращения, частично заполненных идеальной и несжимаемой жидкостью. При этом для потенциала смещений Φ на свободной поверхности жидкости будем использовать приближенное граничное условие в виде (5). Полученные динамические характеристики могут быть приняты в качестве парциальных при составлении уравнений движения упругой конструкции в целом под воздействием приложенных к ней внешних сил.

Для собственных колебаний рассматриваемой механической системы с частотой ω компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки u, v, w и потенциала смещений частиц жидкости Φ с учетом условий их периодичности по углу β можно представить в виде

$$u(s,\beta,t) = u(s)\exp^{i\omega t}\cos n\beta, \quad v(s,\beta,t) = v(s)\exp^{i\omega t}\sin n\beta,$$

$$w(s,\beta,t) = w(s)\exp^{i\omega t}\cos n\beta, \quad \Phi(z,r,\beta,t) = \Phi(z,r)\exp^{i\omega t}\cos n\beta, \quad n \geq 1,$$

где n — число волн упругой поверхности оболочки и жидкости в окружном направлении, рассматриваемое в дальнейшем в качестве параметра.

Обозначим через R_0 какой-либо характерный линейный размер оболочки. Введем в рассмотрение следующие безразмерные параметры и величины (обозначенные черточкой сверху):

$$\begin{gathered} \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2\omega^2}{E}, \quad c^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R_0}\right)^2, \quad a = \frac{\rho_0 R_0}{\rho h}, \quad \{u,v,w\} = R_0\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\}, \\ \{T_i,S_i\} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\{\bar{T}_i,\bar{S}_i\}, \quad \{M_i,H\} = \frac{EhR_0}{1-\nu^2}\{\bar{M}_i,\bar{H}\}, \quad \Phi = R_0^2\bar{\Phi}, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{6}$$

Кроме того, отнесем к R_0 также параметры Ламе, кривизны и координаты точек срединной поверхности оболочки. В дальнейшем черточку над безразмерными величинами будем опускать. В формулах (6) T_i и M_i — погонные силы и изгибающие моменты, S и H — сдвигающая сила и крутящий момент, отнесенные к единице длины нормального сечения поверхности оболочки.

Безразмерные усилия и моменты, действующие в срединной поверхности оболочки, связаны с ее деформациями по формулам

$$T_1 = \varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \quad T_2 = \varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1, \quad S = \frac{1-\nu}{2}\gamma_{12},$$

$$M_1 = c^2(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \quad M_2 = c^2(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1), \quad H = (1-\nu)c^2\tau.$$

Формулы, выражающие зависимость деформаций срединной поверхности оболочки и параметров изменения ее кривизны от компонент перемещения в рамках технической теории оболочек имеют вид [14]

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{n}{r}\,v + \frac{r'}{r}\,u + \frac{w}{R_2}, \quad \tau = \frac{n}{r}\,\frac{dw}{ds} - \frac{r'n}{r^2}\,w,$$

$$\gamma_{12} = \frac{n}{r}\,u + \frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r}\,v, \quad \varkappa_1 = -\frac{d^2w}{ds^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{n^2}{r^2}\,w - \frac{r'}{r}\,\frac{dw}{ds}.$$

После отделения угловой координаты β для составляющей потенциала смещений $\Phi(z,r)$ будем иметь следующую краевую задачу Неймана:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\Phi = 0, \quad (z,r)\in Q, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{L_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{L_1} = w, \tag{7}$$

где Q, L_0 и L_1 — меридиональное сечение области D поверхностей Σ и S_1 соответственно.

Введем в рассмотрение оператор G [16], который значениям функции $w(s)$, заданной на линии L_1, ставит в соответствие функцию Φ, определенную в области Q и являющуюся решением краевой задачи (7). Это соответствие запишем в виде

$$\Phi = Gw.$$

Здесь G — интегральный оператор, ядром которого является функция Грина второй краевой задачи для уравнения (7). Если область Q имеет каноническую форму, то эту функцию можно эффективно построить. Будем считать, что вектор-функция $\vec{u} = \{u(s), v(s), w(s)\}$ принадлежит классу H функций, определенных на поверхности $S = S_1 \cup S_2$ и удовлетворяющих граничным условиям закрепления торцов оболочки. Тогда исходную спектральную задачу можно представить в операторном виде

$$\Im(\vec{u}) = L\vec{u} - \lambda^2 M\vec{u} = 0, \quad M = \mathrm{diag}\,\{1, 1, 1 + \delta(p)aG\}, \tag{8}$$

где L — матричный оператор, порожденный дифференциальными уравнениями (1) после отделения в них угловой координаты и перехода к безразмерным величинам;

$$\delta(p) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad p \in S_1, \\ 0 & \text{при} \quad p \in S - S_1. \end{cases}$$

Явный вид элементов оператора L приведен в работе [17]. Можно показать, что оператор L симметричен и положительно определен для любой функции $\vec{u} \neq 0$ из H. В свою очередь оператор M является симметричным и положительным. Из этого следует [18], что задача на собственные значения (8) имеет дискретный спектр, причем все ее собственные значения положительны и имеют единственную предельную точку, расположенную на бесконечности. Решения системы уравнений (8), имеющей восьмой порядок, должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Граничные условия накладываются либо на перемещения оболочки, либо на соответствующие им силы. Так, для абсолютно жесткого закрепления края оболочки при $s = s_1$ эти условия имеют вид

$$\left[u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0\right]_{s=s_1}. \tag{9}$$

При свободном перемещении края оболочки $(s = s_2)$ выполняются следующие силовые граничные условия:

$$[T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0]_{s=s_2}. \tag{10}$$

Здесь $\tilde{Q}_1$ — обобщенная поперечная сила, которая в безразмерных величинах выражается через нормальное перемещение точек оболочки по формулам

$$\tilde{Q}_1 = -c^2 \left[\frac{d}{ds} \triangle w - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r} w\right)\right], \quad \triangle w = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{dw}{ds}\right) - \frac{n^2}{r^2} w. \tag{11}$$

Следует отметить, что формула (11) справедлива для оболочек вращения с постоянной толщиной стенки h.

