УДК 517.9

ЗАМКНЕНІСТЬ ТА НОРМАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОПЕРАТОРА, ПОРОДЖЕНОГО ВИРОДЖЕНИМ ЛІНІЙНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

С. М. Жук

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Академіка Глушкова 2, корпус 6
e-mail: beetle@unicyb.kiev.ua

For a linear operator $\mathcal{D} : \mathbb{W}_2^F \subset \mathbb{L}_2^n \to \mathbb{L}_2^m \times \mathbb{R}^m$, generated by the differential equation $\frac{d}{dt} Fx(t) - C(t)x = f(t)$, $Fx(t_0) = f_0$, we prove that its graph is closed and we calculate the adjoint operator $\mathcal{D}^* : \mathbb{W}_2^{F'} \subset \mathbb{L}_2^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{L}_2^n$. For elements of the linear manifolds $\mathbb{W}_2^F$, $\mathbb{W}_2^{F'}$, we give an analogue of the integration by part formula. We find a criterion for existence of a pseudo-solution of the operator equation $\mathcal{D}x(\cdot) = (f(\cdot), f_0)$, and formulate sufficient conditions for normal solvability of the operator $\mathcal{D}$ in terms of relations between blocks of the matrix $C(t)$. The obtained results are illustrated with examples.

Для линейного оператора $\mathcal{D} : \mathbb{W}_2^F \subset \mathbb{L}_2^n \to \mathbb{L}_2^m \times \mathbb{R}^m$, порожденного дифференциальным уравнением $\frac{d}{dt} Fx(t) - C(t)x = f(t)$, $Fx(t_0) = f_0$, установлена замкнутость графика, вычислен сопряженный оператор $\mathcal{D}^* : \mathbb{W}_2^{F'} \subset \mathbb{L}_2^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{L}_2^n$. Для элементов линейных многовидов $\mathbb{W}_2^F$, $\mathbb{W}_2^{F'}$ предложен аналог формулы интегрирования по частям. Получен критерий существования псевдорешения операторного уравнения $\mathcal{D}x(\cdot) = (f(\cdot), f_0)$, сформулированы достаточные условия нормальной разрешимости оператора $\mathcal{D}$ в терминах соотношений для блоков матрицы $C(t)$. Полученные результаты проиллюстрированы примерами.

Вступ. Під час розв'язання різноманітних задач, що виникають у таких прикладних галузях, як математична економіка, робототехніка, біотехнології, обробка цифрових зображень, теорія керування, теорія електричних кіл, радіофізика, хімічна та біологічна кінетика, дослідники стикаються з системами, стан яких описується диференціальними рівняннями з виродженням

$$F(t)\dot{x}(t) + C(t)x(t) + B(t)f(t) = 0. \tag{1}$$

Системи, записані у вигляді (1), в літературі називають виродженими [1], алгебро-диференціальними [2], сингулярними [3–5], дескрипторними[1] [6–9] або ж неявними [10] чи не розв'язаними відносно похідної [11].

Для автономних систем (1) у випадку регулярності[2] в'язки матриць $\lambda F + C$ плідним виявилось поняття центральної канонічної форми, вперше запроваджене в роботах американських математиків [5]. А саме [7, с. 14], стаціонарна регулярна система невиродженим

[1] У цій роботі будемо використовувати термін „дескрипторне рівняння" або ж „дескрипторна система" для позначення систем типу (2). Відмінності, що виникають, вказані нижче (див. зауваження 1).

[2] В'язку матриць $\lambda F + C$ називають регулярною, якщо $\det(\lambda_0 F + C) \neq 0$ для деякого дійсного λ_0.

лінійним перетворенням зводиться до вигляду

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Kf(t),\ x_2(t) = -Df(t) - \sum_{i=1}^{m-1} N^i D v^{(i)}(t)),\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q^{-1}x(t),$$

для гладкої вектор-функції $f(\cdot)$. Достатні умови звідності (1) до центральної канонічної форми запропоновано українськими математиками [1]. Зауважимо, що теорія сингулярних матричних в'язок застосовувалась ще у [12, с. 348] з метою опису множини розв'язків стаціонарних сингулярних лінійних диференціальних рівнянь.

У випадку змінних коефіцієнтів поняття центральної канонічної форми дає інформацію про структуру загального розв'язку системи лише у частинних випадках, наприклад [2, с. 8] для

$$\mathrm{rank} F(t) = \deg\det(\lambda F(t) + C(t)) = \mathrm{const}, \quad t \in [t_0, T].$$

У роботах російських математиків [2, 3] вивчається проблема існування розв'язків початкових та крайових задач для рівнянь (1) на основі поняття лівого (правого) регуляризуючого оператора [2]

$$\Lambda_{*,r}[F(t)\dot{x}(t) + C(t)x(t) + f(t)] = \dot{x}(t) + \Lambda_{*,r}[C(t)]x(t) + \Lambda_{*,r}[f(t)],$$

де $\Lambda_{*,r} = \sum_{j=0}^{r} L_j(t) \left(\dfrac{d}{dt}\right)^i$. Існування лівого регуляризуючого оператора для автономних систем [2, с. 11] еквівалентно існуванню центральної канонічної форми. У випадку змінних коефіцієнтів умови існування лівого регуляризуючого оператора [2] пов'язані з властивостями „продовжених" систем (1), тобто набору, що складається з рівняння (1) і його повних похідних за часом до деякого порядку.

Увагу деяких дослідників зосереджено на вивченні якісних питань теорії дескрипторних систем з операторними коефіцієнтами у просторах Банаха. У роботі [13] вивчається поведінка дескрипторної системи з запізненням у банаховому просторі на основі аналізу полюсів резольвенти операторної в'язки $R(t, \lambda) = (\lambda F(t) + C(t))^{-1}$.

Що стосується англомовної літератури, то докладну бібліографію з таких питань теорії дескрипторних систем, як проблема існування та єдиності розв'язків, побудова чисельних методів, керованість та спостережуваність, можна знайти в оглядових статтях [6, 8].

Постановка задачі. У більшості з названих вище робіт система (1) вивчається на основі понять центральної канонічної форми або ж регуляризуючих операторів, тобто техніка побудови розв'язку базується на зведенні рівняння (1) до деякого канонічного вигляду, що дозволяє застосовувати методи, розроблені для нормальних звичайних диференціальних рівнянь. При цьому обмежується структура відповідного дескрипторного рівняння.

Альтернативним підходом, що використовується у даній роботі, є вивчення властивостей оператора, породженого лінійним дескрипторним рівнянням

$$\frac{d}{dt}Fx(t) - C(t)x(t) = f(t),$$
$$Fx(t_0) = f_0, \tag{2}$$

без припущень про можливість зведення до деякого канонічного вигляду. Операторні методи дають змогу використовувати загальні властивості широкого класу дескрипторних систем, який включає в себе так звані „непричинні"[3] системи (див. [6, 10]).