В других случаях крепления края оболочки используются комбинации условий (9) и (10). Из формул (10) и (11) следует, что в рамках технической теории оболочек нельзя накладывать граничные условия на поперечную силу Q_1, а необходимо вводить в рассмотрение обобщенную поперечную силу $\tilde{Q}_1$. Для оболочек в форме купола при построении приближенных решений следует учитывать асимптотическое поведение искомых функций при $s \to 0$ [19]. В дальнейшем для определенности будем считать, что при $s = s_1$ край оболочки жестко закреплен, а при $s = s_2$ — свободен.

2. Построение обобщенного функционала для решения задачи с использованием метода декомпозиции области. Поскольку оболочка подвержена действию разрывной динамической нагрузки, для эффективного построения приближенного решения системы интегро-дифференциальных уравнений (8) при граничных условиях (9), (10) целесообразно разбить область изменения параметра s на две подобласти. Пусть значение $s = \zeta$ соответствует уровню жидкости, на который заполнена оболочка. Разобьем область $[s_1, s_2]$ точкой $s = \zeta$ на две подобласти: $G^{(1)} = [s_1, \zeta]$ и $G^{(2)} = [\zeta, s_2]$. Область $G^{(1)}$ соответствует смоченной части оболочки, а область $G^{(2)}$ — оставшейся (несмоченной) части. Обозначим решения исходной задачи в подобластях $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ соответственно через $\vec{u}^{(1)}$ и $\vec{u}^{(2)}$. В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся выражениях будет обозначать область, в которой эти функции определены. Функция $\vec{u}^{(1)}(s)$ должна удовлетворять системе уравнений (8) при $\delta(p) = 1$, тогда как функция $\vec{u}^{(2)}(s)$ будет решением тех же уравнений, но при $\delta(p) = 0$. В соответствии с принятыми граничными условиями для торцов оболочки, для функции $\vec{u}^{(1)}(s)$ должны выполняться граничные условия (9), а для функции $\vec{u}^{(2)}(s)$ — условия (10). Кроме того, в сечении $s = \zeta$ должны выполняться определенные граничные условия сопряжения решений $\vec{u}^{(1)}(s)$ и $\vec{u}^{(2)}(s)$. Установим эти граничные условия исходя из вариационной формулировки рассматриваемой задачи.

Эквивалентную вариационную постановку исходной спектральной задачи можно получить исходя из принципа возможных перемещений, согласно которому $\delta\Pi = \delta A$, где $\delta\Pi$ — вариация потенциальной энергии деформации оболочки, δA — работа внешних сил, приложенных к оболочке на ее возможных перемещениях, которые могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}\delta\Pi = \int\limits_{s_1}^{s_2} (T_1\delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + S\delta\gamma_{12} + M_1\delta\varkappa_1 + M_2\delta\varkappa_2 + 2H\delta\tau) r ds,\\ \delta A = \int\limits_{s_1}^{s_2} \vec{Q}\delta\vec{u} r ds = \lambda^2 \int\limits_{s_1}^{s_2} [u\delta u + v\delta v + (w + a\delta(p)Gw)\delta w] r ds.\end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, исходная спектральная задача сведена к отысканию стационарных значений для функционала $I(\vec{u})$,

$$I(\vec{u}) = \int\limits_{s_1}^{s_2} F(\vec{u}) r ds, \tag{13}$$

на классе функций, подчиненных основным граничным условиям (9).

Представим функционал (13) в виде

$$I = \int\limits_{G^{(1)}} F(\vec{u}^{(1)}) dG^{(1)} + \int\limits_{G^{(2)}} F(\vec{u}^{(2)}) dG^{(2)}. \tag{14}$$

Вычислим первую вариацию от функционала (14), не накладывая никаких ограничений на варьируемые функции, кроме граничных условий (9). В дальнейшем будем предполагать, что в каждой из введенных подобластей поле перемещений усилий и моментов имеет свойство непрерывности и дифференцируемости. С учетом интегрирования по частям и принятых обозначений вариацию от функционала (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\delta I = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{G^{(k)}} \Im(\vec{u}^{(k)})\delta(\vec{u}^{(k)}) dG^{(k)} + \left(T_1^{(1)}\delta u^{(1)} + S^{(1)}\delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)}\delta w^{(1)} - M_1^{(1)}\frac{d\delta w^{(1)}}{ds} \right)_{s=\zeta} - \\ - \left(T_1^{(2)}\delta u^{(2)} + S^{(2)}\delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\delta w^{(2)} - M_1^{(2)}\frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=\zeta} + \\ + \left(T_1^{(2)}\delta u^{(2)} + S^{(2)}\delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\delta w^{(2)} - M_1^{(2)}\frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=s^{(2)}}.\end{aligned} \tag{15}$$

Приравнивая выражение (15) к нулю, получаем вариационное уравнение для определения функций $\vec{u}^{(k)}(s)$. Из этого уравнения в силу произвольности варьирования функций $\vec{u}^{(k)}$ в областях $G^{(k)}$ и на границе при $s = s_2$ следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться исходные уравнения и граничные условия свободного опирания края оболочки при $s = s_2$.

Далее, если предположить, что класс допустимых функций при $s = \zeta$ подчинен условиям

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \frac{dw^{(1)}}{ds} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial s}, \tag{16}$$

то из (15) следуют еще и силовые граничные условия при $s = \zeta$:

$$T_1^{(1)} = T_1^{(2)}, \quad S^{(1)} = S^{(2)}, \quad M_1^{(1)} = M_1^{(2)}, \quad \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_1^{(2)}. \tag{17}$$

При этом следует заметить, что условия (17) являются естественными граничными условиями для функционала (14). Таким образом, особенность условий сопряжения решений в теории оболочек состоит в том, что в них нужно требовать непрерывность не только перемещений u, v, w, но и первой производной от w, не только усилий T_1, S и моментов M_1, но и поперечных обобщенных перерезывающих сил $\tilde{Q}_1$.

Итак, при использовании метода Ритца для решения вариационного уравнения $\delta I = 0$ аппроксимации для функций $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условий (16). В этом случае остальные граничные условия задачи, кроме условий (9), будут естественными граничными условиями для функционала (14). Построение решений, заведомо удовлетворяющих условиям (15), является в общем случае достаточно трудной самостоятельной задачей. В связи с этим возникает вопрос о преобразовании функционала (14) в такой обобщенный функционал, для которого все условия сопряжения между подобластями были бы естественными условиями. Теория преобразования вариационных задач создана уже давно [20], но в литературе известны лишь немногие примеры применения ее к задачам механики сплошной среды.

Граничные условия (16) при $s = \zeta$ можно рассматривать как дополнительные ограничения на задачу нахождения стационарного значения функционала $I(\vec{u})$. Исключить их из рассмотрения можно с помощью множителей Лагранжа. В соответствии с этим введем в рассмотрение новый функционал $\Pi_1(\vec{u}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, который имеет вид

$$\Pi_1(\vec{u}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = I(\vec{u}) + \Bigg[\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \\ + \alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial s}\right)\Bigg]_{s=\zeta}, \tag{18}$$

где α_i — множители Лагранжа, подлежащие определению в дальнейшем.

Преобразование функционала (14) в расширенный функционал (18) достигнуто увеличением количества неизвестных исходной задачи, т. е. нужно искать стационарные значения функционала (18) не только по u, v, w, но и по α_1, α_2, α_3, α_4 на классе функций, удовлетворяющих лишь главным граничным условиям (9). Эту задачу можно существенно упростить, если предварительно найти явные выражения для множителей Лагранжа через сами решения $\vec{u}$. С этой целью вычислим первую вариацию функционала (18) при свободном варьировании функций $\vec{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, и постоянных α_i, $i = \overline{1, 4}$. Из этой вариации запишем только внеинтегральные члены при $s = \zeta$. При этом будем иметь

$$\Bigg[\delta\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \delta\alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \delta\alpha_4\left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds}\right) +$$
$$+ (T_1^{(1)} + \alpha_1)\delta u^{(1)} - (T_1^{(2)} + \alpha_1)\delta u^{(2)} + (S^{(1)} + \alpha_2)\delta v^{(1)} - (S^{(2)} + \alpha_2)\delta v^{(2)} +$$
$$+ (\tilde{Q}_1^{(1)} + \alpha_3)\delta w^{(1)} - (\tilde{Q}_1^{(2)} + \alpha_3)\delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)})\frac{d\delta w^{(1)}}{ds} + (M_1^{(2)} - \alpha_4)\frac{d\delta w^{(2)}}{ds}\Bigg]_{s=\zeta}. \tag{19}$$

Если функционал (18) принимает стационарное значение для произвольных вариаций $\delta\vec{u}^{(i)}$, $\dfrac{d\delta w^{(i)}}{ds}$, $i = 1, 2$, и $\delta\alpha_i$, $i = \overline{1, 4}$, то из выражения (19) следует, что в точке $s = \zeta$ будут выполняться кинематические условия сопряжения (16), а также соотношения

$$\alpha_1 = -T_1^{(1)}, \quad \alpha_1 = -T_1^{(2)}, \quad \alpha_2 = -S^{(1)}, \quad \alpha_2 = -S^{(2)},$$
$$\alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(1)}, \quad \alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(2)}, \quad \alpha_4 = M_1^{(1)}, \quad \alpha_4 = M_1^{(2)}.$$

Отсюда следуют равенства правых частей в приведенных формулах, что свидетельствует о выполнении силовых условий сопряжения (17). Кроме того, из этих формул можно найти выражения для множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{1}{2}\left(T_1^{(1)} + T_1^{(2)}\right)\Big|_{s=\zeta}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\left(S^{(1)} + S^{(2)}\right)\Big|_{s=\zeta}, \\ &\alpha_3 = -\frac{1}{2}\left(\tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\right)\Big|_{s=\zeta}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}\left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)}\right)\Big|_{s=\zeta}. \end{aligned} \tag{20}$$

Исключая α_i, $i = \overline{1, 4}$, из функционала (18) с помощью формул (20), можно получить обобщенный функционал Π_2, зависящий только от $\vec{u}$. Краевые условия (10), (16) и (17) будут автоматически выполняться для функций, доставляющих функционалу $\Pi_2(\vec{u})$ стационарное значение. Это является весьма важным моментом в применении вариационного метода к решению спектральной задачи о свободных колебаниях оболочек вращения, поставленной с позиций задач сопряжения решений.