Нехай у рівнянні (2) F — $(m \times n)$-матриця, $t \mapsto C(t)$ — неперервна $(m \times n)$-матричнозначна функція, $f(\cdot) \in \mathbb{L}_2([t_0, T], \mathbb{R}^m) := \mathbb{L}_2^m$, $-\infty < t_0 < T < +\infty$, $f_0 \in \mathbb{R}^m$. Відомо, що для випадку $F = E$ розв'язком (2) вважають вектор-функцію $x(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$, яка задовольняє інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$x(t) = f_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (C(s)x(s) + f(s))ds.$$

Рівняння такого типу має єдиний розв'язок $x(\cdot)$ у класі абсолютно неперервних вектор-функцій, причому $x(\cdot)$ майже скрізь задовольняє (2).

З'ясуємо, що ми будемо розуміти під розв'язком (2) у випадку довільної сталої прямокутної матриці $F = \{F_{ij}\}_{1,1}^{m,n}$. Введемо множину

$$\mathbb{W}_2^F := \{x(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n : Fx(\cdot) \in \mathbb{W}_2^m\},$$

де символом $\mathbb{W}_2^m$ позначено сукупність усіх абсолютно неперервних вектор-функцій з $\mathbb{L}_2^m$, похідна кожної з яких лежить в $\mathbb{L}_2^m$, Fx — m-вектор-функція, i-та компонента якої є лінійною комбінацією компонент $x(\cdot)$ з коефіцієнтами $\{F_{ij}\}_{j=1}^n$. Лінійна множина $\mathbb{W}_2^F$ є скрізь щільною в $\mathbb{L}_2^n$, бо $\mathbb{W}_2^n \subset \mathbb{W}_2^F$. По аналогії введемо множину

$$\mathbb{W}_2^{F'} := \{z(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m : F'z(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n\}.$$

Визначимо лінійний оператор $\mathcal{D}$ співвідношеннями

$$\mathcal{D}x(\cdot) = \left(\frac{d}{dt}Fx(\cdot) - Cx(\cdot), Fx(t_0)\right), \qquad x(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}) := \mathbb{W}_2^F,$$

де $\frac{d}{dt}Fx(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m$ — похідна вектор-функції $Fx(\cdot)$, $Cx(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m$ — вектор-функція $t \mapsto C(t)x(t)$, $Fx(t_0)$ — значення[4] $t \mapsto Fx(t)$ при $t = t_0$. Зауважимо, що для $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$ рівності $\frac{d}{dt}Fx(t) = F\dot{x}(t)$ може і не бути.

Під розв'язком (2) у випадку довільної сталої прямокутної матриці F будемо розуміти елемент множини $\mathbb{W}_2^F$, що задовольняє операторне рівняння

$$\mathcal{D}x(\cdot) = (f(\cdot), f_0).$$

Оператор $\mathcal{D}$ означено подібно до того, як це було зроблено в роботах С. Г. Крейна [14] у випадку крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку. Як випливає

[3] У англомовній літературі для позначення класу таких систем використовують термін „noncausal" systems.

[4] Символ $Fx(t)$ має зміст для довільного $t \in [t_0, T]$, оскільки внаслідок включення $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$ вектор-функція $t \mapsto Fx(t)$ є абсолютно неперервною, чого в загальному випадку не можна стверджувати про $x(\cdot)$.

з структури введеного операторного рівняння, вектор-функція $x(\cdot)$ із простору $\mathbb{L}_2^n$ належить множині розв'язків (2) при фіксованих початковій умові f_0 та правій частині $f(\cdot)$, якщо вектор-функція $Fx(\cdot)$ є абсолютно неперервною, має похідну класу $\mathbb{L}_2^m$, яка майже скрізь задовольняє першу рівність у (2), і виконано другу рівність (2). Раніше дескрипторні рівняння, записані у вигляді (2), розглядались у [9, 11].

Метою цієї роботи є дослідження таких властивостей оператора $\mathcal{D}$, як замкненість та нормальна розв'язність. У термінах дескрипторних систем будемо вивчати проблему узагальненої розв'язності (2), умови неперервної (в метриці відповідного гільбертового простору) залежності псевдорозв'язку від правої частини та початкової умови, наближення розв'язків елементами регуляризуючої послідовності.

Замкненість оператора $\mathcal{D}$. **Вигляд спряженого** $\mathcal{D}^*$. Введений оператор $\mathcal{D}$, взагалі кажучи, не є фредгольмовим (приклад 3) і навіть нормально розв'язним (приклад 2) на відміну від оператора звичайного диференціювання в $\mathbb{L}_2^n$, але щільна визначеність і замкненість (теорема 1) у загальному випадку зберігаються.

Теорема 1. *Для* $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$, $z(\cdot) \in \mathbb{W}_2^{F'}$ *має місце аналог формули інтегрування частинами*

$$\int_{t_0}^{T} \left(\left(\frac{d}{dt}\, Fx(t), z(t) \right) + \left(\frac{d}{dt}\, F'z(t), x(t) \right) \right) dt =$$
$$= (Fx(T), F'^{+}F'z(T)) - (Fx(t_0), F'^{+}F'z(t_0)). \tag{3}$$

Оператор $\mathcal{D}$ *є замкненим, його спряжений* $\mathcal{D}^*$ *визначається співвідношеннями*

$$\mathcal{D}^*(z(\cdot), z_0) = L(z(\cdot), z_0) := -\frac{d}{dt}\, F'z(\cdot) - C'z(\cdot),$$

$$\mathscr{D}(\mathcal{D}^*) = \mathscr{D}(L) := \{(z(\cdot), F'^{+}F'z(t_0) + d) : z(\cdot) \in \mathbb{W}_2^{F'}, F'z(T) = 0, F'd = 0\}.$$

Доведення. Виберемо $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$, $z(\cdot) \in \mathbb{W}_2^{F'}$ і застосуємо формулу інтегрування частинами до абсолютно неперервних вектор-функцій $F^+ \, Fx(\cdot)$, $F'z(\cdot)$. Одержимо

$$\int_{t_0}^{T} \left(\left(\frac{d}{dt} F^+ Fx(t), F'z(t) \right) + \left(F^+ Fx(t), \frac{d}{dt} F'z(t) \right) \right) dt =$$
$$= \left(F^+ Fx(T), F'z(T) \right) - \left(F^+ Fx(t_0), F'z(t_0) \right).$$

Згідно з теоремою Мура – Пенроуза $FF^+F = F$, тому майже скрізь

$$F \frac{d}{dt} F^+ Fx(t) = \frac{d}{dt}\, FF^+ Fx(t) = \frac{d}{dt}\, Fx(t),$$

звідки

$$\int_{t_0}^{T} \left(\frac{d}{dt}\, F^+ Fx(t), F'z(t) \right) dt = \int_{t_0}^{T} \left(F \,\frac{d}{dt}\, F^+ Fx(t), z(t) \right) dt = \int_{t_0}^{T} \left(\frac{d}{dt}\, Fx(t), z(t) \right) dt$$

для кожної абсолютно неперервної, а тому і для довільної $z \in \mathbb{L}_2^m$.