Полученные результаты позволяют перейти теперь к построению приближенного решения рассматриваемой задачи на основе метода Ритца.

3. Применение метода Ритца к решению задачи о собственных колебаниях оболочки вращения при защемленной свободной поверхности жидкости. Представим функции $u^{(k)}(s)$, $v^{(k)}(s)$ и $w^{(k)}(s)$, $k = 1, 2$, в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$u^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{N} a_j^{(k)} U_j^{(k)}(s), \quad v^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{N} b_j^{(k)} V_j^{(k)}(s), \quad w^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(k)} W_j^{(k)}(s). \tag{21}$$

Здесь $a_j^{(k)}$, $b_j^{(k)}$, $c_j^{(k)}$, $k = 1, 2,$ — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем; $\{U_j^{(k)}(s)\}$, $\{V_j^{(k)}(s)\}$, $\{W_j^{(k)}(s)\}$ — системы координатных функций, которые определены соответственно в подобластях $G^{(k)}$. Координатные функции выберем в виде

$$U_j^{(1)} = V_j^{(1)} = (s - s_1)P_j(x), \quad W_j^{(1)} = (s - s_1)^2 P_j(x), \quad x = \frac{2(s-\zeta)}{\zeta - s_1} + 1,$$

$$U_j^{(2)} = V_j^{(2)} = W_j^{(2)} = P_j(y), \quad y = \frac{2s}{s_2 - \zeta} - \frac{s_2 + \zeta}{s_2 - \zeta},$$

где $P_j(z)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра с аргументами, которые преобразуют интервалы $[s_1, \zeta]$ и $[\zeta, s_2]$ в интервал $[-1, 1]$.

Вычисление многочленов Лежандра и их первых двух производных можно проводить с помощью рекуррентных соотношений:

$$P_1(z) = 1, \quad P_2(z) = z, \quad P_{j+2}(z) = \frac{1}{j+1}[(2j+1)zP_{j+1} - jP_j],$$

$$P'_{j+2}(z) = zP'_{j+1} + (j+1)P_{j+1}, \quad P''_{j+2}(z) = zP''_{j+1} + (j+2)P'_{j+1}, \quad j = \overline{1, N-2}.$$

Введенные системы базисных функций являются линейно независимыми и полными системами функций в соответствующих подобластях. Такие координатные функции, в отличие от степенного базиса, обеспечивают высокую устойчивость вычислительного процесса при большом числе членов N в разложениях (21). Системы координатных функций с верхним индексом, равным единице, подчинены граничным условиям (9).

Подставим разложения (21) в функционал $\Pi_2(\vec{u})$. Из необходимых условий стационарности обобщенного функционала получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \lambda^2 B)\vec{X} = 0,$$

где вектор-столбец $\vec{X}$ имеет координаты

$$\vec{X} = \left\{a_1^{(1)}, \ldots, a_N^{(1)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_N^{(1)}, \ldots, c_1^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_N^{(2)}, b_1^{(2)}, \ldots, b_N^{(2)}, c_1^{(2)}, \ldots, c_N^{(2)}\right\}.$$

Представим матрицу A в виде суммы двух матриц

$$A = A^{(1)} + A^{(2)},$$

где элементы матрицы $A^{(1)}$ образованы из необходимых условий экстремума функционала $I(\vec{u})$ (14), а элементы матрицы $A^{(2)}$ обусловлены наличием в обобщенном функционале добавки с установленными множителями Лагранжа.

Определение коэффициентов матрицы $A^{(1)}$ с использованием выражения (12) для вариации потенциальной энергии деформации оболочки приводит к достаточно громоздким вычислениям и формулам для элементов $\alpha_{ij}^{(1)}$ матрицы $A^{(1)}$. Эту задачу можно существенно упростить, если представить вариацию функционала $I(\vec{u})$ в виде

$$\delta I = \int_{s_1}^{s_2} [\Psi_{11}(u,\delta u) + \Psi_{12}(v,\delta u) + \Psi_{13}(w,\delta u) + \Psi_{12}(\delta v,u) + \Psi_{22}(v,\delta v) +$$
$$+ \Psi_{23}(w,\delta v) + \Psi_{13}(\delta w,u) + \Psi_{23}(\delta w,v) + \Psi_{33}(w,\delta w)] r ds -$$
$$- \lambda^2 \int_{s_1}^{s_2} (u\delta u + v\delta v + (w + a\delta(p)G(w))\delta w) r ds. \qquad (22)$$