Подальше доведення проведемо для випадку[5] $C(t) \equiv 0$. Покажемо замкненість $\mathcal{D}$. Для цього зауважимо, що оператор $x(\cdot) \mapsto \frac{d}{dt} Fx(\cdot)$, $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$, є замкненим. Справді[6], якщо $x_n(\cdot) \to x$, $\frac{d}{dt} Fx_n(\cdot) \to z(\cdot)$, то $Fx_n(\cdot)$ є абсолютно неперервною і $Fx_n(\cdot) \to Fx(\cdot)$, звідки внаслідок замкненості оператора диференціювання в $\mathbb{L}_2^m$ одержимо, що $Fx(\cdot)$ є абсолютно неперервною і $\frac{d}{dt}Fx(\cdot) = z(\cdot)$.

Нехай $\mathcal{B}x_n(\cdot) \to (z(\cdot), z_0)$ і $x_n(\cdot) \to x(\cdot)$. Тоді $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$, $\frac{d}{dt} Fx(\cdot) = z(\cdot)$ за доведеним і залишилось показати, що $z_0 = Fx(t_0)$. Справді, $Fx_n(t_0) \to z_0$ за припущенням, а з іншого боку[7] $(J := (c - t_0)^{-\frac{1}{2}})$,

$$\|Fx(t_0) - Fx_n(t_0)\| \le J\|Fx_n(\cdot) - Fx(\cdot)\|_2 + \sup_{t\in[t_0,c]} \left\| \int_{t_0}^{t} \left(\frac{d}{dt} Fx(s) - \frac{d}{dt} Fx_n(s) \right) ds \right\| \to 0.$$

Ми показали замкненість щільно визначеного оператора $\mathcal{D}$, що доводить [15, с. 40] існування $\mathcal{D}^*$. Покажемо справедливість решти тверджень.

Нехай $(z(\cdot), z_0) \in \mathscr{D}(L)$, $x(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$. Тоді

$$\langle \mathcal{D}x(\cdot), (z(\cdot), z_0)\rangle_1 = \int_{t_0}^{T} \left(\frac{d}{dt} Fx(t), z(t) \right) dt + \big(Fx(t_0), F'^{+}F'z(t_0)\big) =$$

$$= (Fx(T), F'^{+}F'z(T)) - \int_{t_0}^{T} \left(\frac{d}{dt} F'z(t), x(t) \right) dt = \langle L(z(\cdot), z_0), x(\cdot)\rangle_2$$

згідно з (3), відтак $L \subset \mathcal{D}^*$ і залишилось довести, що $\mathscr{D}(\mathcal{D}^*) \subset \mathscr{D}(L)$. Справді, нехай $v(\cdot) = \mathcal{D}^*(z(\cdot), z_0)$ для деякого $(z(\cdot), z_0) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}^*)$. Тоді $v(\cdot) \perp \mathcal{N}(\mathcal{D})$, і оскільки

$$F(E - F^+F) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} F(E - F^+F)x(\cdot), F(E - F^+F)x(t_0) \right) = (0, 0) \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n,$$

то майже скрізь $v(\cdot) = F^+Fv(\cdot)$. Але тоді

$$\int_{t_0}^{T} \left(\frac{d}{dt} Fx(t), z(t) \right) dt = \int_{t_0}^{T} \big(F'^{+}v(t), Fx(t)\big)\, dt = \int_{t_0}^{T} \left(\int_{t}^{T} F'^{+}v(s)ds, \frac{d}{dt} Fx(t) \right) dt$$

[5] Узагальнення здійснюється за допомогою стандартних міркувань про замкненість суми замкненого та обмеженого операторів, а також про спряжений до суми цих операторів.

[6] Збіжність розуміється в сенсі норми $\|\cdot\|_2 := \langle \cdot, \cdot \rangle_2^{\frac{1}{2}}$ простору $\mathbb{L}_2^n$.

[7] $\|\cdot\|$ — норма у просторі $\mathbb{R}^n$.

для всіх $x(\cdot) \in M := \{x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F : Fx(t_0) = 0\}$ і тому

$$z(\cdot) - \int_t^T F'^+ v(s)ds \perp \mathcal{R}(L_0),$$

де символом L_0 позначено оператор $x(\cdot) \mapsto \dfrac{d}{dt} Fx(\cdot), x(\cdot) \in M$. Якщо

$$g(t) = \int_{t_0}^t FF^+ \varphi(s)ds, \quad \varphi(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m,$$

то $L_0 g(\cdot) = FF^+\varphi(\cdot)$, і тому $FF^+\varphi(\cdot) \in \mathcal{R}(L_0)$ для довільного $\varphi(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m$, звідки

$$\int_{t_0}^T \left(z(t) - \int_t^T F'^+ v(s)ds, FF^+\varphi(t) \right) dt = 0 \quad \forall \varphi(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m,$$

але тоді

$$F' \left(z(t) - \int_t^T F'^+ v(s)ds \right) = F'(E - F'^+F') \left(z(t) - \int_t^T F'^+ v(s)ds \right) = 0,$$

тобто $z(\cdot) \in \mathbb{W}_2^{F'}$, $F'z(T) = 0$. Таким чином, для довільного $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$

$$\int_{t_0}^T \left(\left(\frac{d}{dt} Fx(t), z(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} F'z(t), x(t) \right) \right) dt = -(Fx(t_0), F'^+F'z(t_0))$$

згідно з формулою (3). З іншого боку,

$$\int_{t_0}^T \left(\frac{d}{dt} Fx(t), z(t) \right) dt + (Fx(t_0), z_0) = \int_{t_0}^T (\mathcal{D}^*(z(\cdot), z_0)(t), x(t))dt$$

і, отже,

$$(Fx(t_0), z_0 - F'^+F'z(t_0)) = \int_{t_0}^T \left(\mathcal{D}^*(z(\cdot), z_0)(t) + \frac{d}{dt} Fx(t), x(t) \right) dt$$

для всіх $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$ і, зокрема, для $x(\cdot) \in M$ (див. вище означення M). З того, що $\mathrm{cl}\, M = \mathbb{L}_2^n$, виводимо

$$(Fx(t_0), z_0 - F'^+F'z(t_0)) = 0$$

для всіх $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$. Тепер зрозуміло, що $z_0 = F'^+F'z(t_0) + d, F'd = 0$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Взагалі кажучи (див. приклад 1), оператор $x(\cdot) \mapsto F\dfrac{d}{dt}x(\cdot)$, $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n$, не буде замкненим. Це, зокрема, означає, що $-F'\dfrac{d}{dt} \subset \left(\dfrac{d}{dt}F\right)^*$. З іншого боку, простір $\mathbb{W}_2^n$ не завжди є гільбертовим відносно норми графіка $\dfrac{d}{dt}F$. Дійсно, якщо $\mathbb{W}_2^n$ гільбертовий, то [15, с. 26] звуження $\dfrac{d}{dt}F$ на $\mathbb{W}_2^n$ є замкненим оператором. Але

$$\frac{d}{dt}Fx(\cdot) = F\frac{d}{dt}x(\cdot) \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n,$$

тобто $F\dfrac{d}{dt}$ є звуженням $\dfrac{d}{dt}F$ на $\mathbb{W}_2^n$.

Приклад 1. Припустимо, що $t_0 = 0$, $T = 1$, $n = 2$ і нехай $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Розглянемо оператор $F\dfrac{d}{dt}$, визначений на $\mathbb{W}_2^n$. Функція Кантора $t \mapsto k(t)$ неперервна і майже скрізь диференційовна на $[0, 1]$, але не є абсолютно неперервною, відтак $(0, k(\cdot)) \notin \mathbb{W}_2^n$. З іншого боку, згідно з теоремою Бернштейна функцію $k(\cdot)$ можна рівномірно по t наблизити поліномами

$$B_n(t) := \sum_0^n k\left(\frac{i}{n}\right)\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i}.$$

При кожному n поліном $B_n(\cdot)$ є абсолютно неперервною функцією, відтак $x_n(\cdot) := \begin{pmatrix} 0 \\ B_n(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{W}_2^n$. З іншого боку, $F\dfrac{d}{dt}x_n(\cdot) = (0, 0)$ для довільного n і x_n збігається в $\mathbb{L}_2^n$ до $x(\cdot) := (0, k(\cdot))$, звідки

$$x_n(\cdot) \to x(\cdot), \quad F\frac{d}{dt}x_n(\cdot) \to (0, 0)$$

одночасно. Якщо оператор $F\dfrac{d}{dt}$ замкнений, то $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n$ внаслідок замкненості [15, с. 17] графіка $F\dfrac{d}{dt}$, але це включення не має місця через вибір $x(\cdot)$, тому *оператор* $F\dfrac{d}{dt}$ *не є замкненим.*

З іншого боку, $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F$, тому для оператора $\dfrac{d}{dt}F$, визначеного на $\mathbb{W}_2^F$, дістанемо

$$x_n(\cdot) \to x(\cdot), \quad \frac{d}{dt}Fx_n(\cdot) \to (0, 0) \Rightarrow x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^F, \quad \frac{d}{dt}Fx(\cdot) = (0, 0).$$

Умови нормальної розв'язності оператора $\mathcal{D}$. Для різноманітних застосувань лінійних диференціальних рівнянь надзвичайно важливою є властивість нормальної розв'язності оператора системи, наявність якої дає змогу говорити про неперервну залежність найменшого за нормою розв'язку від правої частини. Замкненість та щільна визначеність оператора $\mathcal{D}$ дозволяють застосувати методи теорії некоректних задач [16, 17] під час вивчення питання про нормальну розв'язність $\mathcal{D}$ (теореми 2, 3).

У наступній теоремі запропоновано критерій існування псевдорозв'язку[8] рівняння (2) для заданих $(f(\cdot), f_0)$.

Теорема 2. *Крайова задача*

$$\frac{d}{dt} Fx(t) = C(t)x(t) + z(t) + f(t),$$

$$\frac{d}{dt}F'z(t) = -C'(t)z(t) + \varepsilon^2 x(t), \tag{4}$$

$$F'z(T) = 0, \quad Fx(t_0) - F'^{+}F'z(t_0) - d = f_0, \quad F'd = 0,$$

має єдиний розв'язок $(x(\cdot,\varepsilon), z(\cdot,\varepsilon), d(\varepsilon))$ *при кожному* $\varepsilon > 0$.

Для довільних $(f(\cdot), f_0) \in \mathbb{L}_2^m \times \mathbb{R}^m$ *дескрипторне рівняння*

$$\frac{d}{dt} Fx(t) = C(t)x(t) + f(t), \quad Fx(t_0) = f_0, \tag{5}$$

має псевдорозв'язок $\widehat{x}(\cdot)$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\|x(\cdot,\varepsilon)\|_2 \le C \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Зафіксуємо $g(\cdot) := (f(\cdot), f_0) \in \mathbb{L}_2^m \times \mathbb{R}^m$ і покажемо, що (4) має єдиний розв'язок. Виберемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо оператор $\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}$. Задача проектування

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}Dp(\cdot) - g(\cdot)\right\|_1^2 + \|p(\cdot)\|_2^2 \to \min_{p(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})} \tag{6}$$

вектора $(0, g(\cdot))$ на графік оператора $\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}$ має єдиний розв'язок $\hat{p}(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ внаслідок замкненості $\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}$, тому що добуток обмеженого оператора множення на скаляр і замкненого оператора є замкненим оператором. Оскільки[9]

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{D}p(\cdot) - g(\cdot)\right\|_1^2 + \|p(\cdot)\|_2^2 = \|\mathcal{D}x(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2 + \varepsilon^2\|x(\cdot)\|_2^2$$

для $p(\cdot) = \varepsilon x(\cdot)$, то на підставі викладеного задача оптимізації

$$\|\mathcal{D}x(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2 + \varepsilon^2\|x(\cdot)\|_2^2 \to \min_{x(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})}$$

[8] Тут під псевдорозв'язком розуміємо вектор $\hat{x}(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ з найменшою нормою, для якого $\langle\mathcal{D}\hat{x}(\cdot) - (f(\cdot), f_0), \mathcal{D}x(\cdot)\rangle = 0\ \forall x(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$.

[9] Символом $\|\cdot\|_1$ позначено норму гільбертового простору $\mathbb{L}_2^m \times \mathbb{R}^m$.

має єдиний розв'язок $\hat{x}_\varepsilon(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, що задовольняє систему операторних рівнянь

$$\mathcal{D}x(\cdot) - z(\cdot) = g(\cdot),$$

$$-\mathcal{D}^* z(\cdot) - \varepsilon^2 x(\cdot) = 0.$$

Остання, як легко переконатись, еквівалентна (4).

Для функції

$$\mathscr{L}(\varepsilon) := \min_{x(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})} \|\mathcal{D}x(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2 + \varepsilon^2\|x(\cdot)\|_2^2 = \|\mathcal{D}\hat{x}_\varepsilon(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2 + \varepsilon^2\|\hat{x}_\varepsilon(\cdot)\|_2^2$$

виконано [16, с. 119] (лема 1.25)

$$\mathscr{L}(0+) = \mathscr{L}(0) = \min_{x(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})} \|\mathcal{D}x(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2,$$

отже,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathcal{D}\hat{x}_\varepsilon(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2 = \min_{x(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})} \|\mathcal{D}x(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2. \tag{7}$$

Відомо [17, с. 124] (теорема 18.5), що збіжність послідовності $\{\hat{x}_\varepsilon(\cdot)\}$ при $\varepsilon \to 0$ еквівалентна існуванню такого $\hat{x}(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, що

$$\|\mathcal{D}\hat{x}(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2 = \min_{x(\cdot)} \|\mathcal{D}x(\cdot) - g(\cdot)\|_1^2.$$

Нехай $f(\cdot) \in \operatorname{cl}\mathcal{R}(\mathcal{D})$. Тоді $\mathcal{D}\hat{x}_\varepsilon(\cdot) \to f(\cdot)$ і множина $\{\mathcal{D}\hat{x}_\varepsilon(\cdot)\}$ є обмеженою. Якщо водночас $\{\hat{x}_\varepsilon(\cdot)\}$ теж є обмеженою, то внаслідок слабкої замкненості $\mathcal{D}$ дістанемо $f(\cdot) \in \mathcal{R}(\mathcal{D})$. Інакше, для $f(\cdot) \notin \mathcal{R}(\mathcal{D})$ норми функцій $\{\hat{x}_\varepsilon(\cdot)\}$ необмежено зростають при $\varepsilon \to 0$ на підставі (7).