Введенные здесь операторы $\Psi_{ij}(p,q)$ определяются по формулам

$$\Psi_{11}(p,q) = \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu r'}{r}p\right)\frac{dq}{ds} + \left[\nu\frac{r'}{r}\frac{dp}{ds} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 p + \frac{n^2\nu_1}{r^2}p\right] q,$$

$$\Psi_{12}(p,q) = \frac{nr'}{r^2}(1+\nu_1)pq + \frac{\nu n}{r}p\frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r}\frac{dp}{ds}q,$$

$$\Psi_{13}(p,q) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)p\frac{dq}{ds} + \frac{r'}{r}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right)pq,$$

$$\Psi_{22}(p,q) = \left[\frac{n^2}{r^2} + \nu_1\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]pq + \nu_1\left(\frac{dp}{ds} - \frac{r'}{r}p\right)\frac{dq}{ds} - \nu_1\frac{r'}{r}\frac{dp}{ds}q,$$

$$\Psi_{23}(p,q) = \frac{n}{r}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right)pq,$$

$$\Psi_{33}(p,q) = \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right)pq + c^2\left\{\frac{n^4 + 4\nu_1 n^2 (r')^2}{r^4}pq + \frac{d^2p}{ds^2}\frac{d^2q}{ds^2} +\right.$$
$$+ \left[\frac{\nu r'}{r}\frac{d^2p}{ds^2} + \frac{(r')^2 + 4\nu_1 n^2}{r^2}\frac{dp}{ds} - \frac{n^2 r'}{r^3}(1+4\nu_1)p\right]\frac{dq}{ds} -$$
$$\left. - \left[\frac{\nu n^2}{r^2}\frac{d^2p}{ds^2} + \frac{n^2 r'}{r^3}(1+4\nu_1)\frac{dp}{ds}\right]q + \left[\frac{\nu r'}{r}\frac{dp}{ds} - \frac{\nu n^2}{r^2}p\right]\frac{d^2q}{ds^2}\right\},$$

где $\nu_1 = \dfrac{1-\nu}{2}$, p и q — произвольные, достаточное число раз дифференцируемые произвольные функции, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки, $r = r(s)$ — расстояние от точек меридиана до оси оболочки. Используя выражение

(22), для элементов матрицы $A^{(1)}$ можно получить компактные и удобные для программирования формулы. Так, вычисляя, например, частную производную $\dfrac{\partial I}{\partial a_i^{(1)}}$, в (22) полагаем $\delta u = U_i^{(1)}$, $\delta v = 0$, $\delta w = 0$. При этом получим первые N уравнений относительно вектора $\vec{X}$. Аналогично действуем и при вычислении частных производных от функционала I по другим переменным. Ненулевые элементы верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(1)}$ будут иметь следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\alpha_{ij}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{11}\left(U_j^{(1)}, U_i^{(1)}\right) r ds, \quad \alpha_{i+N,j+N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{22}\left(V_j^{(1)}, V_i^{(1)}\right) r ds, \\
\alpha_{i+2N,j+2N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{33}\left(W_j^{(1)}, W_i^{(1)}\right) r ds, \quad i = \overline{1,N}, \quad j = i, \\
\alpha_{i,j+N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{12}\left(V_j^{(1)}, U_i^{(1)}\right) r ds, \quad \alpha_{i,j+2N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{13}\left(W_j^{(1)}, U_i^{(1)}\right) r ds, \\
\alpha_{i+N,j+2N}^{(1)} = \int\limits_{s_1}^{\zeta} \Psi_{23}\left(W_j^{(1)}, V_i^{(1)}\right) r ds, \quad i,j = \overline{1,N}.
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Формулы для коэффициентов

$$
\alpha_{i+3N,j+3N}^{(1)}, \alpha_{i+3N,j+4N}^{(1)}, \alpha_{i+3N,j+5N}^{(1)}, \alpha_{i+4N,j+4N}^{(1)}, \alpha_{i+4N,j+5N}^{(1)}, \alpha_{i+5N,j+5N}^{(1)}
$$

можно получить из формул (23) после замены в них функций $U_k^{(1)}$, $V_k^{(1)}$, $W_k^{(1)}$ на функции $U_k^{(2)}$,$V_k^{(2)}$, $W_k^{(2)}$ и пределов интегрирования от ζ до s_2. Остальные коэффициенты равны нулю.

Элементы $\alpha_{ij}^{(2)}$ верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(2)}$ можно представить в виде

$$
\alpha_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T\left(U_i^{(1)}, 0, 0\right) U_j^{(1)} + T\left(U_j^{(1)}, 0, 0\right) U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},
$$

$$
\alpha_{i+N,j+N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[S\left(0, V_i^{(1)}\right) V_j^{(1)} + S\left(0, V_j^{(1)}\right) V_i^{(1)}\right]_{s=\zeta}, \quad \alpha_{i+N,j+2N}^{(2)} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{i+2N,j+2N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\Bigg[& Q\left(W_i^{(1)}\right) W_j^{(1)} + Q\left(W_j^{(1)}\right) W_i^{(1)} - \\
& - M\left(W_i^{(1)}\right) \frac{dW_j^{(1)}}{ds} - M\left(W_j^{(1)}\right) \frac{dW_i^{(1)}}{ds}\Bigg]_{s=\zeta}, \quad i = \overline{1,N}, \quad j = i,
\end{aligned}
$$

$$\alpha_{i,j+N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T\left(0, V_j^{(1)}, 0\right)U_i^{(1)} + S\left(U_i^{(1)}, 0\right)V_j^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+2N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T\left(0, 0, W_j^{(1)}\right)U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+3N}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[T\left(U_i^{(1)}, 0, 0\right)U_j^{(2)} - T\left(U_j^{(2)}, 0, 0\right)U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta}, \tag{24}$$