У зв'язку з доведеною теоремою корисною може виявитись така лема.

Лема 1. *Для прямокутної $(m \times n)$-матриці F знайдуться квадратні матриці L, R такі, що*

$$F = L\Lambda R,\ \ F^+ = R'\Lambda^+ L',\ \ LL' = E_m,\ \ RR' = E_n,\quad \Lambda = \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де E_m – одинична матриця порядку m, $0_{k,s}$ — нульова $(k \times s)$-матриця, D — діагональна матриця порядку r, утворена додатними власними числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ матриці FF'.

Доведення. Спираючись на теорему про сингулярний розклад прямокутної матриці F (див. [18, с. 52]), запишемо $F = PD^{\frac{1}{2}}Q$, де P — $(m \times r)$-, Q — $(r \times n)$-прямокутні матриці, $P'P = QQ' = E_r$.

Розіб'ємо на блоки матрицю $P = \begin{pmatrix} P_{r,r} \\ P_{m-r,r} \end{pmatrix}$. Стовпчики матриці P є ортонормованими, бо $P'P = E_r$, відтак, використавши процедуру ортогоналізації Грама – Шмідта, можемо доповнити їх $m-r$ векторами w_k до ортонормованого базису відповідного евклідового простору. Матрицю T, стовпчиками якої є $m-r$ векторів w_k, подамо у вигляді $T = \begin{pmatrix} T_{r,m-r} \\ T_{m-r,m-r} \end{pmatrix}$. Тоді $T'P = 0, T'T = E_{m-r}$ за побудовою. Покладемо $L := \begin{pmatrix} P_{r,r} & T_{r,m-r} \\ P_{m-r,r} & T_{m-r,m-r} \end{pmatrix}$. Тоді $L'L = E_m \Rightarrow LL' = E_m$, бо $P'P = E_r, T'P = 0, T'T = E_{m-r}$. По аналогії означимо $R := \begin{pmatrix} Q_{r,r} & Q_{r,n-r} \\ W_{n-r,r} & W_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$, де $Q = \begin{pmatrix} Q_{r,r} & Q_{r,n-r} \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} W_{n-r,r} & W_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ — матриця, рядками якої є $n-r$ векторів v_k, які доповнюють ортонормовані вектори-рядки матриці Q до ортонормованого базису відповідного евклідового простору. Отже, $RR' = E_n$. Безпосередньо перевіряється, що $R\Lambda L = PD^{\frac{1}{2}}Q$.

Покажемо, що $F^+ = R'\Lambda^+L'$. Обчислимо $(L\Lambda R)^+$. Відомо [18, с. 69], що $(AB)^+ = B^+A^+$ лише тоді, коли $\mathcal{R}(BB'A') \subseteq \mathcal{R}(A')$ і водночас $\mathcal{R}(A'AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$ для прямокутних матриць A, B. За доведеним $L'L = E_m$, тому $\mathcal{R}(\Lambda RR'\Lambda L') \subset \mathcal{R}(L')$, $\mathcal{R}(L'L\Lambda R) = \mathcal{R}(\Lambda R)$, відтак $(L\Lambda R)^+ = (\Lambda R)^+L'$, бо $L^+ = L^{-1} = L'$. Оскільки $RR' = E_n$, то $(\Lambda R)^+ = R'\Lambda^+$, бо $\mathcal{R}(RR'\Lambda') = \mathcal{R}(\Lambda')$ і $\mathcal{R}(\Lambda'\Lambda R) \subset \mathcal{R}(R)$.

Лему доведено.

У наступній теоремі з-поміж сингулярних систем (2) виділено клас рівнянь спеціальної структури, що породжують нормально розв'язний оператор.

Теорема 3. *Нехай* $L'C(t)R' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, *де* L, R *означено, як у лемі 1,* C_i *— прямокутні стаціонарні матриці узгодженої розмірності. Якщо*[10]

$$\sup_{1>\varepsilon>-1} \|Q(\varepsilon)C_2'\|_{\mathrm{mod}} < +\infty, \quad Q(\varepsilon) := (\varepsilon^2 E + C_4'C_4)^{-1},$$

то оператор $\mathcal{D}$ *має замкнену множину значень.*

Доведення. Покажемо, що в умовах теореми норми розв'язків крайової задачі (4) залишаються обмеженими при $\varepsilon \to 0$. З цією метою запишемо (4) у вигляді

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t) & E \\ \varepsilon^2 & -C'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись (лема 1) рівністю

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R' & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix},$$

одержимо еквівалентне рівняння

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L'C(t)R' & E \\ \varepsilon^2 & -RC'(t)L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

де покладено $p(t) := Rx(t), q(t) := L'z(t), g(t) := L'f(t)$.

[10] Для матриці F покладемо $\|F\|_{\mathrm{mod}} := \sum_{i,j} |F_{ij}|$.

Умови $F'z(T) = 0, Fx(t_0) = F'^{+}F'z(t_0) + d + f_0, F'd = 0$ набудуть вигляду

$$\Lambda'q(T) = 0, \quad \Lambda p(t_0) = \Lambda'^{+}\Lambda'q(t_0) + L'd + L'f_0, \quad \Lambda'L'd = 0.$$

Якщо тепер врахувати вигляд Λ, то дістанемо систему алгебро-диференціальних співвідношень

$$\begin{gathered} D^{\frac{1}{2}}\dot p_1(t) = C_1p_1(t) + C_2(t)p_2(t) + g_1(t) + D^{-\frac{1}{2}}v_1(t), \\ 0 = C_3p_1(t) + C_4p_2(t) + g_2(t) + q_2(t), \\ \dot v_1(t) = \varepsilon^2 p_1(t) - C_1'D^{-\frac{1}{2}}v_1(t) - C_3'q_2(t), \\ 0 = \varepsilon^2 p_2(t) - C_2'D^{-\frac{1}{2}}v_1(t) - C_4'q_2(t), \\ p_1(t_0) - D^{-1}v_1(t_0) = D^{-\frac{1}{2}}g_1^0, \quad d_2 = g_2^0, \quad v_1(T) = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