$$\alpha_{i,j+4N}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[S\left(U_i^{(1)}, 0\right)V_j^{(2)} - T\left(0, V_j^{(2)}, 0\right)U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i,j+5N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T\left(0, 0, W_j^{(2)}\right)U_i^{(1)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i+N,j+3N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[S\left(U_j^{(2)}, 0\right)V_i^{(1)} - T\left(0, V_i^{(1)}, 0\right)U_j^{(2)}\right]_{s=\zeta},$$

$$\alpha_{i+N,j+4N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[S\left(0, V_j^{(2)}\right)V_i^{(1)} - S\left(0, V_i^{(1)}\right)V_j^{(2)}\right]_{s=\zeta}, \quad \alpha_{i+N,j+5N} = 0,$$

$$\alpha_{i+2N,j+3N}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[T\left(0, 0, W_i^{(1)}\right)U_j^{(2)}\right]_{s=\zeta}, \quad \alpha_{i+2N,j+4N} = 0,$$

$$\alpha_{i+2N,j+5N}^{(2)} = -\frac{1}{2}\Bigg[Q\left(W_j^{(2)}\right)W_i^{(1)} - Q\left(W_i^{(1)}\right)W_j^{(2)} +$$

$$+ M\left(W_i^{(1)}\right)\frac{dW_j^{(2)}}{ds} - M\left(W_j^{(2)}\right)\frac{dW_i^{(1)}}{ds}\Bigg]_{s=\zeta}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Остальные коэффициенты матрицы $A^{(2)}$ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}
\alpha_{i+3N,j+3N}^{(2)} = -\alpha_{ij}^{(2)}, \quad \alpha_{i+4N,j+4N}^{(2)} = -\alpha_{i+N,j+N}^{(2)}, \\
\alpha_{i+5N,j+5N} = -\alpha_{i+2N,j+2N}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = i, \\
\alpha_{i+3N,j+4N}^{(2)} = -\alpha_{i,j+N}, \quad \alpha_{i+3N,j+5N}^{(2)} = -\alpha_{i,j+2N}, \\
\alpha_{i+4N,j+5N} = 0, \quad i, j = \overline{1, N},
\end{gathered} \tag{25}$$

где в правых частях выражений (25) верхние индексы при функциях следует заменить на 2. Введенные в выражениях (24) и (25) функции T, S, M и Q имеют вид

$$T(p, q, t) = \frac{dp}{ds} + \nu\,\frac{r'}{r}\,p + \nu\frac{n}{r}\,q + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)t, \quad Q(t) = \tilde{Q}_1(t),$$

$$S(p,q) = -\frac{\nu_1 n}{r}p + \nu_1\left(\frac{dq}{ds} - \frac{r'}{r}q\right), \quad \nu_1 = \frac{1-\nu}{2}, \tag{26}$$

$$M(t) = c^2\left[-\frac{d^2t}{ds^2} + \nu\left(\frac{n^2}{r^2}t - \frac{r'}{r}\frac{dt}{ds}\right)\right],$$

при этом если в функциях T и S один из аргументов полагается равным нулю, то подразумевается, что и соответствующие производные тождественно равны нулю.

Элементы b_{ij} симметричной матрицы B вычисляются по формулам

$$b_{ij} = \int_{s_1}^{\zeta} U_i^{(1)}U_j^{(1)}rds, \quad b_{i+N,j+N} = \int_{s_1}^{\zeta} V_i^{(1)}V_j^{(1)}rds,$$

$$b_{i+2N,j+2N} = \int_{s_1}^{\zeta}(W_i^{(1)} + a\delta(p)GW_i^{(1)})W_j^{(1)}rds, \quad b_{i+3N,j+3N} = \int_{\zeta}^{s_2} U_i^{(2)}U_j^{(2)}rds,$$

$$b_{i+4N,j+4N} = \int_{\zeta}^{s_2} V_i^{(2)}V_j^{(2)}rds, \quad b_{i+5N,j+5N} = \int_{\zeta}^{s_2} W_i^{(2)}W_j^{(2)}rds, \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Остальные коэффициенты матрицы B равны нулю.

При вычислении элементов матрицы $b_{i+2N,j+2N}$, $i,j = 1,2,\ldots,N$, необходимо знать функции $\Phi_k(z,r) = GW_k^{(1)}$ на контуре L_1, которые являются решениями следующих исходных задач Неймана:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_k}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r}\Phi_k = 0, \quad (z,r)\in Q,\\ \left.\frac{\partial\Phi_k}{\partial z}\right|_{L_0} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial n} - W_k^{(1)}\right)\right|_{L_1} = 0, \quad k = \overline{1,N}.\end{gathered} \tag{27}$$

В отличие от задачи (7) граничное условие на контуре L_1 содержит уже известные функции $W_k^{(1)}$, которые выбраны в качестве координатных функций для аппроксимации искомого решения $w^{(1)}(s)$ в области $G^{(1)}$.