де

$$v_1(t) := D^{\frac{1}{2}}q_1(t), \quad p(t) := \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}, \quad q(t) := \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix},$$

$$g_0 := L'f_0 = \begin{pmatrix} g_1^0 \\ g_2^0 \end{pmatrix}, \quad L'd = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Запишемо алгебраїчні рівняння окремо

$$\begin{pmatrix} C_4 & E \\ \varepsilon^2 E & -C_4' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_3p_1(t) - g_2(t) \\ C_2'D^{-\frac{1}{2}}v_1(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

і помножимо (10) зліва на $\begin{pmatrix} Q(\varepsilon)C_4' & Q(\varepsilon) \\ E - C_4Q(\varepsilon)C_4' & -C_4Q(\varepsilon) \end{pmatrix}$. Одержимо

$$\begin{aligned} p_2(t) &= Q(\varepsilon)(-C_4'C_3p_1(t) + C_2'D^{-\frac{1}{2}}v_1(t) - C_4'g_2(t)), \\ q_2(t) &= (E - C_4Q(\varepsilon)C_4')(-C_3p_1(t) - g_2(t)) - C_4Q(\varepsilon)C_2'D^{-\frac{1}{2}}v_1(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Підставивши знайдені вирази в (9), дістанемо двоточкову крайову задачу для невід'ємно означеної гамільтонової системи з параметром

$$\begin{gathered} \dot p_1(t) = A(\varepsilon)p_1(t) + R(\varepsilon)v_1(t) + g(t,\varepsilon), \quad p_1(t_0) - D^{-1}v_1(t_0) = g_0, \\ \dot v_1(t) = -A'(\varepsilon)v_1(t) + S(\varepsilon)p_1(t) + \ell(t,\varepsilon), \quad v_1(T) = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

де

$$g_0 := D^{-\frac{1}{2}}g_1^0, \quad \ell(t,\varepsilon) = C_3'(E - C_4Q(\varepsilon)C_4')g_2(t),$$

$$A(\varepsilon) = D^{-\frac{1}{2}}(C_1 - C_2Q(\varepsilon)C_4'C_3), \quad R(\varepsilon) = D^{-1} + D^{-\frac{1}{2}}C_2Q(\varepsilon)C_2'D^{-\frac{1}{2}},$$

$$S(\varepsilon) = \varepsilon^2 E + C_3'(E - C_4Q(\varepsilon)C_4')C_3, \quad g(t,\varepsilon) = D^{-\frac{1}{2}}(g_1(t) - C_2Q(\varepsilon)C_4'g_2(t)).$$

Використавши теорему [19] про „нижній" та „верхній" розв'язки, можна показати, що рівняння Ріккаті

$$\dot{K}(t) = A(\varepsilon)K(t) + K(t)A'(\varepsilon) - K(t)S(\varepsilon)K(t) + R(\varepsilon), \quad K(t_0) = D^{-1}, \tag{13}$$

має єдиний розв'язок $t \mapsto K(t,\varepsilon)$, визначений на $[t_0, T]$ при кожному $\varepsilon > 0$, причому $K(t,\varepsilon)$ є невід'ємно означеною матрицею в області визначення. Нехай $q(\cdot,\varepsilon), \varphi(\cdot,\varepsilon)$ знаходяться як розв'язки задач Коші

$$\dot{\varphi}(t) = (A(\varepsilon) - K(t,\varepsilon)S(\varepsilon))\varphi(t) + g(t,\varepsilon) - K(t,\varepsilon)\ell(t,\varepsilon), \quad \varphi(t_0) = g_0, \tag{14}$$

$$\dot{q}(t) = (-A'(\varepsilon) + S(\varepsilon)K(t,\varepsilon))q(t) + S(\varepsilon)\varphi(t) + \ell(t,\varepsilon), \quad q(T) = 0. \tag{15}$$

Підстановкою перевіряється, що

$$p_1(t,\varepsilon) = K(t,\varepsilon)q(t,\varepsilon) + \varphi(t,\varepsilon), \quad v_1(t,\varepsilon) = q(t,\varepsilon) \tag{16}$$

задовольняють (12).

Покажемо, що в умовах теореми норма $\varphi(\cdot,\varepsilon)$ залишається обмеженою при $\varepsilon \to 0$. Справді,

$$\varphi(t,\varepsilon) = \Phi(t,t_0,\varepsilon)f_1^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,s,\varepsilon)(g(s,\varepsilon) - K(s,\varepsilon)\ell(s,\varepsilon))ds,$$

де $\Phi(t,s,\varepsilon)$ — нормована фундаментальна матриця для (14) при фіксованому $\varepsilon > 0$, і нам достатньо показати обмеженість функцій, що є елементами матриць $\Phi(t,s,\varepsilon), K(t,\varepsilon)$ та векторів $g(s,\varepsilon), \ell(s,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Покладемо $g(t) := D^{-\frac{1}{2}}(g_1(t) - C_2C_4^+g_2(t))$, $\ell(t) := C_3'(E - C_4C_4^+)g_2(t)$. Тоді при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{t_0}^{T} (g(t,\varepsilon) - g(t), g(t,\varepsilon) - g(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} (D^{-1}(C_2C_4^+ - C_2Q(\varepsilon)C_4')g_2(t), (C_2C_4^+ - C_2Q(\varepsilon)C_4')g_2(t))dt \to 0,$$

тому що $Q(\varepsilon)C_4' \to C_4^+$ при $\varepsilon \to 0$. Отже, знайдуться $\overline{g}, \overline{\ell} > 0$ такі, що

$$\|g(\cdot,\varepsilon)\|_2 \le \overline{g}, \quad \|\ell(\cdot,\varepsilon)\|_2 \le \overline{\ell}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Введемо функцію $K_l(\cdot,\varepsilon)$ як розв'язок рівняння Бернуллі

$$\dot{K}_l(t) = A(\varepsilon)K_l(t) + K_l(t)A'(\varepsilon) + R(\varepsilon), \quad K_l(t_0) = D^{-1}.$$

Диференціюючи функцію $t \mapsto ((K_l(t,\varepsilon) - K(t,\varepsilon))p, p)$, знаходимо

$$(K_l(t,\varepsilon)p, p) \geq (K(t,\varepsilon)p, p), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad \varepsilon > 0,$$

звідки $\mathrm{sp}\,(K_l(t,\varepsilon) \geq \mathrm{sp}\,(K(t,\varepsilon))$. Нехай $\|F\|_{\mathrm{sp}} = \mathrm{sp}(FF')$. Тоді для деякого $U > 0$

$$\frac{1}{U}\,\|K(t,\varepsilon)\|_{\mathrm{mod}} \leq \|K(t,\varepsilon)\|_{\mathrm{sp}} \leq \mathrm{sp}(K(t,\varepsilon)) \leq \|K_l(t,\varepsilon)\|_{\mathrm{mod}},$$

бо $K(t,\varepsilon)$ — невід'ємно означена симетрична матриця при $t \geq t_0$, $\varepsilon > 0$. З того, що $\|A(\varepsilon) - A\|_{\mathrm{mod}} \to 0$, $\varepsilon \to 0$, для $A := D^{\frac{1}{2}}(C_1 - C_2C_4^+C_3)$, і зображення

$$K_l(t,\varepsilon) = \exp((A(\varepsilon) + A'(\varepsilon))(t - t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp(A(\varepsilon)(t-s))R(\varepsilon)\exp(A'(\varepsilon)(t-s))ds$$

легко вивести, що при достатньо малому $\varepsilon > 0$

$$\|K_l(t,\varepsilon)\|_{\mathrm{mod}} \leq \|\exp((A + A')(t - t_0))\|_{\mathrm{mod}} + 1,$$

$$M\int\limits_{t_0}^{t}(\|\exp(A(t-s))\|_{\mathrm{mod}} + 1)(1 + \|\exp(A'(t-s))\|_{\mathrm{mod}})ds := \overline{K}_1(t),$$

де $\|R(\varepsilon)\|_{\mathrm{mod}} \leq M$. Отже, $\|K(t,\varepsilon)\|_{\mathrm{mod}} \leq U\overline{K}_1(t)$.