Решения краевых задач (27) для произвольной оболочки вращения могут быть найдены приближенно с помощью метода Трефтца, если их предварительно свести к эквивалентным вариационным задачам для функционалов:

$$I_k = \int_Q r\left(\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial z^2}\right)^2 + r\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial r}\right)^2 + \frac{n^2}{r}(\Phi_k)^2dzdr - 2\int_{L_1} r\Phi_k W_k^{(1)}ds, \quad k = \overline{1,N}. \tag{28}$$

В качестве координатных функций, минимизирующих функционалы (28), выберем систему частных решений уравнения (27), которая линейно независима и полна на любом замкнутом контуре области Q [21]. В этом случае решения задачи (27) и потенциал смещений жидкости $\Phi(z,r)$ могут быть представлены в виде разложений

$$\Phi_k(z,r) = \sum_{j=1}^{q} d_j^{(k)} \Psi_j(z,r), \quad \Phi(z,r) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{(1)} \Phi_k(z,r). \tag{29}$$

Здесь $d_j^{(k)}$ — произвольные постоянные,

$$\Psi_j(z,r) = \frac{2^n n!(j-n)!}{(j+n)!} R^j P_j^{(n)}(\cos\theta),$$

где $R = \sqrt{z^2+r^2}$, $\cos\theta = z/R$, $P_j^{(n)}(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода. Координатные функции $\Psi_j(z,r)$ и их производные удобно вычислять по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\Psi_{j+1} = \frac{1}{j+2n} \left\{ [2(j+n)-1] z \Psi_j - (j-1)(z^2+r^2)\Psi_{j-1} \right\},$$

$$\frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial z} = j\Psi_j, \quad \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial r} = \frac{(j+n)\Psi_{j+1} - jz\Psi_j}{r}.$$

Приведенные соотношения позволяют построить системы частных решений уравнений (27) и их производных для любого значения параметра n и индекса j, если при этом положить

$$\Psi_1 = r^n, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = nr^{(n-1)}.$$

Постоянные $d_j^{(k)}$ в разложениях (29) найдем из условия, что функции $\Phi_k(z,r)$ должны доставлять минимумы квадратичным функционалам (28). Эти условия приводят к следующим системам линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно компонент вектора-столбца $\vec{d}^{(k)} = \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \ldots, d_q^{(k)}\}$:

$$D\vec{d}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)}, \tag{30}$$

где элементы d_{ij} симметричной матрицы D и элементы $\gamma_i^{(k)}$ векторов-столбцов $\vec{\gamma}^{(k)}$ определяются по формулам

$$\begin{gathered} d_{ij} = \int\limits_{L_0 \cup L_1} r\Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}\, ds, \\ \gamma_i^{(k)} = \int\limits_{L_1} rW_k^{(1)} \Psi_i\, ds, \quad i,j = \overline{1,q}. \end{gathered} \tag{31}$$

При выводе выражений (31) было учтено, что координатные функции $\Psi_i(z,r)$ удовлетворяют исходному уравнению (27). Это позволило свести двойные интегралы по области Q

к одномерным интегралам по ее границе, что существенно упростило алгоритм решения рассматриваемой задачи.

Таким образом, решение краевых задач (27) на основе вариационного метода свелось к решению N неоднородных алгебраических систем (30) с одинаковой матрицей D и N правыми частями. Приведенный выше алгоритм решения рассматриваемой задачи базируется на технической теории оболочек. Однако не представляет особого труда применить аналогичный алгоритм для любого варианта теории оболочек. Так, в случае теории оболочек, предложенной В. В. Новожиловым [22], незначительно поменяются выражения для $Q(t)$, $S(p, q)$ и $M(t)$ в формулах (26). Более существенные изменения получат выражения для операторов $\Psi_{i,j}$ в формулах (22), явный вид которых приведен в работе [23].

4. Некоторые результаты расчетов. Приведем результаты расчетов собственных колебаний конкретной оболочки вращения, частично заполненной идеальной жидкостью, по предложенному выше алгоритму. В литературе известно точное решение рассматриваемой спектральной задачи с учетом волновых движений жидкости для оболочки в форме прямого кругового цилиндра [5]. Построение точного решения этой задачи основано на том, что уравнения для перемещений оболочки $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$ представляют собой систему интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Численные результаты этой работы могут служить основой для оценки точности различных приближенных решений задачи о колебаниях цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью. В связи с этим рассмотрим тонкостенную оболочку вращения в форме кругового цилиндра длиной l. В соответствии с исходными предпосылками при нахождении численных результатов естественно предположить, что днище цилиндрической оболочки является плоским, абсолютно жестким и неподвижным. Как и ранее, будем считать, что при $z = 0$ $(s = z)$ торец оболочки жестко закреплен, а при $z = l$ — свободен.

В качестве характерного линейного размера механической системы выберем радиус оболочки R_0. В соответствии с работой [5] выберем следующие безразмерные параметры оболочки: $l/R_0 = 6,06$, $R_0/h = 150$, $a = 19,2$. Во всех расчетах в дальнейшем полагается, что коэффициент Пуассона $\nu = 0,29$. Значения параметров n и $\varepsilon = H/l$ в процессе расчетов варьировались.

Таблица 1

q	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
4	0,01710	0,05195	0,12240	0,21516	0,28348
6	0,01710	0,05187	0,12044	0,20200	0,26386
8	0,01710	0,05187	0,12044	0,20105	0,25673
10	0,01710	0,05187	0,12044	0,20103	0,25593

В табл. 1 приведены расчетные данные первых пяти собственных значений λ_i при $n = 2, \varepsilon = 0,5$ в зависимости от числа приближений q в разложениях (29) и при $N = 14$ в разложениях (21). В табл. 2 приведены значения первых пяти собственных значений λ_i при $n = 2$, $\varepsilon = 0,5$ в зависимости от числа приближений N в разложениях (21) и при $q = 10$ в разложениях (29).

Таблица 2

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
4	0,01731	0,05274	0,12531	0,23262	0,28929
6	0,01719	0,05215	0,12142	0,20313	0,25816
8	0,01714	0,05196	0,12074	0,20177	0,25682
10	0,01712	0,05190	0,12050	0,20124	0,25629
12	0,01710	0,05186	0,12036	0,20070	0,25577
14	0,01710	0,05187	0,12043	0,20103	0,25593
16	0,01710	0,05187	0,12041	0,20092	0,25586
18	0,01710	0,05187	0,12041	0,20092	0,25586

Данные табл. 1 и 2 свидетельствуют о достаточно хорошей сходимости разложений Трефтца (29) при решении N неоднородных вспомогательных краевых задач Неймана в области, занятой жидкостью, а также разложений Ритца (21) для нахождения перемещений оболочки, находящейся под воздействием разрывной динамической нагрузки со стороны жидкости. Сопоставление приближенных значений первой частоты колебаний оболочки, полученных в данной работе (верхние строки), с соответствующими точными значениями работы [5] (нижние строки) представлено в табл. 3.

Таблица 3

ε	n			
	2	3	4	5
0,125	0,02084 0,02085	0,01907 0,01907	0,03047 0,03047	0,04738 0,04738
0,25	0,02062 0,02072	0,01894 0,01899	0,03022 0,03032	0,04322 0,04506
0,50	0,01710 0,01796	0,01607 0,01663	0,02198 0,02280	0,02818 0,02880
0,75	0,01114 0,01199	0,01102 0,01154	0,01666 0,01702	0,02412 0,02431

Данные табл. 3 свидетельствуют о том, что при принятых параметрах рассматриваемой механической системы максимальное расхождение приближенных и точных значений λ_1 не превышает 7%. Приведенные здесь результаты не исключают существования таких параметров системы, при которых точные и приближенные значения частот будут более существенно различаться, причем отличие будет сказываться при увеличении параметров l/R_0 и R_0/h. Это объясняется сближением парциальных частот, обусловленных упругими колебаниями оболочки с жидкостью при защемленной ее свободной поверхности и волновыми колебаниями жидкости в абсолютно жестком резервуаре. Следовательно, предлагаемое приближенное решение рассматриваемой задачи можно использовать для практических расчетов нижней границы минимальных частот упругих колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью.

Заключение. В работе предложен алгоритм расчета собственных колебаний оболочек вращения с жидкостью в предположении, что свободная поверхность жидкости остается плоской и перпендикулярной к оси оболочки при ее возмущенном движении. Алгоритм основан на применении метода декомпозиции области интегрирования уравнений теории оболочек и на приближенном построении обратного оператора для гидродинамической части задачи. Такой подход к решению рассматриваемой задачи гидроупругости позволяет разделить трудности построения приближенных решений, которые возникают при совместном интегрировании уравнений в частных производных, для потенциала смещений жидкости и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей колебания упругой оболочки под воздействием разрывной динамической нагрузки.

Предложенный алгоритм позволяет с высокой точностью определить первые пять собственных значений и соответствующие им формы колебаний рассматриваемой спектральной задачи. Полученные решения, имеющие аналитическую структуру, могут быть использованы в качестве парциальных при решении задач гидроупругости для оболочек вращения с учетом волновых движений жидкости на ее свободной поверхности.

1. *Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н.* Аэрогидроупругость конструкций. — М.: Физматлит, 2000. — 592 с.
2. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. — М.: Машиностроение, 1971. — 563 с.
3. *Балакирев Ю. Г.* Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 116–123.
4. *Кобычкин В. С., Шмаков В. П., Яблоков В. А.* Осесимметричные колебания полусферической оболочки, частично заполненной жидкостью // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1968. — № 5. — С. 46–54.
5. *Кулешов В. Б., Швейко Ю. Ю.* Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1971. — № 3. — С. 126–136.
6. *Александрович Л. И., Лампер Р. Е.* Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966). — М.: Наука, 1967. — С. 27–29.
7. *Троценко В. А.* О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 6. — С. 166–177.
8. *Шмаков В. П.* Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1964. — № 1. — С. 170–173.
9. *Wen-Hwa Chu, Conzales R.* Supplement to breathing vibrations of a partially filled cylindrical tank linear theory // Trans. ASME E. J. Appl. Mech. — 1964. — **31**, № 4. — P. 722–723.
10. *Шмаков В. П.* Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова–Галеркина к решению краевых задач // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 129–136.
11. *Брусиловский А. Д., Шмаков В. П., Яблоков В. А.* Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1973. — № 3. — С. 99–110.
12. *Григорьев В. Г.* Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Труды III сем. — Томск: Том. ун-т, 1978. — С. 55–60.
13. *Olson L. G., Bathe K. J.* A study of displacement based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems // Nucl. Eng. and Des. — 1983. — **76**. — P. 137–151.
14. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
15. *Рабинович Б. И.* Об уравнениях поперечных колебаний оболочек с жидким заполнением // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1964. — № 1. — С. 166–169.
16. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965. — 439 с.

17. *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 415–432.

18. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Физматгиз, 1970. — 512 с.

19. *Троценко Ю. В.* Структура интегралов уравнений колебаний оболочек вращения в форме купола // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 2. — С. 334–348.

20. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951. — 476 с.

21. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — 228 с.

22. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 431 с.

23. *Троценко Ю. В.* Применение метода Ритца в задаче о собственных колебаниях усеченной конической оболочки // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 1. — С. 364–380.

Получено 01.05.15