Якщо покласти $P(t,\varepsilon) := A(\varepsilon) - K(t,\varepsilon)S(\varepsilon)$, то

$$\|P(t,\varepsilon)\|_{\mathrm{mod}} \leq 1 + \|A\|_{\mathrm{mod}} + U\overline{K}_1(t)(\|C_3'(E - C_4C_4^+)C_3\|_{\mathrm{mod}} + 1),$$

звідки вже легко (див., наприклад, [12, с. 432]) вивести обмеженість елементів $\Phi(t,s,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Аналогічно доводиться обмеженість $q(\cdot,\varepsilon)$. Звідси, зважаючи на рівності (10) та (15), встановлюємо обмеженість $p_1(\cdot,\varepsilon)$, $p_2(\cdot,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Пригадавши, що $x(t,\varepsilon) = R'p(t,\varepsilon)$, і застосувавши теорему 2, дістанемо потрібне твердження.

Проілюструємо теорему 2 на прикладі дескрипторної системи спеціального вигляду, що породжує ін'єктивний оператор $\mathcal{D}$ з незамкненою множиною значень.

Приклад 2. Покладемо

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатись, що у цьому випадку оператор $\mathcal{D}$ є ін'єктивним, відтак $\mathcal{D}^*$ має щільну в $\mathbb{L}_2^n$ множину значень, яка (див. теорему 1) складається з усіх вектор-функцій вигляду

$$\left\{\begin{pmatrix} -\dot{z}_1 - z_1 - z_2 \\ z_1 \end{pmatrix},\ z_1 \in \mathbb{W}_2^1([t_0,T]),\ z_1(T) = 0,\ z_2 \in \mathbb{L}_2([t_0,T])\right\}.$$

Звідси видно, що $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{R}(\mathcal{D}^*)$, якщо $f_2 \notin \mathbb{W}_2^1([t_0, T])$. Отже, множина значень $\mathcal{D}^*$, а разом з нею і $\mathcal{R}(\mathcal{D})$, не є замкненою. Зауважимо, що умови теореми 3 порушуються, бо $C_2'(\varepsilon^2 E + C_4' C_4)^{-1} = -\varepsilon^{-2}$.

Покажемо, що і у цьому випадку ми можемо наблизити розв'язок (5) за допомогою розв'язків (12) при $(f(\cdot), f_0) \in \mathcal{R}(\mathcal{D})$. Легко переконатись, що крайова задача (12) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + (1+\varepsilon^{-2}) z_1(t) + f_1(t), \\ \dot{z}_1(t) &= -z_1(t) + (1+\varepsilon^2) x_1(t) + f_2(t), \end{aligned} \tag{17}$$
$$x_1(t_0) - z_1(t_0) = f_{01}, \quad z_1(T) = 0, \quad x_2(t) = -\varepsilon^2 z_1(t,\varepsilon).$$

Відповідне (13) рівняння Ріккаті має вигляд

$$\dot{k}(t) = 2k(t) + (1+\varepsilon^{-2}) - (1+\varepsilon^2) k^2(t) := U(t,k), \quad k(t_0) = 1. \tag{18}$$

Покладемо

$$k^- := \frac{\varepsilon^2 - \sqrt{\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^6}}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4}, \quad k^+ := \frac{\varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^6}}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4}.$$

Використовуючи теорему Пікара – Ліндельофа, переконуємось, що для деякого $\varepsilon_0 > 0$

$$k^- < k(t,\varepsilon) < k^+, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad t > t_0, \tag{19}$$

звідки $\dot{k}(t,\varepsilon) > 0$, $t \geq t_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, бо $U(t,k) = (1+\varepsilon^2)(k-k^-)(k^+-k)$. Отже, $k(t,\varepsilon) \geq k(t_0,\varepsilon) > 0$ для $t \geq t_0, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Позначимо через $q(\cdot,\varepsilon)$ розв'язок рівняння

$$q_{tt}(t) - 2q_t(t) + (1+\varepsilon^{-2})(1+\varepsilon^2) q(t) = 0, \quad q_t(t_0) = 1+\varepsilon^2, \quad q(t_0) = 1.$$

Безпосередньою підстановкою встановлюється, що $t \mapsto \dfrac{q_t(t,\varepsilon)}{(1+\varepsilon^2) q(t,\varepsilon)}$ задовольняє (18), звідки

$$q(t,\varepsilon) = e^{\int_{t_0}^t (1+\varepsilon^2) k(s,\varepsilon)} > 0 \Rightarrow q_t(t,\varepsilon) \geq 0, \quad t \geq t_0, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Диференціюванням легко пересвідчитись, що

$$\varphi(t,\varepsilon) = \frac{e^{t-t_0}}{q(t,\varepsilon)} \left\{ f_1^0 + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{q(\tau,\varepsilon)}{e^{\tau - t_0}} f_1(\tau) - \frac{\dot{q}(\tau,\varepsilon) f_2(\tau)}{e^{\tau - t_0}(1+\varepsilon^2)} \right) d\tau \right\}$$

є розв'язком (14), а

$$z(t,\varepsilon) = -\frac{q(t,\varepsilon)}{e^t} \int_t^T \frac{e^s}{q(s,\varepsilon)} \big(f_2(s) + (1+\varepsilon^2) \varphi(s,\varepsilon) \big)\, ds$$

— розв'язком (15), тому $x_1(t,\varepsilon) = k(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) + \varphi(t,\varepsilon)$, $x_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon^{-2}z(t,\varepsilon)$.

Якщо покласти $f_1(t) \equiv 0$, $f_2(t) = -e^{t-t_0}$, $f_1^0 = 1$, то рівняння $\mathcal{D}x(\cdot) = (f(\cdot), f_0)$ має єдиний розв'язок

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(t) = -f_2(t), \quad x_2(t) \equiv 0,$$

внаслідок ін'єктивності $\mathcal{D}$. З іншого боку,

$$\varphi(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 e^{t-t_0}}{(1+\varepsilon^2)q(t,\varepsilon)} + \frac{e^{t-t_0}}{1+\varepsilon^2}, \quad z(t,\varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{q(t,\varepsilon)}{e^{t+t_0}} \int\limits_t^T \frac{e^{2s}}{q^2(s,\varepsilon)}\, ds.$$

Покажемо, що $x_1(\cdot,\varepsilon) \to x_1, x_2(\cdot,\varepsilon) \to 0$ у $\mathbb{L}_2^n$. Функція $q(\cdot,\varepsilon)$ є зростаючою, відтак

$$\frac{e^{t-t_0}}{1+\varepsilon^2} < \varphi(t,\varepsilon) \le \frac{e^{t-t_0}}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 e^{t-t_0}}{(1+\varepsilon^2)q(t_0,\varepsilon)}, \quad z(t,\varepsilon) \le -\varepsilon^2 \frac{q(t,\varepsilon)}{e^{t+t_0} q^2(t,\varepsilon)} \int\limits_t^T e^{2s} ds,$$

звідки, враховуючи рівність $q(t_0,\varepsilon) = 1$ та (19), дістаємо

$$\int\limits_{t_0}^T (\varphi(t,\varepsilon) + f_2(t))^2\, dt \le \int\limits_{t_0}^T \left(\frac{e^{t-t_0}}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 e^{t-t_0}}{(1+\varepsilon^2)} - e^{t-t_0} \right)^2 dt \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\int\limits_{t_0}^T k^2(t,\varepsilon) z^2(t,\varepsilon)\, dt \le \int\limits_{t_0}^T \left(-\varepsilon^2 k^+ \frac{e^{2T} - e^{2t}}{2e^{t+t_0}} \right)^2 dt \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отже, $x_1(\cdot,\varepsilon) \to -f_2(\cdot)$.

Можна переконатись, що

$$q(t,\varepsilon) = \frac{(\varepsilon^4 + \sqrt{\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^6}) e^{\frac{\varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^2+3\varepsilon^4+\varepsilon^6}}{\varepsilon^2}(t-t_0)}}{2\sqrt{\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^6}} +$$
$$+ \frac{(\sqrt{\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^6} - \varepsilon^4) e^{\frac{\varepsilon^2 - \sqrt{\varepsilon^2+3\varepsilon^4+\varepsilon^6}}{\varepsilon^2}(t-t_0)}}{2\sqrt{\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^6}},$$

відтак норма $q(\cdot,\varepsilon)$ необмежено зростає при $\varepsilon \to 0$. З іншого боку,

$$-\varepsilon^{-2} z(t,\varepsilon) \le \frac{e^{2T} - e^{2t}}{2e^{t+t_0} q(t,\varepsilon)},$$

тому $x_2(\cdot,\varepsilon) \to 0$.

Наступний приклад ілюструє застосування достатніх умов нормальної розв'язності (теореми 3) для дескрипторного рівняння, не розщепленого на алгебраїчну та диференціальну складові.

Приклад 3. Покладемо

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C(t) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Відповідна дескрипторна система запишеться у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{2}\,x_2\right)(t) = -\frac{1}{2}\,x_1(t) - \frac{1}{2}\,x_2(t) + f_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2\right)(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}\,x_2(t) + f_2(t),$$

$$\left(\frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{2}\,x_2\right)(t_0) = f_1^0, \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\,x_2\right)(t_0) = f_2^0.$$

Покладемо

$$T := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $F = T\Lambda T'$ і $T'C(t)T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, тому за теоремою 3 відповідний оператор $\mathcal{D}$ є нормально розв'язним, бо $C_2Q(e) \equiv 0$. З іншого боку, замкненість множини значень оператора $p(\cdot) \mapsto \mathcal{D}_1 p(\cdot) = \left(\frac{d}{dt}\,\Lambda p(\cdot) - T'C(t)Tp(\cdot), \Lambda\, p(t_0)\right)$ перевіряється безпосередньо. Справді, спряжений оператор діє за правилом

$$(z(\cdot), z_0) \mapsto \begin{pmatrix} -\dot{z}_1(t) - z_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 \in \mathbb{L}_2(t_0, T), \quad z_1 \in \mathbb{W}_2^1(t_0, T), \quad z_1(T) = 0,$$

тому $\mathcal{R}(\mathcal{D}_1^*) = \mathbb{L}_2(t_0, T) \times \{0\}$ є замкненою множиною одночасно з $\mathcal{R}(\mathcal{D}_1)$.

Зауважимо, що $\det(\lambda F + C) \equiv 0$. Водночас ядро оператора $\mathcal{D}$ є нескінченновимірним, бо $(F - C(t))T \begin{pmatrix} 0 \\ f(\cdot) \end{pmatrix} = 0$, $f(\cdot) \in \mathbb{L}_2(t_0, T)$.

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
2. *Чистяков В. Ф.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — М.: Наука, 2003. — 222 с.
3. *Бояринцев Ю. И.* Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений. — М.: Наука, 1996.
4. *Dai L.* Singular control systems // Lect. Notes Control and Inform. Sci. — Berlin: Springer, 1989. — **8**.
5. *Campbell S. L., Petzold L. R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Algebr. Discrete Methods. — 1983. — № 4. — P. 517–521.

6. *Müller P. C.* Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: a survey // Appl. Math. and Comput. Sci. — 1998. — **8**, № 2. — P. 269 – 286.

7. *Gerdin M.* Parameter estimation in linear descriptor systems. — Sweden, 2004. — Printed by UniTryck, Linköping Univ.

8. *Mehrman V., Stykel T.* Descriptor systems: A general mathematical framework for modelling, simulation and control. — Techn. Rept 292-2005. — Inst. Math., Techn. Univ., Berlin.

9. *Костюкова О. И.* Критерий оптимальности для линейно-квадратичной задачи оптимального управления дескрипторной системой // Дифференц. уравнения. — 2000. — **36**, № 11. — С. 1475 – 1481.

10. *Руткас А. Г., Бондаренко М. Ф.* Признаки детерминированности неявных неавтономных систем // Доп. НАН України. — 2001. — № 1. — С. 7 – 11.

11. *Курина Г. А.* Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1992. — № 4. — С. 20 – 48.

12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 572 с.

13. *Favini A., Vlasenko L.* On solvability of degenerate nonstationary differential-difference equations in Banach spaces // Different. and Integr. Equat. — 2001. — **14**, № 7. — P. 883 – 896.

14. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 102 с.

15. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. — Киев: Наук. думка, 1983. — 212 с.

16. *Лисковец О. А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. — Минск: Наука и техника, 1981. — 344 с.

17. *Шафиев Р. А.* Псевдообращение операторов и некоторые приложения. — Баку: Элм, 1989. — 152 с.

18. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание: Пер. з англ. — М.: Наука, 1977. — 224 с.

19. *Mou L., Liberty S. L.* Estimation of maximal existence intervals for solutions to a Riccati equation via an upper-lower solution method // Proc. thirty-ninth Allerton Conf. Commun., Control, and Comput. (http://www.csl.uiuc.edu/allerton/). — 2001.

Одержано 18.09.07